

# Stabilité des solitons de l'équation de Landau-Lifshitz à anisotropie planaire

André de Laire<sup>1</sup> et Philippe Gravejat<sup>2</sup>

15 juillet 2015

## Résumé

Cet exposé présente plusieurs résultats récents quant à la stabilité des solitons sombres de l'équation de Landau-Lifshitz à anisotropie planaire, en particulier, quant à la stabilité orbitale des trains (bien préparés) de solitons gris [16] et à la stabilité asymptotique de ces mêmes solitons [2].

## 1 Introduction

### 1.1 L'équation de Landau-Lifshitz à anisotropie planaire

L'équation de Landau-Lifshitz

$$\partial_t \mathbf{m} + \mathbf{m} \wedge (\Delta \mathbf{m} - \lambda m_3 \mathbf{e}_3) = 0, \quad (\text{LL})$$

décrit la dynamique de la magnétisation  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$  dans un échantillon ferromagnétique (cf. l'article pionnier de Landau et Lifshitz [35]). Le vecteur  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  et le paramètre réel  $\lambda$  rendent compte de l'anisotropie du matériau. Lorsque  $\lambda$  est strictement négatif, la magnétisation tend à s'orienter suivant la droite engendrée par le vecteur  $\mathbf{e}_3$  : le matériau possède une anisotropie axiale suivant cet axe. Lorsque  $\lambda$  est un nombre strictement positif, l'anisotropie est planaire suivant le plan d'équation  $x_3 = 0$  : les directions privilégiées par la magnétisation sont portées par ce plan. Enfin, le cas isotrope où  $\lambda$  est nul correspond à l'équation des Schrödinger maps, laquelle est l'objet d'un intense intérêt mathématique (cf. e.g. [54, 51, 18, 12, 47, 27, 37, 3, 28]). Dans la suite, l'accent sera mis sur l'anisotropie planaire à travers le choix du paramètre

$$\lambda = 1.$$

L'équation de Landau-Lifshitz à anisotropie planaire est hamiltonienne. Son hamiltonien est l'énergie de Landau-Lifshitz, qui prend la forme

$$E(\mathbf{m}) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \mathbf{m}|^2 + m_3^2).$$

Il est pertinent sur le plan physique d'étudier l'équation dans le cadre hamiltonien. Aussi l'analyse qui suit ne porte-t-elle que sur les solutions  $\mathbf{m}$  qui possèdent une énergie de

---

1. Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France. E-mail : [andre.delaire@math.univ-lille1.fr](mailto:andre.delaire@math.univ-lille1.fr)

2. Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France. E-mail : [philippe.gravejat@polytechnique.edu](mailto:philippe.gravejat@polytechnique.edu)

Landau-Lifshitz finie. En un sens à préciser, la fonction  $\mathbf{m}$  tend alors à s'orienter parallèlement au plan d'équation  $x_3 = 0$  à l'infini, ce qui est cohérent avec l'anisotropie planaire du matériau considéré. Ceci induit que la fonction complexe  $\check{m} := m_1 + im_2$  satisfait la convergence, toujours en un sens à préciser,

$$|\check{m}(x)| \rightarrow 1,$$

lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . Cette dernière propriété rapproche l'équation de Landau-Lifshitz des équations de type Schrödinger non linéaires avec condition de limite non nulle à l'infini, dont l'exemple caractéristique est fourni par l'équation de Gross-Pitaevskii (cf. e.g. [4]).

L'équation de Landau-Lifshitz est également dispersive. La relation de dispersion de l'équation linéarisée autour de la solution constante  $\mathbf{m} \equiv (1, 0, 0)$  est donnée par la formule

$$\omega(k)^2 = |k|^4 + |k|^2.$$

La vitesse de groupe correspondante  $\mathbf{v}_g(k)$  est égale à

$$\mathbf{v}_g(k) := \nabla\omega(k) = \pm \frac{2|k|^2 + 1}{\sqrt{|k|^4 + |k|^2}} k.$$

La norme de cette vitesse de groupe est toujours supérieure ou égale à une vitesse critique, la vitesse du son  $c_s = 1$ . Autrement dit, la dispersion se déplace à une vitesse supersonique.

L'équation de Landau-Lifshitz possède enfin une formulation hydrodynamique. Lorsque la fonction  $\check{m} = m_1 + im_2$  ne s'annule pas, elle se relève sous la forme

$$\check{m} = \sqrt{1 - m_3^2} \exp i\varphi.$$

Les fonctions  $v = m_3$  et  $\mathbf{w} = \nabla\varphi$  sont solutions de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique

$$\begin{cases} \partial_t v = -\operatorname{div}((1 - v^2)\mathbf{w}), \\ \partial_t \mathbf{w} = -\nabla\left(v - v|\mathbf{w}|^2 - \frac{\Delta v}{1 - v^2} - \frac{v|\nabla v|^2}{(1 - v^2)^2}\right). \end{cases} \quad (\text{HLL})$$

Cette forme hydrodynamique est une seconde manifestation du lien profond entre l'équation de Landau-Lifshitz à anisotropie planaire, et les équations de type Schrödinger non linéaires avec condition de limite non nulle à l'infini telles que l'équation de Gross-Pitaevskii.

Rappelons que cette dernière équation se présente sous la forme

$$i\partial_t \Psi + \Delta \Psi + \Psi(1 - |\Psi|^2) = 0,$$

pour une fonction  $\Psi$  définie sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  et à valeurs complexes. L'équation de Gross-Pitaevskii apparaît dans deux domaines de la physique. En mécanique quantique d'une part, où elle décrit la dynamique des condensats de Bose-Einstein [49], et par suite, de phénomènes reliés comme la supraconductivité ou la superfluidité [26]. En optique non linéaire d'autre part, où elle rend compte de la propagation des solitons sombres [34], lesquels sont les équivalents optiques des solitons ferromagnétiques que nous étudions dans la suite.

L'équation de Gross-Pitaevskii est également hamiltonienne. Son hamiltonien est l'énergie de Ginzburg-Landau qui est définie par l'expression

$$E(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - |\Psi|^2)^2.$$

Cette formule est similaire à celle de l'équation de Landau-Lifshitz. La fonction potentielle  $m_3$  joue dans l'équation de Landau-Lifshitz un rôle identique à celui joué par la fonction potentielle  $\eta := 1 - |\Psi|^2$  dans l'équation de Gross-Pitaevskii.

L'équation de Gross-Pitaevskii est aussi dispersive. La relation de dispersion de l'équation linéarisée autour de la solution constante  $\Psi \equiv 1$  est égale à

$$\omega(k)^2 = |k|^4 + 2|k|^2.$$

Cette relation de dispersion est presque identique à celle de l'équation de Landau-Lifshitz. À nouveau, la norme de la vitesse de groupe correspondante est toujours supérieure à une vitesse critique, la vitesse du son, laquelle vaut désormais  $c_s = \sqrt{2}$ . La propagation de la dispersion se fait encore à vitesse supersonique.

L'équation de Gross-Pitaevskii possède de plus une formulation hydrodynamique. Lorsque la fonction  $\Psi$  ne s'annule pas, elle se relève par la transformation de Madelung [39] sous la forme

$$\Psi = \sqrt{\rho} \exp i\varphi.$$

Les fonctions  $\rho$  et  $\mathbf{v} = 2\nabla\varphi$  sont solutions du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \rho(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla(\rho^2) = 2\rho \nabla \left( \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right). \end{cases}$$

Ce système est très similaire à l'équation d'Euler pour un fluide irrotationnel de pression  $P(\rho) = \rho^2$ , ce qui justifie la terminologie de formulation hydrodynamique de l'équation. L'unique différence réside dans le second membre de la seconde équation qui est, en général, désigné sous le nom de pression quantique. Dans les variables  $\eta = 1 - |\Psi|^2$  et  $\mathbf{w} = -\nabla\varphi$ , ce système hydrodynamique s'écrit sous une forme

$$\begin{cases} \partial_t \eta = -2\operatorname{div}((1 - \eta)\mathbf{w}), \\ \partial_t \mathbf{w} = -\nabla \left( \eta - |\mathbf{w}|^2 - \frac{\Delta \eta}{2(1-\eta)} - \frac{|\nabla \eta|^2}{4(1-\eta)^2} \right), \end{cases}$$

qui est très semblable à l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique.

Soulignons enfin une dernière similitude, et non des moindre, entre les deux équations. En dimension un, toutes deux sont intégrables par la méthode du scattering inverse (cf. e.g. [53, 50, 19]). Chacune des équations possède une paire de Lax [36]. Par exemple, si  $\Psi$  désigne une solution de l'équation de Gross-Pitaevskii pour une donnée initiale  $\Psi^0$ , les opérateurs

$$L_\Psi = \begin{pmatrix} i(1 + \sqrt{3})\partial_x & \bar{\Psi} \\ \Psi & i(1 - \sqrt{3})\partial_x \end{pmatrix},$$

et

$$B_\Psi = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\partial_{xx} + \frac{|\Psi|^2 - 1}{\sqrt{3} + 1} & i\partial_x \bar{\Psi} \\ -i\partial_x \Psi & -\sqrt{3}\partial_{xx} + \frac{|\Psi|^2 - 1}{\sqrt{3} - 1} \end{pmatrix},$$

satisfont l'équation

$$\partial_t L_{\Psi(t)} = i[L_{\Psi(t)}, B_{\Psi(t)}].$$

Au moins formellement, la valeur de l'opérateur  $L_\Psi$  au temps  $t$  dépend de celle au temps 0 à travers la formule

$$L_{\Psi(t)} = U(t)L_{\Psi^0}U(t)^*,$$

dans laquelle l'opérateur unitaire  $U(t)$  est l'unique solution de l'équation

$$U'(t) = -iB_{\Psi(t)}U(t),$$

pour la donnée initiale identité  $U(0) = I$ . En particulier, les propriétés spectrales des opérateurs  $L_{\Psi(t)}$  sont conservées le long du flot de l'équation de Gross-Pitaevskii.

La méthode du scattering inverse consiste alors à déterminer les propriétés spectrales de l'opérateur  $L_{\Psi^0}$  au temps 0, à en déduire celles de l'opérateur  $L_{\Psi(t)}$  grâce à la formule précédente, puis à reconstruire la solution  $\Psi(t)$  à partir des propriétés spectrales de cet opérateur. Cette dernière étape est rendue possible par des formules comme celle de Gelfand-Levitan-Marchenko [20, 1], qui fournissent la valeur de la fonction  $\Psi(t)$  à partir des éléments spectraux de  $L_{\Psi(t)}$ . Dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii, l'emploi de cette méthode peut se justifier de manière rigoureuse, au moins sous des hypothèses de régularité et de décroissance suffisantes pour la donnée initiale  $\Psi^0$  (cf. e.g. [22, 14]).

Notons pour terminer que la méthode du scattering inverse fournit au moins formellement une description de la dynamique en temps long de l'équation de Gross-Pitaevskii, comme de celle de Landau-Lifshitz. Cette dynamique est gouvernée par la propagation d'un train d'ondes progressives auquel vient s'ajouter une composante de nature dispersive. C'est à cette description que nous nous intéressons dans la suite à travers des résultats de stabilité des ondes progressives ou des trains d'ondes progressives. Une description complète et rigoureuse de la dynamique en temps long des équations de Gross-Pitaevskii, ou de Landau-Lifshitz, reste, à notre connaissance, ouverte.

## 1.2 Les ondes progressives

Les ondes progressives sont les solutions particulières de l'équation de Landau-Lifshitz, qui s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{m}(x, t) = \mathbf{m}_c(x_1 - ct, \dots, x_N).$$

Elles correspondent à la propagation d'un profil  $\mathbf{m}_c$  dans une direction fixée, dans la suite la direction  $x_1$ , et à une vitesse constante  $c$ . À partir de l'équation de Landau-Lifshitz, il est facile d'obtenir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le profil  $\mathbf{m}_c$ , laquelle prend la forme

$$\Delta \mathbf{m}_c + |\nabla \mathbf{m}_c|^2 \mathbf{m}_c + [\mathbf{m}_c]_3^2 \mathbf{m}_c - [\mathbf{m}_c]_3 \mathbf{e}_3 + c \mathbf{m}_c \wedge \partial_1 \mathbf{m}_c = 0. \quad (\text{OP})$$

Il s'agit d'une équation non linéaire de type elliptique. Les fonctions constantes égales à

$$\mathbf{m}_c(x) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0),$$

où  $\varphi$  est un nombre réel quelconque, sont les solutions d'énergie finie les plus élémentaires de l'équation. La détermination de solutions non constantes est plus délicate, au moins en dimension supérieure ou égale à deux.

