

Etude des minimiseurs d'une fonctionnelle du type Ginzburg-Landau

Philippe Gravejat
Mémoire de DEA sous la direction de M.Béthuel

Table des matières

Introduction	1
1 Etude des minimiseurs dans le cas du degré zéro.	3
1.1 Minimisation de l'intégrale de Dirichlet sur $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$	3
1.2 Analyse asymptotique des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau.	5
2 Etude des minimiseurs dans le cas du degré non nul.	12
2.1 Estimations d'énergie pour les fonctions à valeurs dans \mathcal{E}	12
2.2 Estimations d'énergie pour les minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau. . .	15
2.3 Analyse asymptotique des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau.	25
Conclusion	35
Références	36

Introduction

Dans leur article [BBH2] et leur ouvrage [BBH3], F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein ont longuement étudié la minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau : si Ω est un ouvert borné, régulier, et simplement connexe de \mathbb{C} , et si ε est un nombre réel strictement positif, cette énergie est la fonctionnelle définie sur $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$ par

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}), E_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_\Omega (1 - |v|^2)^2.$$

F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein ont considéré le problème de minimisation de cette énergie sur les espaces de la forme

$$\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C}) = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}) / v = g \text{ sur } \partial\Omega\}$$

où g est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $\partial\Omega$ dans le cercle unité \mathcal{S}^1 de \mathbb{C} . Ils ont ainsi démontré l'existence des minimiseurs u_ε de cette énergie puis étudié leur comportement lorsque le paramètre ε tend vers 0. Ils se sont alors rendu compte que le comportement de ces minimiseurs dépendait fortement du degré d de la fonction g . Dans le cas où ce degré est nul, les minimiseurs u_ε de l'énergie de Ginzburg-Landau convergent vers l'application harmonique u_* de Ω dans \mathcal{S}^1 qui vaut g sur $\partial\Omega$. Cette convergence a lieu dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$, dans les espaces de Hölder $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1 : on a même les estimations plus précises suivantes pour tout compact K de Ω , et pour tout ε suffisamment petit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|u_\varepsilon - u_*\|_{\mathcal{C}^k(K, \mathbb{C})} \leq C_{k,K} \varepsilon^2.$$

Dans le cas où le degré d est non nul, le comportement des minimiseurs u_ε est radicalement différent : les minimiseurs u_ε convergent toujours vers une fonction harmonique u_* à valeurs dans \mathcal{S}^1 mais cette application n'est pas définie sur Ω . On constate en effet l'apparition de $|d|$ vortex $a_1, \dots, a_{|d|}$ au voisinage desquels l'application u_* a des singularités d'énergie infinie. Ce comportement provient du fait que l'espace $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{S}^1)$ est vide lorsque le degré de g est non nul : on ne peut donc espérer que la suite des minimiseurs converge vers une application de cet espace comme dans le cas du degré nul. On peut par ailleurs préciser la convergence des minimiseurs vers u_* et le comportement de cette fonction. Ainsi, si K est un compact de Ω , la convergence a lieu dans les espaces $C^k(K)$ pour tout entier k , mais, on n'a plus les estimations précédentes. Quant à la fonction u_* , elle est caractérisée par le fait qu'elle minimise une certaine fonctionnelle dite énergie renormalisée : u_* a ainsi des degrés tous égaux à 1 ou -1 autour des points $a_1, \dots, a_{|d|}$ selon que d est positif ou négatif (Pour plus de détails sur l'énergie renormalisée, le lecteur pourra se rapporter au livre de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH3]).

Dans ce mémoire de D.E.A., on étudie un problème semblable à celui étudié par F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein. On se donne une ellipse notée \mathcal{E} d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ qui est destinée à suppléer le cercle \mathcal{S}^1 : on note

$$\forall (w, z) \in \mathbb{C}^2, w \cdot_{\mathcal{E}} z = \frac{w_1 z_1}{a^2} + \frac{w_2 z_2}{b^2}$$

le produit scalaire associé à cette ellipse et,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z|_{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2}}$$

la norme associée à cette ellipse. On s'intéresse au problème de minimisation de la fonctionnelle, toujours appelée énergie de Ginzburg-Landau, qui est donnée pour tout ε strictement positif, par

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}), E_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |v|_{\mathcal{E}}^2)^2$$

sur l'ensemble $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$ où g est désormais une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $\partial\Omega$ dans l'ellipse \mathcal{E} . On cherche en fait à savoir dans quelle mesure les résultats obtenus pour le cercle \mathcal{S}^1 se transposent à une ellipse quelconque. On démontre ainsi de manière analogue l'existence de minimiseurs u_ε de cette énergie et que leur comportement asymptotique lorsque ε tend vers 0 dépend fortement du degré d de la fonction g . Ainsi, si ce degré est nul, les minimiseurs u_ε de l'énergie de Ginzburg-Landau convergent vers l'application harmonique u_* de Ω dans \mathcal{E} qui est égale à g sur $\partial\Omega$. Il est peut-être utile d'explicitier cette notion. On sait ce qu'est une application harmonique à valeurs dans le cercle \mathcal{S}^1 : c'est une application de Ω dans \mathcal{S}^1 dont la phase est harmonique sur Ω et qui obéit ainsi à l'équation

$$-\Delta u_* = |\nabla u_*|^2 u_*.$$

Dans le cas de l'ellipse, une application harmonique est définie de manière analogue. On se donne d'abord une paramétrisation adéquate de l'ellipse \mathcal{E} : on considère ainsi la fonction abscisse curviligne de l'ellipse :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} d\theta$$

puis, on choisit une paramétrisation canonique de l'ellipse donnée par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \Phi(s) = (a \cos(\psi^{-1}(s)), b \sin(\psi^{-1}(s))).$$

On désignera ainsi par le terme de coordonnées elliptiques d'un point z de \mathbb{C} les réels $\rho = |z|_{\mathcal{E}}$ et s tels que

$$z = \rho \Phi(s).$$

ρ sera appelé le module elliptique de z et, s la phase elliptique de z . Une application harmonique u_* à valeurs dans l'ellipse \mathcal{E} sera une application dont la phase elliptique est harmonique ce qui est cohérent avec le cas du cercle : on verra par la suite qu'une telle application vérifie une équation semblable à celle du cas du cercle. Après ces quelques définitions, on peut s'interroger sur la manière dont les minimiseurs u_ε de l'énergie de Ginzburg-Landau convergent vers u_* : cette convergence a lieu dans les espaces $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$, et $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1. Malheureusement, les estimations que l'on avait dans le cas du cercle ne se démontrent plus aussi simplement et leur validité n'est toujours pas démontrée. Dans le cas où le degré de g est non nul, le comportement des minimiseurs u_ε est similaire à celui du cas du cercle : les minimiseurs u_ε convergent vers une fonction harmonique u_* à valeurs dans \mathcal{E} qui n'est pas définie sur Ω . On constate aussi l'apparition de $|d|$ vortex $a_1, \dots, a_{|d|}$ au voisinage desquels l'application u_* a des singularités d'énergie infinie. Par ailleurs, la convergence des minimiseurs u_ε a lieu dans les espaces $\mathcal{H}_{loc}^1(\bar{\Omega} \setminus \{a_1, \dots, a_d\}, \mathbb{C})$ et, $\mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\bar{\Omega} \setminus \{a_1, \dots, a_d\}, \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1 : malheureusement, comme dans le cas du degré nul, on ne sait pas démontrer si la convergence a lieu dans les espaces $\mathcal{C}_{loc}^k(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_d\}, \mathbb{C})$ pour tout entier k . Quant à la fonction u_* , elle a une allure similaire à celle du cas du cercle puisqu'on montre qu'elle a des degrés tous égaux à 1 ou -1 autour des points $a_1, \dots, a_{|d|}$ selon que d est positif ou négatif.