En dimension un au contraire, l'équation des ondes progressives se ramène à une équation différentielle ordinaire de type Newton, qui se résout de manière explicite.

**Lemme 1.** *Il existe des solutions  $\mathbf{m}_c$  non constantes d'énergie finie et de vitesse  $c$  de l'équation (OP) si et seulement si*

$$|c| < 1.$$

*À translation, rotation autour de l'axe  $x_3$ , et réflexion par rapport au plan  $x_3 = 0$  près, ces solutions sont données par les formules*

$$[\mathbf{m}_c]_1(x) = \frac{c}{\cosh(\sqrt{1-c^2}x)}, \quad [\mathbf{m}_c]_2(x) = \tanh(\sqrt{1-c^2}x), \quad [\mathbf{m}_c]_3(x) = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\cosh(\sqrt{1-c^2}x)}.$$

Il existe donc une famille d'ondes progressives non constantes d'énergie finie en dimension un. Leur expression la plus générale prend la forme

$$\mathbf{m}_{c,a,\theta,s}(x) := (\cos(\theta)[\mathbf{m}_c]_1 - \sin(\theta)[\mathbf{m}_c]_2, \sin(\theta)[\mathbf{m}_c]_1 + \cos(\theta)[\mathbf{m}_c]_2, s[\mathbf{m}_c]_3)(x - a),$$

pour  $c \in ]-1, 1[$ ,  $(a, \theta) \in \mathbb{R}^2$  et  $s \in \{\pm 1\}$ .

Ces ondes progressives sont appelées solitons sombres. Cette terminologie provient de l'optique où le module de la fonction  $\check{m}_c := [\mathbf{m}_c]_1 + i[\mathbf{m}_c]_2$  correspond à l'intensité lumineuse. À l'infini, ce module est égal à 1, tandis qu'il est petit dans un voisinage de l'origine. En pratique, la propagation d'un soliton correspond donc au déplacement à vitesse constante d'une zone plus sombre. À noter que le module de la fonction  $\check{m}_c$  ne peut s'annuler que lorsque la vitesse  $c$  est elle-même nulle. Aussi le soliton  $\mathbf{m}_0$  est-il désigné sous le nom de soliton noir, tandis que les autres solitons sont appelés solitons gris.

Cette famille de solitons est unique aux invariances géométriques près de l'équation de Landau-Lifshitz, à savoir les translations, les rotations autour de l'axe  $x_3$ , et la réflexion par rapport au plan d'équation  $x_3 = 0$ . De plus, tous les solitons qui la composent ont une vitesse subsonique. Il existe ainsi une dichotomie entre les vitesses supersoniques de la dispersion, et celles subsoniques des solitons. Aussi est-il vraisemblable qu'en temps long solitons et dispersion se séparent. Cette observation est au coeur de la preuve de la stabilité asymptotique des solitons.

Lorsque la vitesse  $c$  est non nulle, le soliton

$$\mathbf{m}_c = \left( \sqrt{1 - [\mathbf{m}_c]_3^2} \cos(\varphi_c), \sqrt{1 - [\mathbf{m}_c]_3^2} \sin(\varphi_c), [\mathbf{m}_c]_3 \right),$$

s'identifie dans la formulation hydrodynamique au couple de fonctions

$$\mathbf{v}_c = (v_c, w_c) = ([\mathbf{m}_c]_3, \partial_x \varphi_c),$$

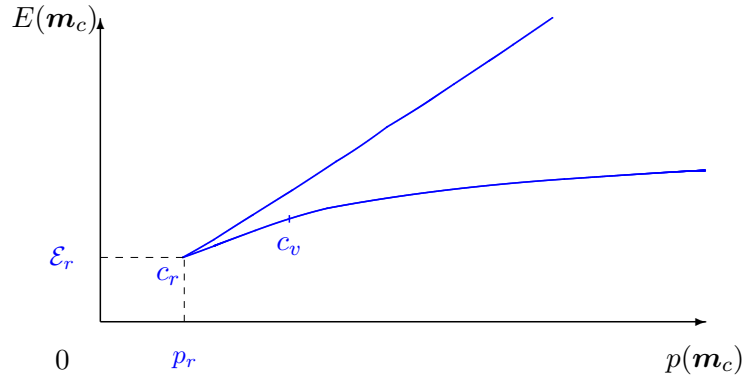
où les fonctions  $v_c$  et  $w_c$  sont données par les formules

$$v_c(x) = \frac{(1 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{\cosh((1 - c^2)^{\frac{1}{2}}x)} \quad \text{et} \quad w_c(x) = \frac{c v_c(x)}{1 - v_c(x)^2}.$$

Notons la décroissance exponentielle de ces deux fonctions, qui est un outil primordial dans la preuve de la stabilité orbitale d'un train de solitons.

En dimension supérieure ou égale à deux, l'analyse des ondes progressives est bien plus délicate, car l'équation aux dérivées partielles (OP) qu'elles satisfont ne se réduit plus à une équation différentielle ordinaire. Dans un travail à la fois numérique et formel, Papanicolaou et Spathis [48] se sont intéressés à la description des ondes progressives non constantes en dimensions deux et trois.

Comme en dimension un, ils ont obtenu l'existence d'une branche d'ondes progressives  $\mathbf{m}_c$  non constantes, d'énergie finie, et de vitesses  $c$  subsoniques. Il est possible de représenter cette branche dans le plan défini par leur énergie  $E(\mathbf{m}_c)$  et leur moment scalaire  $p(\mathbf{m}_c)$ .



Le moment vectoriel  $\mathbf{p}(\mathbf{m})$  est une seconde quantité invariante par le flot de l'équation de Landau-Lifshitz. Cette quantité est facile à définir dans la formulation hydrodynamique où elle vaut

$$\mathbf{p}(\mathbf{m}) := \int_{\mathbb{R}^N} v\mathbf{w}.$$

Le moment scalaire  $p(\mathbf{m})$  correspond à la première composante de cette quantité, soit la fonction

$$p(\mathbf{m}) := \mathbf{p}_1(\mathbf{m}) = \int_{\mathbb{R}^N} vw_1.$$

Dans les variables originelles, il est plus délicat de définir de manière rigoureuse cette quantité. Cette question peut néanmoins se résoudre de manière analogue à celle employée dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii où une question identique se pose (cf. e.g. [6] pour de plus amples détails).

Dans le tracé précédent, chaque point de la courbe représente une onde progressive  $\mathbf{m}_c$  d'énergie  $E(\mathbf{m}_c)$  et de moment scalaire  $p(\mathbf{m}_c)$ . La vitesse  $c$  de l'onde progressive est donnée par la pente de la tangente à la courbe au point considéré. Sur la branche inférieure, l'asymptote horizontale correspond au cas où la vitesse des ondes progressives se rapproche de la vitesse nulle, tandis que l'asymptote de la branche supérieure se rapporte à des vitesses qui tendent vers la vitesse du son  $c_s = 1$ .

Lorsque la vitesse  $c$  est petite, les ondes progressives contiennent des vortex. Il s'agit dans ce contexte ferromagnétique de zones où la magnétisation est orientée de manière orthogonale à ses directions préférentielles. Dans le cas de l'anisotropie planaire que nous considérons ici, la magnétisation  $\mathbf{m}$  s'oriente vers le pôle nord, ou le pôle sud, ce qui correspond à une annulation de la fonction complexe  $\tilde{m}$ . Le degré du vortex est alors défini comme le degré topologique de l'application  $\tilde{m}/|\tilde{m}|$  autour de ce zéro.

En dimension deux, les ondes progressives décrites par Papanicolaou et Spathis [48] présentent deux vortex, tous deux orientés vers le pôle nord, ou de manière symétrique, vers le pôle sud, et de degré  $\pm 1$ . Ces vortex se trouvent de plus à une distance proportionnelle à l'inverse de leur vitesse lorsque celle-ci converge vers 0. En dimension trois, les ondes progressives présentent un anneau de vorticité dont le diamètre est de l'ordre de  $|\log c|/c$  lorsque  $c$  tend vers 0. Lin et Wei [37] ont exploité cette description qualitative des ondes progressives afin de les construire de manière rigoureuse en dimension deux pour un intervalle de vitesses petites à l'aide d'arguments de type perturbatif. Ils ont en particulier confirmé la présence d'une paire de vortex dans les ondes progressives qu'ils ont obtenues.

Lorsque la vitesse  $c$  des ondes progressives augmente, leur énergie et leur moment commencent par décroître. En dessus d'une vitesse critique  $c_v$ , les ondes progressives ne contiennent plus de vortex, puis la vitesse atteint une seconde valeur critique  $c_r$  au dessus

de laquelle énergie et moment scalaire deviennent des fonctions croissantes de la vitesse. Dans la limite transsonique où la vitesse  $c$  converge vers la vitesse du son  $c_s = 1$ , les ondes progressives se comportent comme des ondes de raréfaction. Autrement dit, elles convergent vers des solutions constantes de l'équation. Dans cette limite transsonique, il est possible de décrire plus précisément la différence entre les ondes progressives et ces constantes limites.

Cette différence se comporte comme une onde progressive pour l'équation de Kadomtsev-Petviashvili généralisée, laquelle est donnée par la formule

$$\partial_1 \left( \partial_t u + \partial_1^3 u + u^2 \partial_1 u \right) - \Delta_{\perp} u = 0,$$

où l'opérateur laplacien transverse  $\Delta_{\perp}$  est défini par l'expression

$$\Delta_{\perp} := \sum_{j=1}^N \partial_j^2.$$

L'équation de Kadomtsev-Petviashvili [31] est une généralisation de l'équation de Korteweg-de Vries aux dimensions supérieures ou égales à deux. Elle décrit la dynamique dans un milieu faiblement dispersif, faiblement non linéaire, d'ondes faiblement transverses. L'équation de Kadomtsev-Petviashvili gouverne également la limite transsonique des ondes progressives pour l'équation de Gross-Pitaevskii, laquelle a été décrite de manière rigoureuse dans [5] en dimension deux, et [13] en dimension supérieure. À noter cependant que la non-linéarité qui apparaît dans la limite transsonique des ondes progressives de l'équation de Gross-Pitaevskii n'est pas cubique, mais quadratique. À notre connaissance, la dérivation rigoureuse de la limite transsonique vers l'équation de Kadomtsev-Petviashvili reste ouverte pour les ondes progressives de l'équation de Landau-Lifshitz.

De façon plus générale, l'analyse réalisée par Papanicolaou et Spathis [48] de cette branche d'ondes progressives est très similaire à l'étude entreprise par Jones, Putterman et Roberts [30, 29] quant aux ondes progressives de l'équation de Gross-Pitaevskii. Là encore, il est possible de décrire une branche d'ondes progressives subsoniques, et ce, que ce soit en dimension deux, ou trois. De plus, ces ondes progressives contiennent des paires de vortex en dimension deux, des anneaux de vortex en dimension trois, dans le régime où leur vitesse devient petite, et se comportent donc comme des ondes progressives pour l'équation de Kadomtsev-Petviashvili dans le régime transsonique.

En ce qui concerne l'équation de Gross-Pitaevskii, de nombreux travaux mathématiques sont venus confirmer les résultats numériques et formels de Jones, Putterman et Roberts (cf. e.g. [23] pour une revue de ces résultats). La situation est plus ouverte pour l'équation de Landau-Lifshitz. Outre la construction d'ondes progressives de vitesse petite en dimension deux par Lin et Wei [37], de Laire [15] a décrit les propriétés de régularité et de décroissance algébrique à l'infini des ondes progressives subsoniques. Il a également démontré l'existence d'un seuil d'énergie au-dessous duquel les seules ondes progressives subsoniques sont constantes.

Cette situation tient, en partie, au fait que l'équation de Landau-Lifshitz est à l'équation de Gross-Pitaevskii ce que l'équation des applications harmoniques est à l'équation de Laplace. L'analyse de l'équation se trouve compliquée par sa nature géométrique, et ses propriétés régularisantes sont bien moindres.

Pour en revenir à la stabilité des ondes progressives qui nous intéressent dans la suite, il est en général admis que celles qui composent la branche inférieure obtenue par Papanicolaou et Spathis [48] sont stables le long du flot de l'équation de Landau-Lifshitz, tandis

que celles qui composent la branche supérieure sont instables. Ceci s'explique par les propriétés minimisantes de la branche inférieure sur lesquelles nous reviendrons dans la suite. Avant de s'intéresser à la stabilité des solitons sombres en dimension un, et afin de permettre cette étude, il est temps d'établir l'existence et les propriétés du flot de l'équation de Landau-Lifshitz.

## 2 Le problème de Cauchy

### 2.1 Dans les variables originelles

Dans le cadre hamiltonien qui nous intéresse ici, il est naturel de restreindre le problème de Cauchy pour l'équation de Landau-Lifshitz à l'espace d'énergie  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$  des applications  $\mathbf{m}$  d'énergie finie, autrement dit à l'espace

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) := \{\mathbf{m} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{S}^2, \text{ t.q. } \nabla \mathbf{m} \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ et } m_3 \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Afin de pouvoir définir une notion de continuité pour les solutions de l'équation, il est nécessaire de munir cet ensemble d'une structure topologique. Une première difficulté provient du fait que l'espace d'énergie  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$  n'est pas un espace vectoriel puisque les fonctions  $\mathbf{m}$  dans cet ensemble sont à valeurs dans la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

Il demeure néanmoins permis de munir cet espace d'une structure métrique complète. Cette structure doit a minima contrôler la norme  $L^2$  du gradient  $\nabla \mathbf{m}$  et de la troisième composante  $m_3$  afin que l'énergie  $E$  soit une fonctionnelle continue sur l'espace  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ . Ceci ne suffit toutefois pas à contrôler la fonction  $\mathbf{m}$  puisque deux fonctions identiquement constantes à valeurs dans l'intersection de la sphère  $\mathbb{S}^2$  et du plan d'équation  $x_3 = 0$  ont même gradient et même troisième composante. Afin de résoudre cette seconde difficulté, une solution consiste à ajouter un contrôle local sur les fonctions  $\mathbf{m}$  dans l'ensemble  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ .

En dimension un, cela se traduit par l'introduction de la distance

$$d_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) := \left( \|\nabla \mathbf{m}_1 - \nabla \mathbf{m}_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|[\mathbf{m}_1]_3 - [\mathbf{m}_2]_3\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + |\check{m}_1(0) - \check{m}_2(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui exploite le théorème d'injection de Sobolev pour introduire un contrôle uniforme local sur les fonctions  $\mathbf{m}$  de  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ . En dimension supérieure ou égale à deux, un contrôle de même nature est fourni par la famille de distances équivalentes

$$d_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) := \left( \|\nabla \mathbf{m}_1 - \nabla \mathbf{m}_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|[\mathbf{m}_1]_3 - [\mathbf{m}_2]_3\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\check{m}_1 - \check{m}_2\|_{B(0,R)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $R$  désigne n'importe quel nombre strictement positif.

Dans la suite, nous munirons l'espace d'énergie des distances précédentes. Ce ne sont pas les seules distances pertinentes pour l'analyse du problème de Cauchy. Nous renvoyons à l'article de Gérard [21] pour une discussion de cette question dans le contexte analogue de l'équation de Gross-Pitaevskii. Le choix des distances précédentes repose sur le fait qu'elles sont particulièrement adaptées à l'analyse de la stabilité des ondes progressives.

Revenons maintenant au problème de Cauchy pour l'équation de Landau-Lifshitz. La résolution de ce problème repose sur des arguments introduits afin de résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des Schrödinger maps. Rappelons que cette équation correspond au cas isotrope du modèle de Landau-Lifshitz et qu'elle s'écrit donc sous la forme

$$\partial_t \mathbf{m} + \mathbf{m} \wedge \Delta \mathbf{m} = 0, \tag{SM}$$



pour une application  $\mathbf{m}$  définie sur l'espace  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  et à valeurs dans la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Ajouter le terme potentiel d'ordre inférieur  $-\mathbf{m} \wedge (m_3 \mathbf{e}_3)$  complique certes la structure de l'espace d'énergie, mais il demeure possible d'étendre bon nombre de résultats obtenus dans le cadre de l'équation des Schrödinger maps.

Soulignons que la résolution de cette dernière équation est compliquée par sa nature géométrique. Cette affirmation se justifie de façon élémentaire à l'aide de la projection stéréographique. Lorsqu'une solution régulière  $\mathbf{m}$  ne rencontre pas le pôle nord  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , elle se relève à l'aide de la projection stéréographique sur le plan d'équation  $x_3 = 0$  sous la forme

$$\mathbf{m} := \left( \frac{2 \operatorname{Re}(\Psi)}{1 + |\Psi|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(\Psi)}{1 + |\Psi|^2}, \frac{|\Psi|^2 - 1}{1 + |\Psi|^2} \right).$$

La fonction  $\Psi$  satisfait alors l'équation de type Schrödinger non linéaire

$$i \partial_t \Psi + \Delta \Psi - \frac{2\bar{\Psi}}{1 + |\Psi|^2} (\nabla \Psi)^2 = 0.$$

La non-linéarité dépend du carré (complexe) du gradient  $\nabla \Psi$  de la solution, ce qui complique la résolution de l'équation par rapport à celle d'une équation de type Schrödinger semi-linéaire où la non-linéarité ne dépend que de la fonction  $\Psi$ .

Les premiers résultats quant au problème de Cauchy pour l'équation des Schrödinger maps portent sur l'existence de solutions faibles. Zhou et Guo [54] ont établi l'existence d'une solution faible globale en s'appuyant sur une régularisation parabolique de l'équation et sur le théorème du point fixe de Leray-Schaüder. Sulem, Sulem et Bardos [51] ont confirmé ce premier résultat en appliquant un argument de compacité faible à une version discrétisée de l'équation. Ces résultats demeurent valables dans le contexte de l'équation de Landau-Lifshitz. Ils conduisent à l'énoncé suivant.

**Théorème** ([54, 51]). *Soit  $\mathbf{m}^0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ . Il existe une solution globale  $\mathbf{m} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{E}(\mathbb{R}^N))$  de (LL) pour la donnée initiale  $\mathbf{m}^0$ .*

Cet énoncé présente un défaut majeur lorsqu'il s'agit d'analyser la dynamique en temps long de l'équation. Il ne garantit aucune unicité pour les solutions ainsi construites. Le flot associé à l'équation n'est pas défini de manière unique, et l'absence de continuité par rapport à la donnée initiale lui retire toute propriété de régularité, ce qui est des plus fâcheux lorsqu'il s'agit d'étudier la stabilité de solutions particulières.

Afin de recouvrer ces propriétés, il est naturel de se placer dans des espaces avec plus de régularité. En s'appuyant sur des estimations d'énergie pour une version discrétisée de l'équation, Sulem, Sulem et Bardos [51] ont ainsi établi que le problème de Cauchy pour l'équation des Schrödinger maps est bien posé localement pour des solutions  $\mathbf{m}$  dont le gradient  $\nabla \mathbf{m}$  appartient à l'espace de Sobolev  $H^k(\mathbb{R}^N)$  pour un entier  $k > 1 + N/2$ . Ce résultat s'étend à l'équation de Landau-Lifshitz de la façon suivante.

**Théorème** ([51]). *Soit  $\mathbf{m}^0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ . Il existe un nombre strictement positif  $T$  et une unique solution  $\mathbf{m} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{E}(\mathbb{R}^N))$  de (LL) pour la donnée initiale  $\mathbf{m}^0$ , tels que*

$$\partial_t \mathbf{m} \in L^\infty([0, T], H^{k-1}(\mathbb{R}^N)), \quad \text{et} \quad (m_3, \nabla \mathbf{m}) \in L^\infty([0, T], H^k(\mathbb{R}^N))^2.$$

Au contraire du résultat précédent, cet énoncé garantit l'existence et l'unicité d'un flot régulier pour l'équation de Landau-Lifshitz. Cependant, ce flot est local en temps, et demeure restreint à une classe de données initiales très régulières. Aussi se posent au moins deux questions. Est-il possible d'établir le caractère global des solutions régulières

ainsi construites? Et jusqu'à quelle niveau de régularité demeure-t-il possible d'établir l'existence d'un unique flot régulier pour l'équation?

En dimension quelconque, répondre à ces deux questions s'avère délicat. En ce qui concerne l'équation des Schrödinger maps, la réponse la plus satisfaisante consiste en la preuve par Bejenaru, Ionescu, Kenig et Tataru [3] de l'existence et l'unicité globale des solutions  $\mathbf{m}$  associées à des données initiales  $\mathbf{m}^0$  petites dans l'espace de Sobolev critique où le gradient  $\nabla\mathbf{m}^0$  appartient à  $H^{N/2-1}(\mathbb{R}^N)$ . Pour l'équation de Landau-Lifshitz, ce même problème reste, à notre connaissance, ouvert même s'il est permis d'imaginer que les techniques déployées dans [3] s'étendent, au moins en partie, à l'équation de Landau-Lifshitz.

Nous ne nous étendrons pas plus sur l'étude du problème de Cauchy pour l'équation de Landau-Lifshitz en dimension supérieure ou égale à deux. Dans la suite, notre objectif est d'analyser la stabilité des solitons sombres pour l'équation de Landau-Lifshitz, et nous nous restreignons donc désormais à la dimension un.

Dans ce cas, Chang, Shatah et Ulhénbeck [12] ont établi l'équivalence, au moins formelle, entre l'équation des Schrödinger maps et l'équation de Schrödinger cubique

$$i\partial_t\Psi + \partial_{xx}\Psi + 2|\Psi|^2\Psi = 0.$$

La fonction complexe  $\Psi$  qui apparaît ici, est construite à partir des deux composantes du gradient  $\nabla\mathbf{m}$  d'une solution  $\mathbf{m}$  dans un repère bien choisi du plan tangent à la sphère en le vecteur  $\mathbf{m}$ . Dans la suite, nous utiliserons, à notre tour, cette transformation pour préciser l'étude du flot de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique. Nous renvoyons à cette analyse pour une définition plus précise de cette transformation.

Remarquons simplement que la fonction  $\Psi$  possède la même régularité que le gradient  $\nabla\mathbf{m}$ . L'équation de Schrödinger cubique est bien posée globalement pour des données initiales  $\Psi^0$  dans tous les espaces de Sobolev  $H^k(\mathbb{R})$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  (cf. e.g. [10, 38]). Dès lors que le passage de la fonction  $\mathbf{m}$  à l'application  $\Psi$ , et sa réciproque, peuvent se justifier rigoureusement, il s'avère donc possible de montrer l'existence et l'unicité globale des solutions  $\mathbf{m}$  de l'équation des Schrödinger maps pour des données initiales  $\mathbf{m}^0$  dont le gradient  $\nabla\mathbf{m}^0$  appartient à  $H^k(\mathbb{R})$ . Chang, Shatah et Ulhénbeck [12] (cf. également [47]) ont ainsi démontré que le problème de Cauchy pour l'équation des Schrödinger maps est bien posé globalement pour des solutions  $\mathbf{m}$  dont le gradient  $\nabla\mathbf{m}$  est dans l'espace  $H^1(\mathbb{R})$ . Dans le contexte de l'équation de Landau-Lifshitz, ce résultat se traduit de la façon suivante.

**Théorème** ([12, 47]). *Soit  $\mathbf{m}^0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ , avec  $\partial_x\mathbf{m}^0 \in H^1(\mathbb{R})$ . Il existe une unique solution globale  $\mathbf{m}$  de (LL) pour la donnée initiale  $\mathbf{m}^0$ , telle que*

$$\partial_t\mathbf{m} \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R})), \quad \text{et} \quad (m_3, \partial_x\mathbf{m}) \in L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}))^2,$$

*pour tout nombre strictement positif  $T$ .*

Les problèmes de Cauchy pour l'équation des Schrödinger maps, comme pour celle de Landau-Lifshitz, sont donc bien posés globalement pour des données initiales  $\mathbf{m}^0$  dans l'espace d'énergie, et dont le gradient appartient à un espace  $H^k(\mathbb{R})$  pour un entier  $k$  non nul. Nous n'avons pas trouvé trace écrite d'une preuve de ce résultat pour des données initiales quelconques dans l'espace d'énergie, même s'il est vraisemblable que les arguments introduits dans les travaux de Chang, Shatah et Ulhénbeck [12] puissent s'étendre à cette situation.