Ainsi, dans ce mémoire, nous allons d'abord étudier la minimisation de cette nouvelle énergie de Ginzburg-Landau dans le cas où la donnée sur le bord a un degré nul, puis, dans le cas où elle a un degré non nul avant de donner en guise de conclusion des explications sur les différences entre le cas du cercle et le cas de l'ellipse, et certaines conjectures qu'il reste à démontrer.

1 Etude des minimiseurs dans le cas du degré zéro.

On suppose dans toute cette partie que le degré d est nul. Dans le premier paragraphe, on étudie l'existence d'applications harmoniques de Ω dans l'ellipse \mathcal{E} qui sont égales à g sur $\partial\Omega$: on constatera que cette étude revient à minimiser l'intégrale de Dirichlet donnée par

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}), \text{IntDir}(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2$$

sur l'espace $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$. Dans le second paragraphe, on étudie le comportement asymptotique des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau de manière analogue à ce qui est fait dans l'article de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH2].

1.1 Minimisation de l'intégrale de Dirichlet sur $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$.

On commence par énoncer quelques lemmes de relèvement :

Lemme 1.1. *Il existe une fonction s_0 dans $\mathcal{C}^1(\partial\Omega, \mathbb{R})$ telle que*

$$g = \Phi(s_0).$$

Démonstration. Soit $\forall (x, y) \in \mathbb{C}, T(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$. Comme $T(g)$ appartient à $\mathcal{C}^1(\partial\Omega, \mathcal{S}^1)$, il existe une fonction ϕ_0 dans $\mathcal{C}^1(\partial\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$$T(g) = e^{i\phi_0}.$$

En posant alors $s_0 = \Psi \circ \phi_0$, s_0 est une fonction de $\mathcal{C}^1(\partial\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$$g = \Phi(s_0).$$

□

Lemme 1.2. Soit u une fonction de $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$. Il existe une fonction s dans $\mathcal{H}_{s_0}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$$u = \Phi(s).$$

Démonstration. Soit u une fonction de $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$. Comme $T(u)$ appartient à $\mathcal{H}_{T(g)}^1(\Omega, \mathcal{S}^1)$, d'après le théorème de Béthuel-Zheng, il existe une fonction ϕ dans $\mathcal{H}_{\phi_0}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$$T(u) = e^{i\phi}.$$

En notant alors $s = \Psi \circ \phi$, s est une fonction de $\mathcal{H}_{s_0}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$$u = \Phi(s).$$

□

Grâce à ces lemmes, on montre l'existence et l'unicité d'un minimiseur de l'intégrale de Dirichlet sur $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$ ou, ce qui revient au même d'une application harmonique u_* de Ω dans \mathcal{E} égale à g sur $\partial\Omega$.

Théorème 1.1. Il existe une unique fonction u_* dans $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$ qui minimise l'intégrale de Dirichlet sur $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$:

$$\forall v \in \mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E}), \int_{\Omega} |\nabla u_*|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

De plus, si s_* est la solution des équations $\Delta s_* = 0$ sur Ω et $s_* = s_0$ sur $\partial\Omega$, alors

$$u_* = \Phi(s_*).$$

Démonstration. Soit v une fonction de $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$. On sait qu'il existe une fonction s dans $\mathcal{H}_{s_0}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$$v = \Phi(s).$$

On en déduit que

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \int_{\Omega} |\nabla s|^2 |\Phi'(s)|^2.$$

Comme Φ est construite de manière à ce que $|\Phi'| = 1$, on est conduit à

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \int_{\Omega} |\nabla s|^2.$$

On constate alors qu'il existe une unique fonction $u_* = \Phi(s_*)$ telle que

$$\forall v \in \mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E}), \int_{\Omega} |\nabla u_*|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2$$

où s_* est la solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta s_* = 0 \text{ sur } \Omega \\ s_* = s_0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

□

On énonce enfin l'équation des applications harmoniques à valeurs dans \mathcal{E} .

Corollaire 1.1. Soit L l'opérateur différentiel défini par

$$\forall v \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{C}), L(v) = (a^2 \Delta v_1, b^2 \Delta v_2).$$

u_* est une fonction régulière sur Ω qui vérifie l'équation

$$-L(u_*) = |u_* \wedge \nabla u_*|^2 u_*.$$

Démonstration. Comme s_* est harmonique sur Ω , et $u_* = \Phi(s_*)$, u_* est régulière sur Ω . De plus, on a

$$\forall i \in \{1, 2\} : \begin{cases} \partial_i u_* = \Phi'(s_*) \partial_i s_* \\ \partial_{ii}^2 u_* = \Phi''(s_*) (\partial_i s_*)^2 + \Phi'(s_*) \partial_{ii}^2 s_* \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$L(u_*) = (a^2 \Phi''(s_*)_1, b^2 \Phi''(s_*)_2) |\nabla s_*|^2.$$

Mais, on sait que $(\Phi(s_*), \Phi'(s_*))$ est une base de \mathbb{C} : on peut donc noter

$$(a^2 \Phi''(s_*)_1, b^2 \Phi''(s_*)_2) = \lambda \Phi(s_*) + \mu \Phi'(s_*).$$

En prenant le produit scalaire associé à l'ellipse par $\Phi(s_*)$ et $\Phi'(s_*)$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda |\Phi(s_*)|_{\mathcal{E}}^2 + \mu \Phi(s_*) \cdot_{\mathcal{E}} \Phi'(s_*) = \Phi(s_*) \cdot \Phi''(s_*) \\ \lambda \Phi(s_*) \cdot_{\mathcal{E}} \Phi'(s_*) + \mu |\Phi'(s_*)|_{\mathcal{E}}^2 = \Phi'(s_*) \cdot \Phi''(s_*) \end{cases}$$

Par ailleurs, on sait que $|\Phi|_{\mathcal{E}} = 1$, et $|\Phi'| = 1$. On arrive ainsi à

$$\begin{cases} \lambda = \Phi(s_*) \cdot \Phi''(s_*) \\ \mu = 0. \end{cases}$$

De plus, par construction, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = T^{-1}(e^{i\psi^{-1}(t)}).$$

En dérivant deux fois cette expression et en prenant le produit scalaire de $\Phi(s_*)$ et de $\Phi''(s_*)$, on aboutit à

$$\lambda = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin(\psi^{-1}(s_*))^2 + b^2 \cos(\psi^{-1}(s_*))^2)^2} = -(\Phi(s_*) \wedge \Phi'(s_*))^2$$

et par conséquent, à

$$-L(u_*) = (\Phi(s_*) \wedge \Phi'(s_*))^2 |\nabla s_*|^2 u_* = |u_* \wedge \nabla u_*|^2 u_*.$$

□

1.2 Analyse asymptotique des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau.

On commence par montrer l'existence des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau sur l'espace $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$.

Lemme 1.3. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, E_ε a au moins un minimiseur u_ε dans $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$.

Démonstration. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, et $\alpha = \inf_{\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})} (E_\varepsilon)$.

Si on considère une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie $E_\varepsilon(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$, on constate que cette suite est bornée dans $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$. Comme cet ensemble est faiblement fermé, quitte à extraire, grâce aux injections de Sobolev, il existe une fonction u_ε dans $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$ telle que

$$\begin{cases} v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_\varepsilon \text{ dans } \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}) \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_\varepsilon \text{ dans } \mathcal{L}^4(\Omega, \mathbb{C}). \end{cases}$$

Grâce à la semi-continuité inférieure faible de la norme de $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$, on a

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (E_\varepsilon(v_n)) \leq \alpha.$$

u_ε est donc bien un minimiseur de E_ε sur $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$. \square

Dans toute la suite de cette partie, on va fixer une suite de minimiseurs u_ε de E_ε sur $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et on va déterminer le comportement de ces minimiseurs lorsque ε tend vers 0.

Propriété 1.1. u_ε est une fonction régulière sur Ω solution des équations

$$\begin{cases} -L(u_\varepsilon) = \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2} (1 - |u_\varepsilon|_\varepsilon^2) \text{ sur } \Omega \\ u_\varepsilon = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Comme u_ε est un point critique de E_ε , et que cette fonctionnelle est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$, on aboutit en la dérivant aux équations

$$\begin{cases} -L(u_\varepsilon) = \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2} (1 - |u_\varepsilon|_\varepsilon^2) \text{ sur } \Omega \\ u_\varepsilon = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par ailleurs, si on note $w_\varepsilon = 1 - |u_\varepsilon|_\varepsilon^2$, cette fonction vérifie les équations

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{u_\varepsilon^2}{a^4} + \frac{u_\varepsilon^2}{b^4} \right) w_\varepsilon = 2|\nabla u_\varepsilon|_\varepsilon^2 \geq 0 \text{ sur } \Omega \\ w_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

donc d'après le principe du maximum,

$$w_\varepsilon \geq 0$$

c'est-à-dire,

$$|u_\varepsilon|_\varepsilon \leq 1.$$

On conclut alors grâce aux estimations elliptiques standards et à une méthode de bootstrap que u_ε est une fonction régulière sur Ω . \square

Théorème 1.2. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers u_* dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$ et dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1, lorsque ε tend vers 0.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de l'article de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH2]. Elle se décompose en les étapes suivantes :

Etape 1. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers u_* dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$ lorsque ε tend vers 0, et vérifie

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Soit ε un réel strictement positif. Comme $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(u_*) \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_*|^2$, $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$, donc, quitte à extraire, il existe une fonction v dans $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$ telle que

$$\begin{cases} u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v \text{ dans } \mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C}) \\ u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_* \text{ pp.} \end{cases}$$

De plus, on constate que

$$\int_\Omega w_\varepsilon^2 \leq 2\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u_*|^2.$$

En faisant tendre ε vers 0, grâce à la convergence presque partout et au théorème de Lebesgue, on aboutit à

$$\int_\Omega (1 - |v|_\varepsilon^2)^2 = 0$$

ce qui prouve que v appartient à $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$. Par ailleurs, on a

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_*|^2$$

donc, de même,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_*|^2$$

ce qui implique que v est égale à u_* . On remarque alors que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\nabla u_*|^2$$

ce qui montre que :

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_* \text{ dans } \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}).$$

Comme $\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_\Omega w_\varepsilon^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_*|^2$, on aboutit aussi à

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Omega w_\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Étape 2. Il existe une constante C ne dépendant que de g et de Ω telle que pour ε suffisamment petit

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Considérons la solution U des équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \text{ sur } \Omega \\ U = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme $\Delta|U|^2 \geq 0$ sur Ω et $|U|^2 \leq \max\{\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\}$ sur $\partial\Omega$, $|U|$ est bornée par $\max\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ sur Ω : en utilisant le lemme de Gagliardo-Nirenberg prouvé dans l'article de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH2], il existe une constante C ne dépendant que de Ω telle que

$$\|\nabla(u_\varepsilon - U)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq C \|u_\varepsilon - U\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\Delta(u_\varepsilon - U)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

On aboutit alors au résultat recherché en remarquant que U ne dépend pas de ε .

Étape 3. Soit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\rho_\varepsilon = |u_\varepsilon|_\varepsilon$. $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge uniformément vers 1 sur Ω lorsque ε tend vers 0.

Par l'absurde, il existe un réel strictement positif δ , une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers zéro et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de Ω tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} : |u_{\varepsilon_n}(x_n)|_{\mathcal{E}} \leq 1 - \delta.$$

Grâce à l'étape précédente, on sait que

$$\forall x \in \mathcal{B}_o(x_n, \frac{\delta \varepsilon_n}{2C}) : |u_{\varepsilon_n}(x) - u_{\varepsilon_n}(x_n)|_{\mathcal{E}} \leq \frac{C}{\varepsilon_n} |x - x_n| \leq \frac{\delta}{2}$$

ce qui conduit à

$$\forall x \in \mathcal{B}_o(x_n, \frac{\delta \varepsilon_n}{2C}) : |u_{\varepsilon_n}(x)|_{\mathcal{E}} \leq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

On conclut notamment que

$$\mathcal{B}_o(x_n, \frac{\delta \varepsilon_n}{2C}) \subset \Omega.$$

En intégrant sur cet ensemble la fonction w_ε^2 , on constate que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\Omega} w_{\varepsilon_n}^2 \geq \frac{\pi \delta^2}{4C^2} (1 - (1 - \frac{\delta}{2})^2)^2$$

ce qui est impossible au vu de la première étape lorsque n tend vers $+\infty$.

Etape 4. Il existe une constante C telle que pour tout ε strictement positif

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 \leq C.$$

Considérons un champ de vecteurs régulier V défini sur Ω et coïncidant avec la normale extérieure ν sur $\partial\Omega$. Pour tout ε strictement positif, on obtient grâce à la formule de Stokes,

$$\int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \cdot (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 - \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (V \cdot \nabla u_\varepsilon).$$

Comme

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (V_1 \partial_1 |\partial_i u_\varepsilon|^2 + V_2 \partial_2 |\partial_i u_\varepsilon|^2) + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\partial_i V_1 \partial_1 u_\varepsilon \cdot \partial_i u_\varepsilon + \partial_i V_2 \partial_2 u_\varepsilon \cdot \partial_i u_\varepsilon)$$

et comme $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$, on obtient à nouveau grâce à la formule de Stokes,

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\partial_1 V_1 |\partial_i u_\varepsilon|^2 + \partial_2 V_2 |\partial_i u_\varepsilon|^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} |\partial_i u_\varepsilon|^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1).$$

ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1)$$

puis, à

$$\int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \cdot (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1).$$

Par ailleurs, on a grâce à l'équation vérifiée par u_ε et à la formule de Stokes,

$$\int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \cdot (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (V \cdot \nabla u_\varepsilon) \cdot \varepsilon u_\varepsilon w_\varepsilon = \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \operatorname{div}(V) = O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1).$$

On conclut alors qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 \leq C.$$

Etape 5. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^2(\Omega, \mathbb{C})$.

Soit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $A_\varepsilon = \frac{1}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2$. On obtient

$$\Delta A_\varepsilon = |d^2 u_\varepsilon|^2 + \sum_{i=1}^2 \partial_i u_\varepsilon \cdot \Delta(\partial_i u_\varepsilon) = |d^2 u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^2 (2(u_\varepsilon \cdot \varepsilon \partial_i u_\varepsilon)^2 - w_\varepsilon |\partial_i u_\varepsilon|_\varepsilon^2).$$

Par équivalence des normes sur \mathbb{C} , il existe une constante C telle que

$$\Delta A_\varepsilon \geq |d^2 u_\varepsilon|^2 - C \sum_{i=1}^2 |\partial_i u_\varepsilon|^2 \frac{|\Delta u_\varepsilon|}{|u_\varepsilon|}.$$

Comme $|\Delta u_\varepsilon| \leq \sqrt{2} |d^2 u_\varepsilon|$, on aboutit à

$$-\Delta A_\varepsilon + |d^2 u_\varepsilon|^2 \leq C A_\varepsilon \frac{|d^2 u_\varepsilon|}{|u_\varepsilon|} \leq \frac{1}{2} |d^2 u_\varepsilon|^2 + C \frac{A_\varepsilon^2}{|u_\varepsilon|^2}$$

et finalement à l'inéquation

$$-\Delta A_\varepsilon + \frac{1}{2} |d^2 u_\varepsilon|^2 \leq C \frac{A_\varepsilon^2}{|u_\varepsilon|^2}$$

Soit alors $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$, il existe un réel strictement positif R tel que

$$\forall (x, \varepsilon) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \int_{\mathcal{B}_o(x, R) \cap \Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq \delta.$$

Soit alors $x \in \Omega$.

Soit $d = d(x, \partial\Omega)$ et, $r = \text{Min}\{\frac{d}{2}, R\}$.