Dans la suite, nous démontrerons la stabilité des solitons sombres dans la formulation hydrodynamique de l'équation de Landau-Lifshitz. Dans ce cadre, il est possible d'établir existence et unicité des solutions dans l'espace d'énergie (cf. le Théorème 1 ci-dessous).

Soulignons ici le fait que l'existence d'un unique flot régulier pour la formulation hydrodynamique de l'équation induit celle d'un unique flot régulier pour la formulation originelle dès lors que ces deux formulations sont équivalentes, soit dès lors que la fonction  $\tilde{m}$  associée à une solution  $\mathbf{m}$  de l'équation de Landau-Lifshitz ne s'annule pas (cf. [16, Corollary 1]). En particulier, les fonctions  $\tilde{m}_c$  associées à des solitons sombres de vitesses  $c$  non nulles ne s'annulent pas, de sorte qu'il existe un unique flot régulier pour l'équation originelle dans tout voisinage dans l'espace d'énergie des solitons  $\mathbf{m}_c$ .

## 2.2 Dans la formulation hydrodynamique

Dans la formulation hydrodynamique, la structure de l'espace d'énergie est plus simple. En dimension un, l'énergie de Landau-Lifshitz s'écrit dans les variables hydrodynamiques  $\mathbf{v} := (v, w)$  sous la forme

$$E(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{(\partial_x v)^2}{1-v^2} + (1-v^2)w^2 + v^2 \right).$$

La quantité  $1-v^2$  qui apparaît dans cette formule est égale au carré du module de la fonction  $\tilde{m}$ . De par le théorème d'injection de Sobolev, cette quantité est contrôlée à la fois inférieurement et supérieurement lorsque la fonction  $\tilde{m}$  ne s'annule pas. Le couple de fonctions  $\mathbf{v} = (v, w)$  appartient à l'espace d'énergie si les fonctions  $v$  et  $w$  sont respectivement dans les espaces  $H^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$ . Autrement dit, l'espace d'énergie  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  se traduit dans la formulation hydrodynamique par l'espace de non-annulation  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$  défini suivant la formule

$$\mathcal{NA}(\mathbb{R}) := \{ \mathbf{v} = (v, w) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), \text{ t.q. } \max_{x \in \mathbb{R}} |v(x)| < 1 \}.$$

Cet espace est naturellement muni d'une structure métrique par la norme

$$\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|_{H^1 \times L^2} := \left( \|v_1 - v_2\|_{H^1}^2 + \|w_1 - w_2\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce cadre fonctionnel, le problème de Cauchy pour l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique est bien posé localement.

**Théorème 1** ([16]). *Soit  $\mathbf{v}^0 = (v^0, w^0) \in \mathcal{NA}(\mathbb{R})$ .*

(i) *Il existe un nombre  $T_{\max}$  strictement positif, ou égal à  $+\infty$ , et une unique solution  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^0([0, T_{\max}[, \mathcal{NA}(\mathbb{R}))$  de (HLL) pour la donnée initiale  $\mathbf{v}^0$  telle qu'il existe des solutions régulières  $\mathbf{v}_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$  de (HLL), qui satisfont*

$$\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v} \text{ dans } \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{NA}(\mathbb{R})),$$

*lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout nombre  $0 < T < T_{\max}$ .*

(ii) *Le temps maximal  $T_{\max}$  est caractérisé par la condition*

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \max_{x \in \mathbb{R}} |v(x, t)| = 1, \text{ si } T_{\max} < +\infty.$$

(iii) *Le flot dépend de manière continue de la donnée initiale dans  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$ .*

(iv) *L'énergie de Landau-Lifshitz  $E$  et le moment scalaire  $p$  défini par l'expression*

$$p(\mathbf{v}) := \int_{\mathbb{R}} vw,$$

*sont conservés par le flot.*

Autrement dit, il existe un unique flot régulier local pour l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique dans l'espace de non-annulation  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$ . L'énergie  $E$  et le moment scalaire  $p$  sont de plus conservés le long de ce flot, ce qui joue un rôle crucial dans la preuve de la stabilité des solitons sombres.

Ce flot n'est vraisemblablement pas global. La fonction  $v$  associée à une solution  $\mathbf{v}$  peut sans doute atteindre les valeurs  $\pm 1$  en temps fini. La caractérisation du temps maximal d'existence  $T_{\max}$  comme le premier temps où cette valeur est atteinte montre qu'il n'y a aucun autre obstacle à l'existence globale des solutions. Cette propriété trouve son origine dans la conservation de l'énergie qui implique le caractère global des solutions de l'équation de Landau-Lifshitz originelle.

Le caractère local du flot peut sembler un obstacle à l'analyse de la stabilité des solitons sombres. Il n'existe pas en effet à proprement parler de dynamique en temps long pour l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique. Cet obstacle n'est cependant pas difficile à surmonter. Dès lors que les solitons sont stables, leur stabilité permet de montrer par des arguments de continuation le caractère global du flot dans le voisinage des solitons. Il en va de même pour des sommes bien préparées de solitons comme nous le constaterons dans la suite.

La construction et l'unicité du flot précédent repose sur sa régularité, à savoir sur sa dépendance continue vis-à-vis des données initiales. Les solutions  $\mathbf{m}$  s'obtiennent comme limites de solutions régulières une fois prouvées l'existence de ces dernières et leur continuité vis-à-vis de leur donnée initiale. Soulignons ici que le Théorème 1 ne garantit en rien l'unicité d'une solution  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^0([0, T_{\max}[, \mathcal{NA}(\mathbb{R}))$  pour une donnée initiale  $\mathbf{v}^0$  donnée, mais uniquement l'unicité d'une solution qui s'obtient comme limite de solutions régulières. À notre connaissance, l'unicité des solutions de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique dans l'espace de non-annulation demeure un problème ouvert.

La construction de solutions régulières de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique découle de l'existence de solutions régulières de l'équation originelle. La seule obstruction réside dans la possibilité que la fonction  $v$  atteigne les valeurs  $\pm 1$  en temps fini. En s'appuyant, par exemple, sur les résultats de Sulem, Sulem et Bardos [51], il est possible d'établir le lemme suivant.

**Lemme 2** ([16]). *Soit  $k \geq 4$  et*

$$\mathcal{NA}^k(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{v} = (v, w) \in H^{k+1}(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R}), \text{ t.q. } \max_{x \in \mathbb{R}} |v(x)| < 1 \right\}.$$

*Pour tout couple  $\mathbf{v}^0 \in \mathcal{NA}^k(\mathbb{R})$ , il existe un nombre  $T_{\max}$  strictement positif, ou égal à  $+\infty$ , et une unique solution  $\mathbf{v} \in L^\infty([0, T_{\max}[, \mathcal{NA}^k(\mathbb{R}))$  de (HLL) pour la donnée initiale  $\mathbf{v}^0$ . Le temps maximal  $T_{\max}$  est caractérisé par la condition*

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \max_{x \in \mathbb{R}} |v(x, t)| = 1, \text{ si } T_{\max} < +\infty.$$

La condition technique sur l'entier  $k$ , qui apparaît dans cet énoncé, n'est certainement pas optimale, mais ceci n'est pas un véritable problème puisqu'en fine, cet énoncé sera valable pour  $k = 0$ .

Une fois les solutions régulières construites, il s'agit de montrer leur continuité vis-à-vis de leur donnée initiale pour la topologie induite sur l'espace  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$  par la norme  $\|\cdot\|_{H^1 \times L^2}$ . La preuve de cette continuité repose sur une transformation de l'équation hydrodynamique en une équation de type Schrödinger cubique dans l'esprit de la méthode introduite par Chang, Shatah et Uhlenbeck [12] pour l'équation des Schrödinger maps.

Étant donnée une solution régulière  $\mathbf{v} = (v, w)$  de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique, nous introduisons la fonction complexe

$$\Psi := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_x v}{\sqrt{1-v^2}} + i \sqrt{1-v^2} w \right) \exp i\theta,$$

où la phase  $\theta$  est définie par la formule

$$\theta(x, t) = - \int_{-\infty}^x v(y, t) w(y, t) dy.$$

Rappelons ici que le gradient  $\nabla \check{m}$  de la fonction  $\check{m} = \sqrt{1-v^2} \exp i\varphi$  associée au couple  $\mathbf{v}$  s'écrit sous la forme

$$\nabla \check{m} := \left( - \frac{v \partial_x v}{\sqrt{1-v^2}} + i \sqrt{1-v^2} w \right) \exp i\varphi,$$

où la phase  $\varphi$  est cette fois donnée par l'expression

$$\varphi(x, t) = \int_0^x w(y, t) dy.$$

La fonction  $\Psi$  s'interprète donc comme une réécriture du gradient  $\nabla \mathbf{m}$  de la solution  $\mathbf{m}$  de l'équation originelle. Cette réécriture est plus favorable au sens où les non-linéarités de l'équation de type Schrödinger que la fonction  $\Psi$  satisfait ne comporte plus de dérivées comme lorsque la projection stéréographique est utilisée.

La fonction  $\Psi$  est en effet solution de l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i \partial_t \Psi + \partial_{xx} \Psi + 2|\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2} v^2 \Psi - \operatorname{Re} (\Psi(1 - 2F(v, \bar{\Psi}))) (1 - 2F(v, \Psi)) = 0. \quad (1)$$

Dans cette équation, la fonction  $F(v, \Psi)$  est définie suivant la formule

$$F(v, \Psi)(x, t) = \int_{-\infty}^x v(y, t) \Psi(y, t) dy.$$

Les termes en supplément par rapport à l'équation de Schrödinger cubique obtenue après transformation de l'équation des Schrödinger maps proviennent du terme anisotrope  $-\mathbf{m} \wedge (m_3 \mathbf{e}_3)$  de l'équation de Landau-Lifshitz. Ce sont des termes sous-critiques qui n'engendrent aucune difficulté quant à la résolution de l'équation, une fois la fonction  $v$  convenablement contrôlée.

Cette dernière fonction satisfait le système d'équations couplées

$$\begin{cases} \partial_t v = 2 \partial_x \operatorname{Im} (\Psi(2F(v, \bar{\Psi}) - 1)), \\ \partial_x v = 2 \operatorname{Re} (\Psi(1 - 2F(v, \bar{\Psi}))). \end{cases} \quad (2)$$

Des méthodes d'énergie élémentaires suffisent à contrôler ce système.

En ce qui concerne l'équation (1), il est nécessaire de faire appel aux estimations de Strichartz comme pour l'équation de Schrödinger cubique. Rappelons qu'en dimension un, ces estimations prennent la forme

$$\| e^{it\partial_{xx}} f \|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}))} \leq K \| f \|_{L^2},$$

pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , et tout couple admissible  $(p, q) \in [2, +\infty]^2$ , c'est-à-dire tel que  $2/p + 1/q = 1/2$  (cf. e.g. [10, 38]). Notons en particulier que l'espace limite quant à l'intégrabilité en temps est l'espace  $L^4(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}))$ .

En combinant ces différents arguments, nous arrivons au contrôle suivant de la dépendance vis-à-vis des données initiales des solutions  $\Psi$  et  $v$  du système couplé (1)-(2).

**Lemme 3** ([16]). *Considérons deux solutions régulières  $(v_1, \Psi_1)$  et  $(v_2, \Psi_2)$  du système (1)-(2) pour des données initiales  $(v_1^0, \Psi_1^0)$ , respectivement  $(v_2^0, \Psi_2^0)$ . Il existe un nombre strictement positif  $T^0$ , qui ne dépend que des normes  $\|v_j^0\|_{L^2}$  et  $\|\Psi_j^0\|_{L^2}$ , et une constante universelle  $K$ , tels que*

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{C}^0([0,T],L^2(\mathbb{R}))} + \|\Psi_1 - \Psi_2\|_{\mathcal{C}^0([0,T],L^2(\mathbb{R}))} + \|\Psi_1 - \Psi_2\|_{L^4([0,T],L^\infty(\mathbb{R}))} \\ \leq K \left( \|v_1^0 - v_2^0\|_{L^2} + \|\Psi_1^0 - \Psi_2^0\|_{L^2} \right), \end{aligned}$$

pour tout  $T \in [0, T^0]$ .