Soit ξ une fonction régulière à support dans $\mathcal{B}_o(x, r)$ et identiquement égale à 1 sur $\mathcal{B}_o(x, \frac{r}{2})$.

D'après l'inéquation précédente, on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{2} \int_\Omega \xi^2 |d^2 u_\varepsilon|^2 \leq C \int_\Omega \frac{\xi^2 A_\varepsilon^2}{|u_\varepsilon|^2} + \int_\Omega \xi^2 \Delta A_\varepsilon$$

or, pour ε suffisamment petit, on sait que

$$|u_\varepsilon| \geq \frac{1}{2}.$$

On obtient donc

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \xi^2 |d^2 u_\varepsilon|^2 \leq 4C \int_\Omega \xi^2 A_\varepsilon^2 + \int_\Omega \Delta \xi^2 A_\varepsilon$$

et comme $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$,

$$\int_\Omega \xi^2 |d^2 u_\varepsilon|^2 \leq C \int_\Omega \xi^2 |\nabla u_\varepsilon|^4 + C.$$

On utilise alors l'injection de Sobolev de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ pour obtenir que

$$\int_\Omega \xi^2 |\nabla u_\varepsilon|^4 \leq C \left(\int_\Omega (\xi |\nabla u_\varepsilon| |d^2 u_\varepsilon| + |\nabla \xi| |\nabla u_\varepsilon|^2 + \xi |\nabla u_\varepsilon|^2) \right)^2 \leq C \left(\int_\Omega \xi |\nabla u_\varepsilon| |d^2 u_\varepsilon| \right)^2 + C$$

et comme ξ est à support dans $\mathcal{B}_o(x, R) \cap \Omega$, on a finalement grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\int_\Omega \xi^2 |\nabla u_\varepsilon|^4 \leq C \delta \int_\Omega \xi^2 |d^2 u_\varepsilon|^2 + C$$

donc si δ est suffisamment petit, on a

$$\int_{\Omega} \xi^2 |d^2 u_{\varepsilon}|^2 \leq C.$$

$(u_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est ainsi bornée dans $\mathcal{H}_{loc}^2(\Omega, \mathbb{C})$. Il suffit donc de montrer que cette suite est bornée dans $\mathcal{H}^2(V, \mathbb{C})$ où V est un voisinage de $\partial\Omega$.

Soit alors $x \in \partial\Omega$.

Pour simplifier, on va supposer que $\partial\Omega$ est plat au voisinage de x , c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif d tel que

$$\mathcal{B}_o(x, d) \cap \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \cap \mathcal{B}_o(x, d).$$

La démonstration dans le cas général est analogue à celle qui va suivre grâce à l'usage de cartes et est aussi analogue à celle qui se trouve dans l'article de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH2]. Soit $r = \text{Min}\{d, R\}$.

Soit ξ une fonction régulière à support dans $\mathcal{B}_o(x, r)$ et identiquement égale à 1 sur $\mathcal{B}_o(x, \frac{r}{2})$. Grâce à l'inéquation vérifiée par A_{ε} , on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{2} \int_{\Omega} \xi^2 |d^2 u_{\varepsilon}|^2 \leq C \int_{\Omega} \frac{\xi^2 A_{\varepsilon}^2}{|u_{\varepsilon}|^2} + \int_{\Omega} \xi^2 \Delta A_{\varepsilon}$$

ce qui conduit grâce à la formule de Stokes, pour ε suffisamment petit, à

$$\int_{\Omega} \xi^2 |d^2 u_{\varepsilon}|^2 \leq C \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla u_{\varepsilon}|^4 + \int_{\Omega} \Delta \xi^2 A_{\varepsilon} + \int_{\{x_2=0\}} (\partial_2 \xi^2 A_{\varepsilon} - \xi^2 \partial_2 A_{\varepsilon}).$$

En utilisant l'étape 4 et la démonstration ci-dessus, on sait qu'il existe une constante C telle que pour tout ε suffisamment petit,

$$\int_{\Omega} \xi^2 |d^2 u_{\varepsilon}|^2 \leq C + \int_{\{x_2=0\}} \xi^2 \partial_2 A_{\varepsilon}.$$

On calcule alors que

$$\partial_2 A_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^2 \partial_i u_{\varepsilon} \cdot \partial_{i2}^2 u_{\varepsilon} = \partial_1 u_{\varepsilon} \cdot \partial_{12}^2 u_{\varepsilon} - \partial_2 u_{\varepsilon} \cdot \partial_{11}^2 u_{\varepsilon}.$$

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_{\{x_2=0\}} \xi^2 \partial_2 A_{\varepsilon} = \int_{\{x_2=0\}} \xi^2 (\partial_1 g \cdot \partial_{12}^2 u_{\varepsilon} - \partial_2 u_{\varepsilon} \cdot \partial_{11}^2 g) = -2 \int_{\{x_2=0\}} \partial_2 u_{\varepsilon} \cdot (\xi^2 \partial_{11}^2 g + \partial_1 \xi \xi \partial_1 g)$$

et d'après l'étape 4, il existe une constante C telle que

$$\int_{\{x_2=0\}} \xi^2 \partial_2 A_{\varepsilon} \leq C$$

ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} \xi^2 |d^2 u_{\varepsilon}|^2 \leq C.$$

On conclut ainsi que $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^2(\Omega, \mathbb{C})$.

Etape 6. *Il existe une constante C telle que pour ε suffisamment petit*

$$w_{\varepsilon} \leq C\varepsilon^2$$

Soit $p \in [2, +\infty[$. On sait que w_ε vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{u_{\varepsilon 1}^2}{a^4} + \frac{u_{\varepsilon 2}^2}{b^4} \right) w_\varepsilon = 2 |\nabla u_\varepsilon|_{\mathcal{E}}^2 \text{ sur } \Omega \\ w_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En multipliant par w_ε^{p-1} , et en utilisant la formule de Stokes, on arrive à

$$\frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \left(\frac{u_{\varepsilon 1}^2}{a^4} + \frac{u_{\varepsilon 2}^2}{b^4} \right) w_\varepsilon^p \leq 2 \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|_{\mathcal{E}}^2 w_\varepsilon^{p-1}.$$

Pour ε suffisamment petit, il existe ainsi une constante C telle que

$$\int_{\Omega} w_\varepsilon^p \leq C \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|_{\mathcal{E}}^2 w_\varepsilon^{p-1}.$$

En utilisant l'inégalité de Holder, on a

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R})} \leq C \varepsilon^2 \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^{2p}(\Omega)}^2$$

et grâce à l'étape précédente et aux injections de Sobolev,

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R})} \leq C(p) \varepsilon^2.$$

En utilisant l'équation vérifiée par u_ε , on a

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{C})} \leq C(p)$$

puis, grâce aux estimations elliptiques standards, on obtient

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C})} \leq C(p).$$

Par ailleurs, on sait que $W^{1,4}(\Omega)$ s'injecte dans $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$: il existe donc une constante C ne dépendant pas de p telle que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq C.$$

En utilisant l'inégalité

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R})} \leq C \varepsilon^2 \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^{2p}(\Omega)}^2$$

on est conduit à

$$\forall p \in [2, +\infty[, \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R})} \leq C \varepsilon^2$$

et, comme C est indépendante de p , à

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})} \leq C \varepsilon^2.$$

Étape 7. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers u_* dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1.