Afin de conclure la preuve du Théorème 1, il ne reste qu'à exprimer les conclusions de ce lemme pour le couple hydrodynamique  $\mathbf{v} = (v, w)$ . Étant donnée une suite de données initiales régulières  $(\mathbf{v}_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$  qui convergent vers une donnée initiale fixée  $\mathbf{v}^0$  dans  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$ , ceci permet d'établir la convergence de la suite des solutions régulières correspondantes  $\mathbf{v}_n$  vers une fonction  $\mathbf{v}$  dans l'espace  $\mathcal{C}^0([0, \tau], \mathcal{NA}(\mathbb{R}))$  pour un nombre strictement positif  $\tau$ , puis de vérifier que cette fonction est l'unique solution de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique pour la donnée initiale  $\mathbf{v}^0$ , qui s'obtient comme limite de solutions régulières. La continuité du flot par rapport à la donnée initiale, ainsi que la conservation de l'énergie  $E$  et du moment scalaire  $p$ , découle toutes deux de cette propriété d'unicité. Ceci conclut la résolution du problème de Cauchy pour la forme hydrodynamique de l'équation de Landau-Lifshitz dans le cadre hamiltonien. Il est désormais possible de s'intéresser à la stabilité des solitons sombres.

### 3 Stabilité des solitons

La notion usuelle de stabilité n'est pas adaptée à une famille de solitons telle que la famille des solitons sombres  $\mathbf{m}_c$ . Cette notion postule qu'une perturbation à l'instant initial d'une solution particulière d'un système dynamique demeure une perturbation de cette même solution lors de toute évolution ultérieure de ce système. Dans le cas des solitons sombres  $\mathbf{m}_c$  dont l'expression est continue par rapport à leur vitesse  $c$ , se pose le problème de choisir comme perturbation du soliton  $\mathbf{m}_c$  à l'instant initial un soliton  $\mathbf{m}_\sigma$  de vitesse  $\sigma$  certes proche, mais néanmoins différente. Si la masse de ces deux solitons est initialement concentrée à l'origine, la masse du premier se trouvera autour de la position  $ct$  à l'instant  $t$ , tandis que la masse du second sera aux environs de la position  $\sigma t$ . En particulier, ce second soliton ne sera plus une perturbation du premier. En définitive, la notion classique de stabilité n'est certes pas appropriée pour les solitons sombres  $\mathbf{m}_c$ , mais il n'en demeure pas moins que, dans le contre-exemple précédent au moins, la perturbation considérée reste un soliton pour tout temps.

Cet obstacle a conduit à l'émergence de la notion de stabilité orbitale. Il s'agit désormais d'établir qu'une perturbation à l'instant initial d'un soliton  $\mathbf{m}_c$  demeure non pas une perturbation de ce même soliton, mais de l'orbite engendrée par les invariants géométriques de l'équation à partir de ce soliton. Invariants dont font partie toutes les translations, ce qui résout le problème précédent. Nous prouverons dans la suite que tous les solitons  $\mathbf{m}_c$  de vitesse  $c$  non nulle, et même toutes les sommes finies (bien préparées) de ces solitons, sont orbitalement stables (cf. le Théorème 2 et les Corollaires 1, 2 and 3).

La notion de stabilité asymptotique est plus forte. Il s'agit d'établir que la solution associée à une perturbation d'un soliton à l'instant initial converge en temps long vers un soliton, toujours aux invariances géométriques près. Barhi [2] a récemment prouvé la stabilité asymptotique des solitons  $\mathbf{m}_c$  de vitesse  $c$  non nulle. Nous reviendrons sur la nature

exacte de la convergence ainsi établie dans la suite de cette dernière partie, mais commençons par énoncer les propriétés de stabilité orbitale des solitons sombres de l'équation de Landau-Lifshitz.

### 3.1 Stabilité orbitale (des trains de) solitons

Un train de solitons est défini comme une perturbation d'une somme de solitons. Il est facile de définir proprement une telle somme dans la formulation hydrodynamique.

Rappelons que, dans cette formulation, les invariances géométriques de l'équation de Landau-Lifshitz sont les translations et la symétrie centrale  $(v, w) \mapsto (-v, -w)$ . En particulier, la famille des solitons hydrodynamiques de vitesse  $c$  est décrite par l'expression

$$\mathbf{v}_{c,a,s}(x) := (s v_c(x-a), s w_c(x-a)),$$

où  $a$  est un nombre réel quelconque, et  $s$  est égal à  $\{\pm 1\}$ . Une somme finie de solitons est alors donnée par la formule

$$S_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}} := (V_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}, W_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}) := \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{c_j, a_j, s_j},$$

où  $N$  est un entier non nul. Dans cette formule, les notations  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in ]-1, 1[^N$  et  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$  désignent les vitesses et les positions de chacun des solitons, tandis que les nombres  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N) \in \{\pm 1\}^N$  prennent en compte l'invariance par symétrie centrale de l'équation. Les vitesses  $c_j$  sont toutes non nulles afin que le soliton hydrodynamique  $\mathbf{v}_{c_j}$  soit bien défini.

Les sommes  $S_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}$  sont bien définies dans l'espace  $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ , mais ne demeurent pas nécessairement dans l'espace de non-annulation  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$ . Il se peut en effet que la fonction  $V_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}$  prenne des valeurs en dehors de l'intervalle  $]1, 1[$ . En raison du théorème d'injection de Sobolev, il n'est alors pas possible de définir un voisinage de ces sommes dans l'espace  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$ , et par suite, d'analyser leur stabilité le long du flot de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique.

Ceci n'est plus une difficulté dès lors que les positions  $a_j$  sont suffisamment séparées. La décroissance exponentielle des solitons  $\mathbf{v}_c$  garantit alors que la somme  $S_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}$  demeure dans l'espace de non-annulation  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$ . Dans ce cas, il devient de plus possible de définir proprement une somme de solitons dans les variables originelles. Il suffit de la définir comme la fonction

$$\mathcal{S}_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}} := \left( (1 - V_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\Phi_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}), (1 - V_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\Phi_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}), V_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}} \right),$$

où la phase  $\Phi_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}$  est donnée par l'expression

$$\Phi_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}(x) := \int_0^x W_{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{s}}(y) dy.$$

Il est bien sûr permis d'ajouter une constante à cette phase, ce qui rend compte de l'invariance par rotation autour de l'axe  $x_3$  de l'équation de Landau-Lifshitz.

Notons néanmoins que l'invariance par ces rotations de chacun des solitons dans cette somme n'est pas prise en compte. De manière plus générale, il est délicat de définir proprement une somme de solitons dans les variables originelles dès lors que cette somme doit demeurer à valeurs dans la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Passer par la formulation hydrodynamique est un moyen simple de contourner cette difficulté.

Une somme  $S_{c,a,s}$ , ou  $\mathcal{S}_{c,a,s}$ , de solitons est bien préparée lorsque les vitesses sont ordonnées suivant les positions, soit lorsque

$$c_1 < \cdots < c_N,$$

quand

$$a_1 < \cdots < a_N.$$

Dans ce cas, les solitons ont tendance à se séparer de plus en plus en temps positif. Comme leurs décroissances à l'infini sont exponentielles, les interactions entre les différents solitons de la somme sont de plus en plus faibles au cours de l'évolution. Il est alors permis d'espérer que la stabilité de chacun des solitons de la somme suffit à établir la stabilité de la somme.

Le théorème suivant repose sur ce principe. Dans la formulation hydrodynamique, il garantit la stabilité orbitale d'un soliton dans le cas particulier où la somme se réduit à un unique soliton. Il déduit ensuite de cette stabilité la stabilité orbitale d'une somme bien préparée.

**Théorème 2** ([16]). *Soit  $s^0 \in \{\pm 1\}^N$  et  $c^0 \in ]-1, 1[^N$  tels que*

$$c_1^0 < \cdots < 0 < \cdots < c_N^0.$$

*Il existe quatre nombres strictement positifs  $\alpha^*$ ,  $\nu^*$ ,  $A^*$  et  $L^*$ , tels que, si une donnée initiale  $\mathbf{v}^0 \in \mathcal{NA}(\mathbb{R})$  satisfait l'inégalité*

$$\|\mathbf{v}^0 - S_{c^0, a^0, s^0}\|_{H^1 \times L^2} = \alpha^0 < \alpha^*,$$

*pour des positions  $a^0 \in \mathbb{R}^N$  telles que*

$$\min \{a_{k+1}^0 - a_k^0, 1 \leq k \leq N-1\} = L^0 > L^*,$$

*alors il existe une unique solution  $\mathbf{v} \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{NA}(\mathbb{R}))$  de (HLL) pour la donnée initiale  $\mathbf{v}^0$ , ainsi que  $N$  fonctions  $a_k \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , avec  $a_k(0) = a_k^0$ , telles que*

$$|a'_k(t) - c_k^0| \leq A^*(\alpha^0 + e^{-\nu^* L^0}),$$

*et*

$$\|\mathbf{v}(\cdot, t) - S_{c^0, a(t), s^0}\|_{H^1 \times L^2} \leq A^*(\alpha^0 + e^{-\nu^* L^0}),$$

*pour tout nombre positif  $t$ .*

Dans le cas particulier où la somme se réduit à un unique soliton, le résultat de stabilité orbitale est valable pour les temps négatifs comme pour les temps positifs. Cette affirmation résulte de la réversibilité de l'équation de Landau-Lifshitz. Elle se traduit par le résultat suivant.

**Corollaire 1** ([16]). *Soit  $s^0 \in \{\pm 1\}$  et  $c^0 \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ . Il existe deux nombres strictement positifs  $\alpha^*$  et  $A^*$  tels que, si une donnée initiale  $\mathbf{v}^0 \in \mathcal{NA}(\mathbb{R})$  satisfait l'inégalité*

$$\alpha^0 := \|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}_{c^0, a^0, s^0}\|_{H^1 \times L^2} \leq \alpha^*,$$

*pour une position  $a^0 \in \mathbb{R}$ , alors la solution  $\mathbf{v} \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{NA}(\mathbb{R}))$  de (HLL) pour la donnée initiale  $\mathbf{v}^0$  est définie globalement sur  $\mathbb{R}$ , et il existe une fonction  $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , avec  $a(0) = a^0$ , telle que*

$$|a'(t) - c^0| \leq A^* \alpha^0,$$

*et*

$$\|\mathbf{v}(\cdot, t) - \mathbf{v}_{c^0, a(t), s^0}\|_{H^1 \times L^2} \leq A^* \alpha^0,$$

*pour tout nombre réel  $t$ .*



L'étude de la stabilité orbitale des sommes de solitons pour des temps à la fois positifs et négatifs est plus délicate. Elle requiert de décrire les interactions entre tous les solitons de la somme. Lorsque la somme est bien préparée, ces interactions se limitent aux queues exponentiellement petites de chacun des solitons. Ceci n'ajoute qu'un terme supplémentaire aux estimations de stabilité orbitale, lequel dépend de manière exponentielle de la distance initiale entre les solitons (cf. le Théorème 2 dans lequel apparaît ce terme au contraire de l'énoncé du Corollaire 1).

Dans le cas où la somme n'est plus préparée, les solitons peuvent se croiser. Ces interactions sont bien comprises pour des équations intégrables telles que l'équation de Landau-Lifshitz. Cette équation possède des multi-solitons (cf. e.g. [9, Section 10] pour leur formule explicite). Ce sont des solutions exactes de l'équation, au contraire des sommes de solitons, qui se comportent comme une superposition non linéaire de solitons. L'évolution de ces multi-solitons est décrite de manière rigoureuse par la méthode du scattering inverse. En temps long, ces multi-solitons se comportent comme une somme bien préparée de solitons, et ce que ce soit pour les temps positifs ou négatifs (cf. e.g. [9, Section 10]).

Notons que la stabilité orbitale d'un multi-soliton arbitraire découle du Théorème 2 à partir du moment où ce multi-soliton peut s'écrire dans la formulation hydrodynamique pour tout temps. La continuité du flot de l'équation hydrodynamique par rapport aux données initiales impose le fait qu'une perturbation d'un multi-soliton à l'instant initial deviendra une perturbation d'une somme bien préparée de solitons pour des temps assez grands, et restera ensuite par le Théorème 2 un train bien préparée de solitons, c'est-à-dire la perturbation d'un multi-soliton. Reste néanmoins à établir la possibilité d'utiliser la formulation hydrodynamique pour tout temps.

Une alternative pourrait consister à revenir aux variables originelles. Il serait toutefois nécessaire d'établir la continuité du flot de l'équation de Landau-Lifshitz par rapport aux données initiales dans l'espace d'énergie  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ , ce qui reste, à notre connaissance, ouvert.

Notons néanmoins la traduction suivante du Théorème 2 dans les variables originelles.

**Corollaire 2.** Soit  $\mathfrak{s}^0 \in \{\pm 1\}^N$  et  $\mathfrak{c}^0 \in ]-1, 1[^N$  tels que

$$c_1^0 < \dots < 0 < \dots < c_N^0.$$

Quel que soit le nombre strictement positif  $\epsilon^*$ , il existe des nombres strictement positifs  $\rho^*$  et  $L^*$ , tels que, si une donnée initiale  $\mathbf{m}^0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  satisfait l'inégalité

$$d_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}^0, \mathbf{S}_{\epsilon^0, \mathfrak{a}^0, \mathfrak{s}^0}) < \rho^*,$$

pour des positions  $\mathfrak{a}^0 \in \mathbb{R}^N$  telles que

$$\min \{a_{k+1}^0 - a_k^0, 1 \leq k \leq N-1\} > L^*,$$

alors il existe une unique solution  $\mathbf{m} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{E}(\mathbb{R}))$  de (LL) pour la donnée initiale  $\mathbf{m}^0$ , ainsi que  $N$  fonctions  $a_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , avec  $a_k(0) = a_k^0$ , telles que

$$\sum_{k=1}^N |a'_k(t) - c_k^0| < \epsilon^*,$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \inf_{\theta_k \in \mathbb{R}} \left\{ |\tilde{m}(a_k(t), t) - \tilde{m}_{c_k^0, a_k(t), \theta_k, s_k^0}(a_k(t))| \right. \\ & \left. + \|\partial_x \mathbf{m} - \partial_x \mathbf{m}_{c_k^0, a_k(t), \theta_k, s_k^0}\|_{L^2(I_k)} + \|\mathbf{m}_3 - [\mathbf{m}_{c_k^0, a_k(t), \theta_k, s_k^0}]_3\|_{L^2(I_k)} \right\} < \epsilon^*, \end{aligned}$$

pour tout nombre positif  $t$ . Dans cette formule, les intervalles  $I_k$  sont définis par

$$I_1 := \left] -\infty, \frac{a_1 + a_2}{2} \right], \quad I_k := \left[ \frac{a_{k-1} + a_k}{2}, \frac{a_k + a_{k+1}}{2} \right], \quad \text{et} \quad I_N := \left[ \frac{a_{N-1} + a_N}{2}, +\infty \right[ ,$$

pour tout entier  $2 \leq k \leq N - 1$ .

Ce corollaire garantit qu'une perturbation d'une somme bien préparée de solitons  $\mathbf{S}_{c,a,s}$  à l'instant initial demeure une perturbation de la somme de  $N$  solitons pour tout temps positif. Cette somme de solitons n'est néanmoins pas nécessairement de la forme  $\mathbf{S}_{c,a,s}$ . Ceci provient de la construction de cette dernière somme de solitons.

Lorsqu'il s'agit de construire une fonction  $\mathbf{m}$  qui correspond à un couple hydrodynamique  $\mathbf{v}$ , la principale difficulté réside dans la construction de la phase de la fonction  $\tilde{m}$ , laquelle ne peut se faire qu'à une constante arbitraire près. Dans la construction des sommes de la forme  $\mathbf{S}_{c,a,s}$ , cette constante est globalement contrôlée. Au contraire, les estimations de stabilité orbitale du Corollaire 2 ne préviennent pas un possible décalage de la phase autour de chacun des solitons dans la somme. Ceci explique qu'une perturbation d'une somme bien préparée de solitons  $\mathbf{S}_{c,a,s}$  à l'instant initial ne demeure qu'une perturbation d'une somme de  $N$  solitons en temps long.

A priori, la dépendance de la fonction  $\mathbf{m}$  en le couple hydrodynamique  $\mathbf{v}$  n'est de plus pas localement lipschitzienne. Au contraire de ce qu'il advient dans le Théorème 2, il s'avère par conséquent difficile de décrire comment le nombre  $\epsilon^*$  dépend des nombres  $\rho^*$  et  $L^*$ .

Pour conclure avec la formulation originelle, notons que la réversibilité de l'équation de Landau-Lifshitz permet de déduire du Corollaire 2 la stabilité orbitale d'un unique soliton que ce soit pour des temps positifs ou négatifs.

**Corollaire 3** ([16]). *Soit  $s^0 \in \{\pm 1\}$  et  $c^0 \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ . Étant donné un nombre strictement positif  $\epsilon^*$ , il existe un nombre strictement positif  $\rho^*$  tel que, si  $\mathbf{m}^0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  satisfait la condition*

$$d_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}^0, \mathbf{m}_{c^0, a^0, \theta^0, s^0}) < \rho^*,$$

pour des nombres  $(a^0, \theta^0) \in \mathbb{R}^2$ , alors il existe une unique solution  $\mathbf{m} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{E}(\mathbb{R}))$  de (LL) pour la donnée initiale  $\mathbf{m}^0$ , et une fonction  $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , avec  $a(0) = a^0$ , telles que

$$|a'(t) - c^*| < \epsilon^*,$$

et

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ |\tilde{m}(a(t), t) - \tilde{m}_{c^0, a(t), \theta, s^0}(a(t))| \right. \\ \left. + \|\partial_x \mathbf{m}(\cdot, t) - \partial_x \mathbf{m}_{c^0, a(t), \theta, s^0}\|_{L^2} + \|m_3(\cdot, t) - [m_{c^0, a(t), \theta, s^0}]_3\|_{L^2} \right\} < \epsilon^*,$$

pour tout nombre réel  $t$ .

Avant de donner quelques éléments de la preuve de ces résultats de stabilité orbitale, notons pour terminer que le problème de la stabilité orbitale du soliton noir  $\mathbf{m}_0$  reste, à notre connaissance, ouvert. Il en va de même pour la stabilité orbitale de sommes de solitons qui contiennent le soliton noir. Dans le contexte de l'équation de Gross-Pitaevskii, la stabilité orbitale du soliton noir est démontrée par des méthodes indépendantes dans [6] et [22].

La preuve de la stabilité orbitale d'un soliton est classique. Elle repose sur sa nature minimisante. Les solitons hydrodynamiques  $\mathbf{v}_c$  sont solutions du problème de minimisation sous contrainte

$$E(\mathbf{v}_c) = E_{\min}(\mathbf{p}_c) := \inf \left\{ E(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{NA}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } p(\mathbf{v}) = \mathbf{p}_c := p(\mathbf{v}_c) \right\}.$$

Dans cette formule, la vitesse  $c$  est reliée au moment  $\mathfrak{p}_c$  par l'identité

$$\mathfrak{p}_c = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-c}}{c}\right). \quad (3)$$

L'énergie minimisante vaut, quant à elle,

$$E_{\min}(\mathfrak{p}_c) = 2\sqrt{1-c^2}.$$

La vitesse  $c$  s'exprime aussi comme la dérivée de l'énergie minimisante  $E_{\min}$  suivant la formule

$$c = E'_{\min}(\mathfrak{p}_c).$$

Dans cette situation, deux approches sont possibles pour établir la stabilité orbitale du soliton.

La première approche est variationnelle [11]. Par l'absurde, si une perturbation d'un soliton à l'instant initial ne demeure pas une perturbation de la famille des solitons de même vitesse pour tout temps, alors, il existe une suite minimisante du problème de minimisation précédent, dont aucune sous-suite ne converge vers un minimiseur de ce problème. Ceci est impossible si les suites minimisantes pour ce problème sont compactes, ce qui est le cas ici.

L'approche alternative est essentiellement spectrale [52, 25]. La différentielle seconde  $[E'' - cp''](\mathbf{v}_c)$  de la fonctionnelle  $E - cp$  est coercive, aux invariances géométriques près. Ceci signifie qu'elle contrôle la différence avec un soliton sous des hypothèses d'orthogonalité qui permettent d'éliminer les invariances géométriques. Ces hypothèses d'orthogonalité sont garanties par l'introduction de paramètres de modulation, qui sont des paramètres de position et de vitesse dans le cas des solitons hydrodynamiques  $\mathbf{v}_c$ . Comme la fonctionnelle  $E - cp$  est conservée le long du flot, une perturbation à l'instant initial du soliton  $\mathbf{v}_c$  demeure une perturbation de ce soliton, aux invariances géométriques près.

Cette approche est plus précise puisqu'elle fournit un contrôle sur l'évolution des paramètres de modulation, ici sur l'évolution de la position du soliton  $\mathbf{v}_c$ . C'est la raison pour laquelle nous nous sommes appuyés sur cette seconde approche pour établir les résultats précédents.

La preuve de la stabilité orbitale d'une somme bien préparée de solitons est plus délicate. Elle repose sur des arguments introduits dans des travaux de Martel, Merle et Tsai [45, 46] au sujet de la stabilité orbitale des sommes de solitons des équations de Korteweg-de Vries et de Schrödinger semi-linéaires, puis étendus aux solitons de l'équation de Gross-Pitaevskii dans [7]. Ces arguments combinent la stabilité orbitale de chacun des solitons de la somme avec une formule de monotonie sur l'une des quantités invariantes de l'équation considérée.

Pour simplifier, considérons une perturbation initiale de deux solitons  $\mathbf{v}_1 := \mathbf{v}_{c_1, a_1, s_1}$  et  $\mathbf{v}_2 := \mathbf{v}_{c_2, a_2, s_2}$  bien préparés, et supposons que la distance  $L := a_2 - a_1 > 0$  est suffisante pour négliger toute interaction entre ces deux solitons. Par continuité du flot par rapport à la donnée initiale, nous pouvons supposer que, pour des temps assez petits, la solution correspondant à cette perturbation se comporte comme la somme de deux fonctions  $B_1$  et  $B_2$  localisées loin l'une de l'autre, et ordonnées comme les solitons  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . Notre objectif est alors d'établir que  $B_1$  et  $B_2$  restent des solitons de vitesse  $c_1$  et  $c_2$ . La stabilité orbitale de la somme en découlera par des arguments standards de continuation.

Introduisons la différence de moment scalaire entre la fonction  $B_2$  et le soliton  $\mathbf{v}_2$

$$\delta p := p(B_2) - p(\mathbf{v}_2).$$

Pour des temps assez petits, cette quantité est petite, de sorte que le caractère minimisant des solitons fournit l'inégalité

$$E(B_2) \geq E_{\min}(p(\mathbf{v}_2) + \delta p) \approx E(\mathbf{v}_2) + c_2 \delta p.$$

La conservation du moment scalaire induit par ailleurs l'égalité

$$p(B_1) \approx p(\mathbf{v}_1) + p(\mathbf{v}_2) - p(B_2) = p(\mathbf{v}_1) - \delta p.$$

Invoquer une seconde fois le caractère minimisant des solitons suffit à obtenir l'inégalité

$$E(B_1) \gtrsim E_{\min}(p(\mathbf{v}_1) - \delta p) \approx E(\mathbf{v}_1) - c_1 \delta p.$$

Ne reste plus qu'à en appeler à la conservation de l'énergie pour établir que

$$(c_2 - c_1)\delta p \lesssim 0.$$

Comme les solitons  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont bien ordonnés, la différence  $\delta p$  est essentiellement négative.

Nous allons maintenant montrer que cette différence est en fait essentiellement positive. Il en résultera qu'elle est essentiellement nulle. Les fonctions  $B_1$  et  $B_2$  seront alors des minimiseurs de l'énergie  $E$  à moment scalaire fixé, de sorte que ce seront bien des solitons. Par des arguments de continuation, et en fournissant un contrôle ad hoc des termes d'interaction exponentiellement petits que nous avons négligés jusqu'ici, nous obtiendrons la stabilité orbitale de cette somme de deux solitons. La preuve sera similaire pour une somme finie de solitons.

Afin de conclure, il reste donc à démontrer que la différence  $\delta p$  est essentiellement positive. Ceci résulte d'une formule de monotonie sur le moment scalaire  $p$ , dont nous allons maintenant tâcher d'expliquer l'origine. Notons  $R = (a_1 + a_2)/2$ , le milieu entre les positions initiales des deux solitons  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . Pour des temps assez petits, les fonctions  $B_1$  et  $B_2$  demeurent localisées loin de cette position  $R$ , de sorte que la différence  $\delta p$  s'interprète comme l'évolution du moment scalaire à la droite de la position  $R$ .