En effet, d'après l'étape précédente, on sait qu'il existe une constante C telle que

$$\forall p \in]1, +\infty[, \|\Delta u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq C.$$

D'après les estimations elliptiques standards, $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est ainsi bornée dans $W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C})$: comme $W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C})$ s'injecte de manière compacte dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$, on sait que, quitte à extraire, $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$. Comme la limite de cette suite est nécessairement u_* , on a en fait

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_* \text{ dans } \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C}).$$

□

2 Etude des minimiseurs dans le cas du degré non nul.

On suppose dans cette partie que $d > 0$: dans le cas où $d < 0$, il suffit de remplacer g par \bar{g} pour se ramener à l'étude qui va suivre. Dans un premier paragraphe, on étudie l'énergie des fonctions définies sur Ω privé de n trous, c'est-à-dire de n ouverts bornés, réguliers et simplement connexes, à valeurs dans \mathcal{E} . Dans ce but, on utilise la même méthode que dans le livre de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH3], et on constate que tous les résultats obtenus dans ce livre sont toujours valables ce qui s'explique assez simplement : du point de vue de la géométrie différentielle, le cercle \mathcal{S}^1 et l'ellipse \mathcal{E} sont deux objets identiques. Il est donc normal que les fonctions à valeurs dans l'un ou dans l'autre aient des comportements similaires. On constate ainsi que les estimations d'énergie des fonctions à valeurs dans \mathcal{S}^1 et de celles à valeurs dans \mathcal{E} sont identiques. Dans un second paragraphe, on étudie l'énergie des minimiseurs u_ε de l'énergie de Ginzburg-Landau : on borne cette énergie en dehors d'un nombre fini de boules de Ω ce qui permet dans un dernier paragraphe, de montrer la convergence des minimiseurs u_ε de la même manière que dans le livre de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH3]. Les résultats obtenus sont d'ailleurs assez similaires.

2.1 Estimations d'énergie pour les fonctions à valeurs dans \mathcal{E} .

Dans ce paragraphe, on se donne des ouverts réguliers, simplement connexes de Ω notés $(\omega_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ dont les adhérences sont incluses dans Ω et sont deux à deux disjointes : on notera $\Omega' = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n \omega_i$. On se donne aussi des entiers relatifs notés $(d_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ qui vérifient $d = \sum_{i=1}^n d_i$. L'objectif de ce paragraphe est d'étudier la minimisation de l'intégrale de Dirichlet sur l'ensemble $\mathcal{H} = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega', \mathcal{E}) / d^\circ(v, \partial\Omega) = d \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d^\circ(v, \partial\omega_i) = d_i\}$. Cette étude nous permettra de donner une bonne estimation de l'énergie d'un minimiseur de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau sur $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$. On énonce d'abord le lemme suivant qui va nous permettre de calculer la valeur du minimum de l'intégrale de Dirichlet sur \mathcal{H} .

Lemme 2.1. *Soit $V = \{\phi \in \mathcal{H}^1(\Omega', \mathbb{R}) / \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \phi = Cst^e \text{ sur } \partial\omega_i\}$. Il existe une unique fonction Ψ dans V harmonique sur Ω' telle que*

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{\partial\omega_i} \partial_\nu \Psi = \mathcal{L}_\mathcal{E} d_i.$$

Démonstration. Considérons la forme bilinéaire symétrique continue sur V définie par

$$\forall (u, v) \in V^2, a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

et la forme linéaire continue sur V définie par

$$\forall v \in V, l(v) = -\mathcal{L}_\mathcal{E} \sum_{i=1}^n d_i v|_{\partial\omega_i}.$$

Grâce à une inégalité semblable à celle de Poincaré, a est coercive sur l'espace de Hilbert V ce qui conduit au lemme ci-dessus grâce au théorème de Lax-Milgram. \square

On calcule alors la valeur suivante du minimum de l'intégrale de Dirichlet sur \mathcal{H} .

Théorème 2.1. *Soit $E = \mathcal{I}nf_{v \in \mathcal{H}} \int_{\Omega} |\nabla v|^2$.*

$$E = \int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2.$$

Démonstration. Au cours de cette démonstration, on aura besoin de la notation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z|_{\mathcal{E}'} = \sqrt{\frac{b^2 z_1^2}{a^2} + \frac{a^2 z_2^2}{b^2}}$$

Considérons un élément v de \mathcal{H} . Comme $|v|_{\mathcal{E}} = 1$ sur Ω , on a :

$$\partial_1 v \wedge \partial_2 v = 0$$

ce qui conduit à

$$\partial_1(|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_2 v) - \partial_2(|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_1 v) = 0.$$

Soit alors $D = (-\frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_2 v}{ab} + \partial_1 \Psi, -\frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_1 v}{ab} + \partial_2 \Psi)$. On constate que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(D) = 0 \text{ sur } \Omega' \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{\partial \omega_i} D \cdot \nu = \int_{\partial \omega_i} (\partial_\nu \Psi - \frac{v \wedge \partial_\tau v |v|_{\mathcal{E}'}}{ab}) = \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(d_i - d_i) = 0 \end{cases}$$

donc, d'après le lemme de Poincaré, il existe une fonction H dans $\mathcal{H}^1(\Omega', \mathbb{R})$ telle que

$$D = (\partial_2 H, -\partial_1 H)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_1 v}{ab} = -\partial_1 H - \partial_2 \Psi \\ \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_2 v}{ab} = -\partial_2 H - \partial_1 \Psi \end{cases}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_1 v}{ab} \right|^2 + \left| \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_2 v}{ab} \right|^2 &= \frac{|v|_{\mathcal{E}'}^2}{a^2 b^2} (v_1^2 \partial_1 v_2^2 + v_2^2 \partial_1 v_1^2 + v_1^2 \partial_2 v_2^2 + v_2^2 \partial_2 v_1^2 \\ &\quad - 2v_1 v_2 (\partial_1 v_2 \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 \partial_2 v_1)). \end{aligned}$$

Comme $|v|_{\mathcal{E}} = 1$, on a

$$\forall i \in \{1, 2\}, \frac{v_1 \partial_i v_1}{a^2} + \frac{v_2 \partial_i v_2}{b^2} = 0$$

et,

$$\begin{aligned} \left| \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_1 v}{ab} \right|^2 + \left| \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_2 v}{ab} \right|^2 &= \left(\frac{v_1^2}{a^4} + \frac{v_2^2}{b^4} \right) (v_1^2 \partial_1 v_2^2 + v_2^2 \partial_1 v_1^2 + v_1^2 \partial_2 v_2^2 + v_2^2 \partial_2 v_1^2 \\ &\quad + \frac{b^2}{a^2} (v_1^2 \partial_1 v_1^2 + v_1^2 \partial_2 v_1^2) + \frac{a^2}{b^2} (v_2^2 \partial_2 v_2^2 + v_2^2 \partial_1 v_2^2)). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|v|_{\mathcal{E}} = 1$, on aboutit à

$$\begin{aligned} \left| \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_1 v}{ab} \right|^2 + \left| \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_2 v}{ab} \right|^2 &= \partial_1 v_1^2 + \partial_1 v_2^2 + \partial_2 v_2^2 + \partial_2 v_1^2 \\ &\quad + (b^2 - a^2) \left(\frac{v_1^2}{a^4} (\partial_1 v_1^2 + \partial_2 v_1^2) - \frac{v_2^2}{b^4} (\partial_1 v_2^2 + \partial_2 v_2^2) \right) \end{aligned}$$

et, finalement, à

$$\left| \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_1 v}{ab} \right|^2 + \left| \frac{|v|_{\mathcal{E}'} v \wedge \partial_2 v}{ab} \right|^2 = |\nabla v|^2.$$

On arrive ainsi à

$$|\nabla v|^2 = |\nabla H|^2 + |\nabla \Psi|^2 + 2(\partial_1 H \partial_2 \Psi - \partial_2 H \partial_1 \Psi).$$

Grâce à la formule de Stokes, on a

$$\int_{\Omega} (\partial_1 H \partial_2 \Psi - \partial_2 H \partial_1 \Psi) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(H \partial_2 \Psi, -H \partial_1 \Psi) = \int_{\partial \Omega'} H \partial_{\tau} \Psi = 0$$

et, en fin de compte,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \int_{\Omega} |\nabla H|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2.$$

Pour conclure la démonstration, il suffit alors d'exhiber un élément v de \mathcal{H} pour lequel $H = 0$. Dans cet esprit, posons $F = (-\partial_2 \Psi, \partial_1 \Psi)$: on constate que

$$\begin{cases} \partial_2 F_1 = \partial_1 F_2 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{\partial \omega_i} F \cdot \tau = \int_{\partial \omega_i} \partial_{\nu} \Psi = \mathcal{L}_{\mathcal{E}} d_i \\ \int_{\partial \Omega} F \cdot \tau = 0 \end{cases}$$

donc, par intégration sur les chemins, il existe localement une fonction régulière s telle que $F = (\partial_1 s, \partial_2 s)$. En notant alors $u = \Psi(s)$, u est une fonction régulière sur Ω' telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d^{\circ}(u, \partial \omega_i) = \frac{1}{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \int_{\partial \omega_i} \partial_{\nu} \Psi = \int_{\partial \omega_i} \frac{u \wedge \partial_{\tau} u |_{\mathcal{E}'}}{ab \mathcal{L}_{\mathcal{E}}} = d_i$$

et,

$$d^{\circ}(u, \partial \Omega) = \sum_{i=1}^n d^{\circ}(u, \partial \omega_i) = d.$$

u appartient donc à \mathcal{H} et vérifie

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega'} |\nabla s|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2$$

On en déduit aisément que

$$E = \int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2.$$

□

Dans la suite de ce paragraphe, on va s'intéresser à un cas particulier de la situation précédente. On va ainsi se donner n points x_1, \dots, x_n de Ω et un réel strictement positif ρ : les ouverts $(\omega_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ seront les boules ouvertes de centre $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et de rayon ρ . On supposera qu'ils vérifient les mêmes hypothèses que précédemment et qu'il existe de plus un réel strictement positif μ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} d(x_i, \partial \Omega) \geq 2 \operatorname{Max}\{\mu, \rho\} \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i - x_j| \geq 8\rho \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

On obtient alors l'estimation suivante de manière identique à celle du livre de F.Béthuel, H.Brézis, F.Hélein [BBH3].

Lemme 2.2. Soient $P = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / d_i > 0\}$, $D = \{\delta \in \mathbb{N}^n / \sum_{i \in P} \delta_i = d \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_i \leq d_i\}$, et

$$C = \frac{3\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} \sum_{i=1}^n |d_i|^2 \left(\ln\left(\frac{\operatorname{Diam}(\Omega)}{\mu}\right) + n \ln(2) \right).$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2 = \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} \operatorname{Min}_{\delta \in D} \left(\sum_{i \in P} \delta_i^2 \right) \ln\left(\frac{\mu}{\rho}\right) - C.$$

On en déduit ainsi l'estimation d'énergie suivante :

Théorème 2.2. *Il existe une constante C telle que*

$$E \geq \frac{d\mathcal{L}_\varepsilon^2}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\rho}\right) - C$$

Démonstration. Si $\delta \in D$, alors,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_i^2 \geq \delta_i$$

et par suite,

$$\sum_{j \in P} \delta_j^2 \geq d.$$

On obtient alors aisément

$$E \geq \int_{\Omega} |\nabla \Psi|^2 \geq \frac{d\mathcal{L}_\varepsilon^2}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\rho}\right) - C.$$

□

2.2 Estimations d'énergie pour les minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau.

On s'intéresse maintenant aux minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau : dans ce paragraphe, on montre que leur énergie est bornée sauf sur un nombre restreint de boules incluses dans Ω ce qui permet d'étudier leur comportement asymptotique pour ε proche de 0 dans le paragraphe suivant. On commence par montrer l'existence et la régularité de ces minimiseurs.

Lemme 2.3. *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, E_ε a au moins un minimiseur u_ε dans $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 1.3. □

Propriété 2.1. *u_ε est une fonction régulière sur Ω solution des équations suivantes :*

$$\begin{cases} -L(u_\varepsilon) = \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2} (1 - |u_\varepsilon|_\varepsilon^2) \text{ sur } \Omega \\ u_\varepsilon = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la propriété 1.1 : notamment, si on note pour tout ε strictement positif, $\rho_\varepsilon = |u_\varepsilon|_\varepsilon$ et $w_\varepsilon = 1 - \rho_\varepsilon^2$, on remarque que w_ε vérifie les équations

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{u_{\varepsilon 1}^2}{a^4} + \frac{u_{\varepsilon 2}^2}{b^4} \right) w_\varepsilon = 2|\nabla u_\varepsilon|_\varepsilon^2 \text{ sur } \Omega \\ w_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et que

$$\rho_\varepsilon \leq 1 \text{ sur } \Omega.$$

□

Dans toute la suite de cette partie, on va supposer que Ω est étoilé : on montre d'abord que l'énergie d'interaction d'un minimiseur u_ε est bornée indépendamment de ε .

Propriété 2.2. *Il existe une constante C telle que*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \leq C.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Quitte à translater, on peut supposer que Ω est étoilé par rapport à 0 : on va utiliser l'identité de Pohozaev, c'est-à-dire multiplier l'équation vérifiée par u_ε par la fonction $x \cdot \nabla u_\varepsilon$. On obtient

$$-\int_{\Omega} L(u_\varepsilon) \cdot \mathcal{E}(x \cdot \nabla u_\varepsilon) = \int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon w_\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot \mathcal{E}(x \cdot \nabla u_\varepsilon).$$

En développant le second membre de cette équation, on a grâce à la formule de Stokes,

$$\int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon w_\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot \mathcal{E}(x \cdot \nabla u_\varepsilon) = -\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{x_i \partial_i w_\varepsilon^2}{4\varepsilon^2} = \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2.$$

Pour le premier membre, on a

$$-\int_{\Omega} L(u_\varepsilon) \cdot \mathcal{E}(x \cdot \nabla u_\varepsilon) = -\int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \cdot (x \cdot \nabla u_\varepsilon)$$

et finalement, grâce à la formule de Stokes,

$$-\int_{\Omega} L(u_\varepsilon) \cdot \mathcal{E}(x \cdot \nabla u_\varepsilon) = -\int_{\partial\Omega} ((x \cdot \nu) |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 + (x \cdot \tau) \partial_\tau u_\varepsilon \cdot \partial_\nu u_\varepsilon - \frac{1}{2} ((x \cdot \nu) |\nabla u_\varepsilon|^2) - \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2.$$

On obtient donc

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \leq \int_{\partial\Omega} ((x \cdot \nu) |\partial_\tau g|^2 - (x \cdot \tau) \partial_\tau g \cdot \partial_\nu u_\varepsilon) \leq C + C \left(\int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme Ω est étoilé, on sait qu'il existe un réel strictement positif α tel que

$$\forall x \in \partial\Omega, x \cdot \nu(x) \geq \alpha.$$

On conclut donc que

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \leq C.$$

□

On calcule alors une borne supérieure de l'énergie d'un minimiseur de l'énergie de Ginzburg-Landau.