Que peut-il arriver à la droite de cette position ? Si nous croyons à la description formelle de la dynamique en temps long de l'équation qui est fournie par la méthode du scattering inverse, deux phénomènes peuvent se produire.

D'une part, des solitons peuvent entrer ou sortir de la zone à la droite de  $R$ . S'ils entrent, leur vitesse est positive. Par la formule (3), la quantité de moment scalaire apportée est positive. S'ils sortent au contraire de cette zone, leur vitesse, tout comme leur quantité de moment, sont négatives. Le moment apporté dans la zone à la droite de  $R$  reste donc positif.

D'autre part, un paquet d'ondes dispersifs peut de même entrer ou sortir de la zone. Notons  $k$ , son nombre d'ondes moyen. La vitesse du paquet d'ondes est égale à la vitesse de groupe pour l'équation, soit à la valeur

$$\mathbf{v}_g(k) = \pm \frac{2k^2 + 1}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

De plus, la linéarisation de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique autour de la solution constante nulle assure que les amplitudes  $v(k)$  et  $w(k)$  des deux composantes du paquet d'ondes  $\mathbf{v}(k)$  satisfont la relation

$$w(k) = \pm \sqrt{k^2 + 1} v(k),$$

de sorte que la densité de moment est égale à

$$p(k) = \pm \sqrt{k^2 + 1} v(k)^2.$$

Il s'ensuit qu'un paquet d'ondes qui entre dans la zone à la droite de  $R$  a une vitesse et un moment positif, tandis que la vitesse et le moment des paquets d'ondes qui sortent de cette zone sont négatifs. Dans les deux cas, le moment à la droite de  $R$  augmente au cours de l'évolution.

Solitons et dispersion se combinent donc pour accroître le moment à la droite de  $R$ . La différence  $\delta p$ , qui rend compte de cette évolution, est donc essentiellement positive.

Tout ceci reste bien sûr formel. La monotonie du moment peut néanmoins se justifier à l'aide de la loi de conservation scalaire pour cette quantité, qui prend la forme

$$\partial_t(vw) = -\frac{1}{2}\partial_x(v^2 + w^2(1 - 3v^2) + \frac{3 - v^2}{(1 - v^2)^2}(\partial_x v)^2) - \frac{1}{2}\partial_{xxx} \ln(1 - v^2).$$

Si  $\phi$  désigne une fonction de troncature de la forme

$$\phi_R(x) := \frac{1}{2}(1 + \tanh(x - R)),$$

alors, la dérivée temporelle de la quantité de moment définie par

$$p_R = \int_{\mathbb{R}} \phi_R v w,$$

satisfait une inégalité du type

$$p'_R(t) \geq -A \exp(-\nu R), \tag{4}$$

où  $A$  désigne une constante positive, et le coefficient  $\nu$  rend compte de la décroissance exponentielle des solitons. Cette quantité est donc bien positive, à des termes d'erreur exponentiellement petits près.

Ceci achève la preuve de la stabilité orbitale des sommes de solitons sombres pour l'équation de Landau-Lifshitz. Nous renvoyons à [16] pour les détails techniques de cette preuve.

### 3.2 Stabilité asymptotique des solitons

Étant donnée une perturbation à l'instant initial d'un soliton sombre, il s'agit désormais d'établir la convergence en temps long de la solution correspondante vers un soliton, lequel peut différer du soliton initial.

Soulignons qu'en général cette convergence ne peut avoir lieu dans l'espace d'énergie. À titre d'exemple, considérons une solution  $\mathbf{v}$  de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique pour une donnée initiale  $\mathbf{v}^0 \in \mathcal{N}\mathcal{A}(\mathbb{R})$ , qui converge en temps long vers un soliton hydrodynamique  $\mathbf{v}_c$  pour la norme  $\|\cdot\|_{H^1 \times L^2}$ . Par continuité de l'énergie et du moment par rapport à cette norme, ces deux quantités satisfont

$$E(\mathbf{v}(\cdot, t)) \rightarrow E(\mathbf{v}_c) \quad \text{et} \quad p(\mathbf{v}(\cdot, t)) \rightarrow p(\mathbf{v}_c),$$

lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Ces quantités sont conservées le long du flot de l'équation. Par conséquent, l'énergie et le moment de la donnée initiale  $\mathbf{v}^0$  sont exactement égaux à ceux du soliton  $\mathbf{v}_c$ .

La caractérisation variationnelle des solitons impose alors à cette donnée initiale d'être un soliton. Autrement dit, seules les solutions associées à des solitons peuvent converger en temps long vers un soliton dans l'espace d'énergie.

Afin d'établir la stabilité asymptotique des solitons, il s'agit donc d'affaiblir la notion de convergence. Bahri [2] s'est appuyé sur la notion classique de convergence faible dans l'espace  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$  pour démontrer la stabilité asymptotique des solitons hydrodynamiques de l'équation de Landau-Lifshitz.

**Théorème 3** ([2]). *Soit  $c \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ . Il existe un nombre  $\alpha^* > 0$  tel que, si le couple  $\mathbf{v}^0 \in \mathcal{NA}(\mathbb{R})$  satisfait l'inégalité*

$$\|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}_c\|_{H^1 \times L^2} < \alpha^*,$$

*alors, il existe une unique solution  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{NA}(\mathbb{R}))$  de (HLL) pour la donnée initiale  $\mathbf{v}^0$ , un nombre  $c^* \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$  et une fonction  $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tels que*

$$\mathbf{v}(\cdot + a(t), t) \rightharpoonup \mathbf{v}_{c^*} \quad \text{dans} \quad H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}),$$

*et*

$$a'(t) \rightarrow c^*,$$

*lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .*

Ce n'est pas le premier résultat de stabilité asymptotique qui repose sur la notion de convergence faible. Il en va de même pour la preuve de la stabilité asymptotique des solitons des équations de Korteweg-de Vries [41], de Benjamin-Bona-Mahony [17], de Benjamin-Ono [32], et de Gross-Pitaevskii [8, 24].

Cette convergence n'est sans doute pas optimale. Martel et Merle [42, 44, 43] ont démontré que la stabilité asymptotique des solitons de l'équation de Korteweg-de Vries demeure pour une notion de convergence forte dans l'espace d'énergie, qui est localisée en espace. Il est probable que la stabilité asymptotique des solitons hydrodynamiques de l'équation de Landau-Lifshitz reste valable dans un tel cadre, autrement dit pour des normes de la forme  $\|\cdot\|_{H^1([-R, R]) \times L^2([-R, R])}$ , où le nombre strictement positif  $R$  peut dépendre de manière affine du temps.

Le Théorème 3 garantit donc la convergence faible en temps long vers un soliton d'une solution associée à une perturbation initiale d'un soliton. Cette convergence n'a cependant lieu qu'aux invariances géométriques près, soit ici à translation près. Le paramètre de position  $a(t)$  rend compte de ces translations. Sa dérivée converge vers la vitesse du soliton limite. À la limite  $t \rightarrow +\infty$ , la solution se translate avec la même vitesse que le soliton limite, ce qui est des plus cohérent.

Bahri [2] a également obtenu la traduction suivante du Théorème 3 dans les variables originelles.

**Théorème 4** ([2]). *Soit  $c \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ . Il existe un nombre  $\delta^* > 0$  tel que, si la fonction  $\mathbf{m}^0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  satisfait l'inégalité*

$$d_{\mathcal{E}}(\mathbf{m}^0, \mathbf{m}_c) < \delta^*,$$

*alors, il existe un nombre  $c^* \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ , et deux fonctions  $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tels que la solution  $\mathbf{m}$  de (LL) pour la donnée initiale  $\mathbf{m}^0$  vérifie*

$$\partial_x \mathbf{m} - \mathbf{m}'_{c^*, a(t), \theta(t)} \rightharpoonup 0, \quad \text{et} \quad m_3 - [m_{c^*, a(t), \theta(t)}]_3 \rightharpoonup 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}),$$

quand  $t \rightarrow +\infty$ , tandis que les fonctions  $a$  et  $\theta$  satisfont

$$a'(t) \rightarrow c^*, \quad \text{et} \quad \theta'(t) \rightarrow 0,$$

lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Insistons sur le fait que cet énoncé consiste en une traduction littérale du Théorème 3 dans la formulation originelle de l'équation de Landau-Lifshitz. L'unique nouvelle difficulté tient à l'invariance par rotation autour de l'axe  $x_3$  de l'équation originelle. L'introduction de la phase  $\theta$  permet de circonvenir cette difficulté. À la limite  $t \rightarrow +\infty$ , la dérivée de cette phase converge vers 0, ce qui signifie que l'orientation de la solution dans le plan  $x_3 = 0$  reste asymptotiquement fixe.

De par le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov, la convergence faible dans l'espace d'énergie  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  telle qu'elle est définie dans le Théorème 4, présente l'avantage d'impliquer la convergence uniforme locale vers le soliton limite. Autrement dit, cette convergence garantit la possibilité d'observer l'émergence du soliton limite dans une expérience, ou une simulation numérique, qui reposerait sur l'équation de Landau-Lifshitz. D'un point de vue physique, cette dernière propriété semble minimale pour pouvoir parler de stabilité asymptotique. La notion de convergence faible dans l'espace d'énergie  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  est donc appropriée lorsqu'il s'agit d'établir la stabilité asymptotique des solitons.

La preuve des Théorèmes 3 et 4 repose sur une stratégie mise en place par Martel et Merle dans le cadre de l'équation de Korteweg-de Vries (cf. [41, 42, 40, 44, 43]). Cette stratégie se décompose en trois étapes principales que nous pouvons détailler, par exemple, dans le cadre hydrodynamique.

La stabilité orbitale des solitons sombres garantit d'abord qu'une solution  $\mathbf{v}$  de l'équation (HLL) pour une donnée initiale  $\mathbf{v}^0$  proche d'un soliton sombre  $\mathbf{v}_c$  demeure dans le voisinage de l'orbite associée à ce soliton. En particulier, la solution  $\mathbf{v}$  demeure bornée dans l'espace de non-annulation  $\mathcal{NA}(\mathbb{R})$  en temps long. Quitte à extraire, il est alors possible de construire une suite de temps  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui converge vers  $+\infty$ , ainsi qu'une fonction limite  $\mathbf{v}_*^0 \in \mathcal{NA}(\mathbb{R})$ , telles que

$$\mathbf{v}(\cdot, t_n) \rightharpoonup \mathbf{v}_*^0 \quad \text{dans} \quad H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}),$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . De plus, la fonction  $\mathbf{v}_*^0$  demeure proche de l'orbite du soliton  $\mathbf{v}_c$ . La solution  $\mathbf{v}_*$  associée à la donnée initiale  $\mathbf{v}_*^0$  est donc définie globalement, et reste elle-aussi proche de cette orbite.

En pratique, il est aussi nécessaire de tenir compte des invariances géométriques, soit ici de l'invariance par translation, en introduisant des paramètres de modulation adaptés et en établissant leur convergence dans la limite  $n \rightarrow +\infty$ . Nous omettrons cette difficulté supplémentaire dans cette présentation succincte de la preuve des Théorèmes 3 et 4.

Une fois construit le profil limite  $\mathbf{v}_*^0$ , et la solution correspondante  $\mathbf{v}_*$ , il s'agit d'établir que ce profil est un soliton sombre  $\mathbf{v}_{c^*}$ . Ceci vient achever la preuve de la stabilité asymptotique dès lors qu'il est possible de s'abstraire des extractions réalisées afin de construire  $\mathbf{v}_*^0$ . Cette dernière étape passe, comme souvent, par la preuve de l'unicité du soliton limite  $\mathbf{v}_{c^*}$ , laquelle repose sur la formule de monotonie pour le moment que nous avons déjà évoquée dans la preuve de la stabilité orbitale d'une somme bien préparée de solitons.