Propriété 2.3. *Il existe une constante C telle que, pour ε suffisamment petit,*

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{4\pi} d |\ln(\varepsilon)| + C.$$

Démonstration. Dans cette démonstration, on utilise les coordonnées elliptiques sur \mathbb{C} . On construit une fonction harmonique sur \mathbb{C}^* notée H , qui ne dépend que de s . Dans ce but, notons :

$$\forall (\rho, s) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, c(\rho, s) = \rho \Phi(s).$$

On calcule

$$\nabla c(\rho, s) = \begin{pmatrix} a \cos(\psi^{-1}(s)) & -a\rho\psi^{-1}(s)' \sin(\psi^{-1}(s)) \\ b \sin(\psi^{-1}(s)) & b\rho\psi^{-1}(s)' \cos(\psi^{-1}(s)) \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla c(\rho, s)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\psi^{-1}(s))}{-a\rho\psi^{-1}(s)'} & \frac{\sin(\psi^{-1}(s))}{b\rho\psi^{-1}(s)'} \\ -\frac{\sin(\psi^{-1}(s))}{a\rho\psi^{-1}(s)'} & \frac{\cos(\psi^{-1}(s))}{b\rho\psi^{-1}(s)'} \end{pmatrix}$$

En notant $\forall(\rho, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $H(\rho, s) = f(s)$, on en déduit facilement que

$$\begin{aligned} \Delta H(\rho, s) &= \left(\frac{\sin^2(\psi^{-1}(s))}{a^2 \rho^2 (\psi^{-1}(s)')^2} + \frac{\cos^2(\psi^{-1}(s))}{b^2 \rho^2 (\psi^{-1}(s)')^2} \right) f''(s) \\ &\quad + 2 \frac{\sin(\psi^{-1}(s)) \cos(\psi^{-1}(s)) (b^2 - a^2)}{a^2 b^2 \rho^2 \psi^{-1}(s)'} f'(s) \\ &\quad - \left(\frac{\sin^2(\psi^{-1}(s))}{a^2} + \frac{\cos^2(\psi^{-1}(s))}{b^2} \right) \frac{\psi^{-1}(s)''}{\rho^2 (\psi^{-1}(s)')^3} f'(s). \end{aligned}$$

Comme on souhaite que $\Delta H(\rho, s) = 0$, en notant $\forall s \in \mathbb{R}_+^*$, $g(s) = \frac{a^2 \cos^2(\psi^{-1}(s)) + b^2 \sin^2(\psi^{-1}(s))}{\psi^{-1}(s)'}$, on obtient

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, (f'(s)g(s))' = 0$$

donc, il existe une constante C telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, f'(s) = \frac{C \psi^{-1}(s)'}{a^2 \cos^2(\psi^{-1}(s)) + b^2 \sin^2(\psi^{-1}(s))}.$$

On normalise alors f de manière à ce que $f(\mathcal{L}_\varepsilon) - f(0) = \mathcal{L}_\varepsilon$, ce qui conduit à

$$C = \frac{\mathcal{L}_\varepsilon}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta)}}.$$

Soit alors $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $J(t) = t \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{t^2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}$. Grâce à différents changements de variables, on calcule

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, J(t) = 4t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{t^2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 4t \int_0^{+\infty} \frac{du}{t^2 + u^2} = 2\pi$$

et, par suite,

$$C = \frac{ab\mathcal{L}_\varepsilon}{J(\frac{a}{b})} = \frac{ab\mathcal{L}_\varepsilon}{2\pi}.$$

On notera désormais

$$\forall(s, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, g_0(\rho\Phi(s)) = \Phi(H(\rho, s)).$$

On se donne d points distincts a_1, \dots, a_d de Ω et, on note

$$\forall(a, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{BE}_o(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a|_\varepsilon < r\}.$$

On se donne un réel strictement positif R tel que les disques elliptiques $(\mathcal{BE}_o(a_i, r))_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$ ont des adhérences deux à deux distinctes et incluses dans Ω . On note enfin

$$\Omega' = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^d (\mathcal{BE}_f(a_i, R)).$$

Après avoir entrepris ces constructions, on étudie le minimum de l'énergie de Ginzburg-Landau sur l'espace $\mathcal{H}_{g_0}^1(\mathcal{BE}_o(0, r), \mathbb{C})$ pour tout réel r strictement positif. Posons ainsi

$$\forall(\varepsilon, r) \in (R_+^*)^2, I(\varepsilon, r) = \underset{\mathcal{H}_{g_0}^1(\mathcal{BE}_o(0, r), \mathbb{C})}{\text{Min}}(E_\varepsilon).$$

Par changements de variables, on a

$$\forall(\varepsilon, r) \in (R_+^*)^2, I(\varepsilon, r) = I\left(\frac{\varepsilon}{r}, 1\right) = I\left(1, \frac{r}{\varepsilon}\right)$$

donc, en notant $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, I(t) = I(t, 1)$, on peut déterminer une estimation de $I(t)$ pour t suffisamment petit. En effet, si $0 < t_1 < t_2$, alors, on montre que

$$I(t_1) \leq I(t_2) + \frac{\mathcal{L}_\varepsilon^2}{4\pi} \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right).$$

Pour obtenir cette inégalité, il suffit de considérer un minimiseur u_2 de E_1 sur $\mathcal{H}_{g_0}^1(\mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_2}), \mathbb{C})$: on note alors u_1 , la fonction de $\mathcal{H}_{g_0}^1(\mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_1}), \mathbb{C})$ égale à u_2 sur $\mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_2})$ et à g_0 sur $\mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_1}) \setminus \mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_2})$. On a alors

$$I(t_1) \leq E_1(u_1) \leq I(t_2) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_1}) \setminus \mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_2})} |\nabla g_0|^2.$$

On calcule enfin en coordonnées elliptiques

$$\int_{\mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_1}) \setminus \mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_2})} |\nabla g_0|^2 = \int_{\frac{1}{t_2}}^{\frac{1}{t_1}} \int_0^{\mathcal{L}_\varepsilon} \frac{C^2 \psi^{-1}(s)' ds d\rho}{ab\rho(a^2 \cos^2(\psi^{-1}(s)) + b^2 \sin^2(\psi^{-1}(s)))} = \frac{C\mathcal{L}_\varepsilon}{ab} \ln\left(\frac{t_1}{t_2}\right)$$

ce qui mène à

$$\int_{\mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_1}) \setminus \mathcal{BE}_o(0, \frac{1}{t_2})} |\nabla g_0|^2 = \frac{\mathcal{L}_\varepsilon^2}{2\pi} \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right).$$

On en déduit immédiatement l'inégalité recherchée qui permet d'obtenir que, pour ε suffisamment petit,

$$I(\varepsilon, r) \leq I(1) + \frac{\mathcal{L}_\varepsilon^2}{4\pi} \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \leq C + \frac{\mathcal{L}_\varepsilon^2}{4\pi} |\ln(\varepsilon)|.$$

On pose alors

$$\forall x \in \partial\Omega', g'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \partial\Omega \\ g_i(x) = g_0(\rho, \theta) & \text{si } x = a_i + \rho\Phi(\theta) \in \partial\mathcal{BE}_o(a_i, r) \end{cases}$$

Comme $d^\rho(g', \partial\Omega') = 0$ et g' appartient à $\mathcal{C}^1(\partial\Omega', \mathcal{E})$, on sait qu'il existe une fonction v dans $\mathcal{C}^1(\Omega', \mathcal{E})$ égale à g' sur $\partial\Omega'$. Si on choisit des minimiseurs $(u_i)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$ de E_ε sur $\mathcal{H}_{g_i}^1(\mathcal{BE}_o(a_i, r), \mathbb{C})$ et, si on note

$$\forall x \in \Omega, u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in \Omega' \\ u_i(x) & \text{si } x \in \mathcal{BE}_f(a_i, r) \end{cases}$$

alors, u appartient à $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$ et vérifie

$$E_\varepsilon(u) \leq E_\varepsilon(v) + \sum_{i=1}^d I(\varepsilon, R)$$

donc, pour ε suffisamment petit,

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(u) \leq C + \frac{d\mathcal{L}_\varepsilon^2}{4\pi} |\ln(\varepsilon)|.$$

□

On essaye désormais de localiser l'énergie des minimiseurs pour pouvoir étudier leur convergence lorsque ε tend vers 0. On commence par le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *Il existe deux réels strictement positifs λ et μ tels que, pour tout x_0 dans Ω , et pour tout l strictement positif,*

$$\forall x \in \mathcal{B}_o(x_0, l), |u_\varepsilon(x)|_\varepsilon \geq \frac{1}{2}$$

dès que $\lambda\varepsilon \leq l \leq 1$ et $\int_{\Omega \cap \mathcal{B}_o(x_0, 2l)} w_\varepsilon^2 \leq \mu\varepsilon^2$.