Pour établir que le profil  $\mathbf{v}_*^0$  est un soliton sombre, la seconde étape de la preuve consiste à décrire les propriétés de régularité et de décroissance de la solution limite correspondante  $\mathbf{v}_*$ . Afin de décrire ces propriétés, il est utile d'établir la continuité faible du flot de l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique. Cette continuité permet en effet de montrer que

la solution initiale  $\mathbf{v}$  converge faiblement vers la solution limite  $\mathbf{v}_*$  de la façon suivante. Pour tout nombre réel  $t$  fixé, ces deux solutions satisfont la convergence

$$\mathbf{v}(\cdot, t_n + t) \rightharpoonup \mathbf{v}_*(\cdot, t) \quad \text{dans} \quad H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}),$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Cette convergence suffit à établir une localisation en espace, uniforme en temps, de la solution limite  $\mathbf{v}_*$ . Si cette solution n'est pas localisée de manière uniforme en temps, alors, son moment à la droite d'une position  $R$  suffisamment grande peut croître entre les temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  d'une quantité strictement positive  $\delta p$ . De par la convergence précédente, le moment de la solution  $\mathbf{v}$  à la droite de  $R$  entre les temps  $t_n + \tau_1$  et  $t_n + \tau_2$  croît lui-aussi d'une quantité au moins de l'ordre de  $\delta p/2$  lorsque  $n$  est assez grand. La monotonie du moment à la droite de  $R$  garantit alors le fait que cette quantité augmente de l'ordre de  $\delta p/4$  entre les temps  $t_n + \tau_1$  et  $t_{n+1} + \tau_1$ . Ceci est absurde puisque, dans ce cas, le moment de la solution  $\mathbf{v}$  devient infini dans la limite  $t \rightarrow +\infty$ .

Ainsi la solution  $\mathbf{v}_*$  est-elle localisée de manière uniforme en temps. Il découle à nouveau de la formule (4) de monotonie du moment qu'elle décroît exponentiellement en espace, toujours de façon uniforme en temps. Il résulte alors des propriétés régularisantes des équations de type Schrödinger que la solution  $\mathbf{v}_*$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , et que toutes ses dérivées décroissent elles-aussi exponentiellement en espace de manière uniforme en temps (cf. e.g. [33, 8] pour de plus amples détails).

En définitive, la fonction  $\mathbf{v}_*$  est une solution très particulière d'une équation dispersive telle que l'équation de Landau-Lifshitz hydrodynamique, puisqu'elle est très régulière et décroît exponentiellement. La troisième et dernière étape de la preuve consiste à montrer que, dans le voisinage d'un soliton sombre, les seules solutions de l'équation qui possèdent ces propriétés sont des solitons sombres. Cette propriété de rigidité découle d'un théorème de type Liouville, qui repose lui-même sur une formule de monotonie localisée dans un voisinage spatial du soliton. Nous renvoyons à l'article de Bahri [2] pour plus de précisions au sujet de cette seconde formule de monotonie, qui se révèle être l'élément le plus délicat de la preuve.

Ceci achève cette présentation de la preuve de la stabilité asymptotique des solitons hydrodynamiques de l'équation de Landau-Lifshitz. Il est maintenant temps de conclure cet exposé avec l'énumération de plusieurs problèmes similaires, qui restent, à notre connaissance, ouverts.

À commencer par la question de la stabilité asymptotique du soliton noir  $\mathbf{m}_0$  pour l'équation de Landau-Lifshitz, et ce bien que la stabilité asymptotique du soliton noir de l'équation de Gross-Pitaevskii soit établie dans [24].

Ou la stabilité asymptotique d'une somme de solitons, même bien préparée, et ce bien que Cuccagna et Jenkins [14] aient prouvé cette propriété pour l'équation de Gross-Pitaevskii par la méthode du scattering inverse.

Et de manière bien plus générale, la description rigoureuse du comportement en temps long d'une solution quelconque de l'équation de Landau-Lifshitz, que ce soit en dimension un, ou même, en dimension supérieure : cette solution se décompose-t-elle vraiment en la propagation d'un certain nombre de solitons auxquels vient s'ajouter une composante dispersive linéaire ? C'est sur cette question que s'achève cet exposé, et c'est sa résolution qui parachèvera l'analyse de la dynamique de l'équation de Landau-Lifshitz à anisotropie planaire.



## Références

- [1] Z.S. Agranovich and V.A. Marchenko. *The inverse problem of scattering theory*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1963. Translated from the Russian by B.D. Seckler.
- [2] Y. Bahri. Asymptotic stability in the energy space for dark solitons of the Landau-Lifshitz equation. *Preprint*, 2015.
- [3] I. Bejenaru, A.D. Ionescu, C.E. Kenig, and D. Tataru. Global Schrödinger maps in dimensions  $d \geq 2$  : Small data in the critical Sobolev spaces. *Annals of Math.*, 173(3) :1443–1506, 2011.
- [4] F. Béthuel, P. Gravejat, and J.-C. Saut. Existence and properties of travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. In A. Farina and J.-C. Saut, editors, *Stationary and time dependent Gross-Pitaevskii equations*, volume 473 of *Contemp. Math.*, pages 55–104. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [5] F. Béthuel, P. Gravejat, and J.-C. Saut. On the KP-I transonic limit of two-dimensional Gross-Pitaevskii travelling waves. *Dynamics of PDE*, 5(3) :241–280, 2008.
- [6] F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut, and D. Smets. Orbital stability of the black soliton for the Gross-Pitaevskii equation. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(6) :2611–2642, 2008.
- [7] F. Béthuel, P. Gravejat, and D. Smets. Stability in the energy space for chains of solitons of the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation. *Ann. Inst. Fourier*, 64(1), 2014.
- [8] F. Béthuel, P. Gravejat, and D. Smets. Asymptotic stability in the energy space for dark solitons of the Gross-Pitaevskii equation. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, in press, 2015.  
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00767588v2>.
- [9] R.F. Bikbaev, A.I. Bobenko, and A.R. Its. Landau-Lifshitz equation, uniaxial anisotropy case : Theory of exact solutions. *Theoret. and Math. Phys.*, 178(2) :143–193, 2014.
- [10] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. Amer. Math. Soc., Providence, 2003.
- [11] T. Cazenave and P.-L. Lions. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Commun. Math. Phys.*, 85(4) :549–561, 1982.
- [12] N.-H. Chang, J. Shatah, and K. Uhlenbeck. Schrödinger maps. *Commun. Pure Appl. Math.*, 53(5) :590–602, 2000.
- [13] D. Chiron and M. Maris. Rarefaction pulses for the nonlinear Schrödinger equation in the transonic limit. *Commun. Math. Phys.*, 326(2) :329–392, 2014.
- [14] S. Cuccagna and R. Jenkins. On asymptotic stability of N-solitons of the Gross-Pitaevskii equation. *Preprint*, 2014.  
<http://arxiv.org/abs/1410.6887>.
- [15] A. de Laire. Minimal energy for the traveling waves of the Landau-Lifshitz equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 46(1) :96–132, 2014.
- [16] A. de Laire and P. Gravejat. Stability in the energy space for chains of solitons of the Landau-Lifshitz equation. *J. Differential Equations*, 258(1) :1–80, 2015.
- [17] K. El Dika. Asymptotic stability of solitary waves for the Benjamin-Bona-Mahony equation. *Disc. Cont. Dynam. Syst.*, 13(3) :583–622, 2005.

- [18] W. Ding and Y. Wang. Schrödinger flow of maps into symplectic manifolds. *Sci. China Ser. A*, 41(7) :746–755, 1998.
- [19] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan. *Hamiltonian methods in the theory of solitons*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Translated by A.G. Reyman.
- [20] I.M. Gel'fand and B.M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Izvestiya Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, 15 :309–360, 1951.
- [21] P. Gérard. The Gross-Pitaevskii equation in the energy space. In A. Farina and J.-C. Saut, editors, *Stationary and time dependent Gross-Pitaevskii equations*, volume 473 of *Contemp. Math.*, pages 129–148. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [22] P. Gérard and Z. Zhang. Orbital stability of traveling waves for the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation. *J. Math. Pures Appl.*, 91(2) :178–210, 2009.
- [23] P. Gravejat. *Quelques contributions à l'analyse mathématique de l'équation de Gross-Pitaevskii et du modèle de Bogoliubov-Dirac-Fock*. Habilitation thesis, Université Paris Dauphine, December 2011.
- [24] P. Gravejat and D. Smets. Asymptotic stability of the black soliton for the Gross-Pitaevskii equation. *Preprint*, 2014.  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01002094v1>.
- [25] M. Grillakis, J. Shatah, and W.A. Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I. *J. Funct. Anal.*, 74(1) :160–197, 1987.
- [26] E.P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, 4(2) :195–207, 1963.
- [27] B. Guo and S. Ding. *Landau-Lifshitz equations*, volume 1 of *Frontiers of Research with the Chinese Academy of Sciences*. World Scientific, Hackensack, 2008.
- [28] R. Jerrard and D. Smets. On Schrödinger maps from  $\mathbb{T}^1$  to  $\mathbb{S}^2$ . *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 45(4) :635–678, 2012.
- [29] C.A. Jones, S.J. Putterman, and P.H. Roberts. Motions in a Bose condensate V. Stability of solitary wave solutions of nonlinear Schrödinger equations in two and three dimensions. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 19 :2991–3011, 1986.
- [30] C.A. Jones and P.H. Roberts. Motions in a Bose condensate IV. Axisymmetric solitary waves. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 15 :2599–2619, 1982.
- [31] B.B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Sov. Phys. Dokl.*, 15(6) :539–541, 1970.
- [32] C.E. Kenig and Y. Martel. Asymptotic stability of solitons for the Benjamin-Ono equation. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 25(3) :909–970, 2009.
- [33] C.E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. On unique continuation for nonlinear Schrödinger equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 56(9) :1247–1262, 2003.
- [34] Y.S. Kivshar and B. Luther-Davies. Dark optical solitons : physics and applications. *Phys. Rep.*, 298(2-3) :81–197, 1998.
- [35] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Zeitsch. der Sow.*, 8 :153–169, 1935.
- [36] P.D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Commun. Pure Appl. Math.*, 21(5) :467–490, 1968.
- [37] F. Lin and J. Wei. Traveling wave solutions of the Schrödinger map equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 63(12) :1585–1621, 2010.
- [38] F. Linares and G. Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

- [39] E. Madelung. Quantumtheorie in Hydrodynamische form. *Zts. f. Phys.*, 40 :322–326, 1926.
- [40] Y. Martel. Linear problems related to asymptotic stability of solitons of the generalized KdV equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 38(3) :759–781, 2006.
- [41] Y. Martel and F. Merle. Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 157(3) :219–254, 2001.
- [42] Y. Martel and F. Merle. Asymptotic stability of solitons of the subcritical gKdV equations revisited. *Nonlinearity*, 18(1) :55–80, 2005.
- [43] Y. Martel and F. Merle. Asymptotic stability of solitons of the gKdV equations with general nonlinearity. *Math. Ann.*, 341(2) :391–427, 2008.
- [44] Y. Martel and F. Merle. Refined asymptotics around solitons for the gKdV equations with a general nonlinearity. *Disc. Cont. Dynam. Syst.*, 20(2) :177–218, 2008.
- [45] Y. Martel, F. Merle, and T.-P. Tsai. Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of  $N$  solitons for subcritical gKdV equations. *Commun. Math. Phys.*, 231(2) :347–373, 2002.
- [46] Y. Martel, F. Merle, and T.-P. Tsai. Stability in  $H^1$  of the sum of  $K$  solitary waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Duke Math. J.*, 133(3) :405–466, 2006.
- [47] A. Nahmod, J. Shatah, L. Vega, and C. Zeng. Schrödinger maps and their associated frame systems. *Int. Math. Res. Not.*, 2007 :1–29, 2007.
- [48] N. Papanicolaou and P.N. Spathis. Semitopological solitons in planar ferromagnets. *Nonlinearity*, 12(2) :285–302, 1999.
- [49] L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13(2) :451–454, 1961.
- [50] E.K. Sklyanin. On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation. Technical Report E-3-79, Leningrad Department of Steklov Institute of Mathematics of the USSR Academy of Sciences, 1979.
- [51] P.-L. Sulem, C. Sulem, and C. Bardos. On the continuous limit for a system of classical spins. *Commun. Math. Phys.*, 107(3) :431–454, 1986.
- [52] M.I. Weinstein. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 16(3) :472–491, 1985.
- [53] V.E. Zakharov and A.B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34 :62–69, 1972.
- [54] Y.L. Zhou and B.L. Guo. Existence of weak solution for boundary problems of systems of ferro-magnetic chain. *Sci. China Ser. A*, 27(8) :799–811, 1984.