Démonstration. De même qu'à l'étape 2 du théorème 1.2, d'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, il existe une constante C telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq C \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\Delta u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Grâce à la régularité de Ω , on en déduit que

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|_\varepsilon \leq \frac{C}{\varepsilon} |x - y|.$$

Soit alors $x_0 \in \Omega$. Supposons qu'il existe $x_1 \in \Omega \cap \mathcal{B}_o(x_0, l)$ tel que

$$|u_\varepsilon(x_1)|_\varepsilon < \frac{1}{2}.$$

On obtient

$$\forall x \in \Omega \cap \mathcal{B}_o(x_0, l), 1 - |u_\varepsilon(x)|_\varepsilon \geq \frac{1}{2} - \frac{Cl}{\varepsilon}$$

donc, si $\lambda = 4C$, alors

$$\forall x \in \Omega \cap \mathcal{B}_o(x_0, l), w_\varepsilon(x) \geq \frac{1}{4}$$

ce qui implique notamment que $\mathcal{B}_o(x_0, l)$ est incluse dans Ω . On en déduit aussi que

$$\int_{\mathcal{B}_o(x_0, l)} w_\varepsilon^2 \geq \frac{\pi l^2}{16} \geq \frac{\pi \lambda^2 \varepsilon^2}{16}$$

donc, si $\mu = \frac{\pi \lambda^2}{32}$, alors

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega \cap \mathcal{B}_o(x_0, 2l)} w_\varepsilon^2 \geq 2\mu$$

ce qui entraîne le résultat recherché. □

Dans l'esprit du corollaire précédent, on se donne pour ε suffisamment petit fixé une famille finie de points $(x_i^\varepsilon)_{i \in \llbracket 1, J_\varepsilon \rrbracket}$ de Ω telle que les disques ouverts de centres x_i^ε et de rayon $\lambda\varepsilon$ recouvrent Ω et les disques ouverts de centres x_i^ε et de rayon $\frac{\lambda\varepsilon}{4}$ soient deux à deux disjoints. On dira que $\mathcal{B}_o(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon)$ est un bon disque si

$$\int_{\mathcal{B}_o(x_i^\varepsilon, 2\lambda\varepsilon) \cap \Omega} w_\varepsilon^2 < \mu\varepsilon^2.$$

Sinon, $\mathcal{B}_o(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon)$ sera un mauvais disque : le nombre de mauvais disques sera noté J_ε et on supposera quitte à renuméroter, que les mauvais disques sont $(\mathcal{B}_o(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon))_{i \in \llbracket 1, J_\varepsilon \rrbracket}$. On verra par la suite que l'énergie d'un minimiseur est confinée autour des mauvais disques lorsque ε est suffisamment petit ce qui nous permettra d'étudier la convergence des minimiseurs en dehors de ces disques. On commence par montrer que le nombre de mauvais disques est borné indépendamment de ε .

Lemme 2.4. *Il existe un entier N tel que, pour ε suffisamment petit,*

$$J_\varepsilon \leq N.$$

Démonstration. On sait qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{i=1}^{I_\varepsilon} \int_{\mathcal{B}_o(x_i^\varepsilon, 2\lambda\varepsilon) \cap \Omega} w_\varepsilon^2 \leq C \int_{\Omega} w_\varepsilon^2.$$

D'après la propriété 2.2, il existe une constante C telle que, pour ε suffisamment petit,

$$\sum_{i=1}^{I_\varepsilon} \int_{\mathcal{B}_o(x_i^\varepsilon, 2\lambda\varepsilon) \cap \Omega} w_\varepsilon^2 \leq C\varepsilon^2$$

ce qui conduit à

$$\mu_{J_\varepsilon} \varepsilon^2 \leq C\varepsilon^2$$

et, à l'existence d'un entier N tel que

$$J_\varepsilon \leq N.$$

□

Quitte à diminuer J_ε et augmenter λ , on supposera de plus que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, J_\varepsilon \rrbracket^2, |x_i^\varepsilon - x_j^\varepsilon| \geq 8\lambda\varepsilon \text{ si } i \neq j.$$

En effet, s'il existe deux entiers i et j dans $\llbracket 1, J_\varepsilon \rrbracket^2$ tels que $|x_i^\varepsilon - x_j^\varepsilon| < 8\lambda\varepsilon$, alors, quitte à renuméroter, on peut supposer que $j = J_\varepsilon$. On note alors $\lambda' = 9\lambda$ et $J'_\varepsilon = J_\varepsilon - 1$. On vérifie que

$$\bigcup_{i=1}^{J_\varepsilon} \mathcal{B}_o(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{J'_\varepsilon} \mathcal{B}_o(x_i^\varepsilon, \lambda'\varepsilon).$$

On est ainsi ramené à démontrer l'inégalité précédente pour λ' et J'_ε : on conclut par une récurrence finie sur J_ε . On remarque que λ peut dépendre de ε mais appartient à l'ensemble $\{\lambda, 9\lambda, \dots, 9^N\lambda\}$: lorsqu'on extraira des sous-suites, on pourra toujours supposer que λ est constant et indépendant de ε et que l'inégalité précédente est vérifiée. On considère dans toute la suite de ce paragraphe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0. Quitte à extraire, on peut supposer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{\varepsilon_n} = J = Cs^{te}$$

et

$$\forall i \in \llbracket 1, J \rrbracket, x_i^{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_i \in \overline{\Omega}.$$

Comme les l_i ne sont pas a priori distincts, on note a_1, \dots, a_M les M points distincts ainsi obtenus, et

$$\forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, \Lambda_j = \{i \in \llbracket 1, J \rrbracket / l_i = a_j\}.$$

On a les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 1, J \rrbracket, \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega \cap \mathcal{B}_o(x_i^{\varepsilon_n}, 2\lambda\varepsilon_n)} w_{\varepsilon_n}^2 \geq \mu\varepsilon_n^2 \\ \forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket, |x_i^{\varepsilon_n} - x_j^{\varepsilon_n}| \geq 8\lambda\varepsilon_n \text{ si } i \neq j. \end{array} \right.$$

On observe aussi la propriété suivante :

Propriété 2.4. *Pour n suffisamment grand, on a*

$$\forall x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^J \mathcal{B}_o(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n), |u_{\varepsilon_n}(x)|_\varepsilon \geq \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Soit $x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^J \mathcal{B}_o(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n)$. Il existe un bon disque $\mathcal{B}_o(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n)$ tel que

$$x \in \mathcal{B}_o(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n)$$

donc, d'après le corollaire 2.1,

$$|u_{\varepsilon_n}(x)|_{\mathcal{E}} \geq \frac{1}{2}.$$

□

Pour des raisons techniques, on est alors amené à agrandir Ω en un ouvert Ω' borné, régulier, simplement connexe tel que

$$\overline{\Omega} \subset \Omega'.$$

On se donne une application g' dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \setminus \Omega, \mathcal{E})$ telle que g' est égale à g sur $\partial\Omega$. Par la suite, on étendra systématiquement toute application de $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$ par g' sur $\overline{\Omega'} \setminus \Omega$. On se donne alors un réel strictement positif η strictement inférieur à la distance de $\partial\Omega$ à $\partial\Omega'$ et à la moitié de la distance minimale entre deux points a_i distincts. On montre enfin le lemme suivant :

Lemme 2.5. *Il existe un entier $N(\eta)$ et une constante C tels que, pour tout entier $n \geq N(\eta)$, les degrés d_i^n de u_{ε_n} sur les cercles de centres $x_i^{\varepsilon_n}$ et de rayon $\lambda\varepsilon_n$ et les degrés k_j^n de u_{ε_n} sur les cercles de centres a_j et de rayon $\frac{\eta}{2}$ sont définis et vérifient*

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, J \rrbracket, |d_i^n| \leq C \\ \forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, k_j^n = \sum_{i \in \Lambda_j} d_i^n \end{cases}$$

Démonstration. Il existe un entier $N(\eta)$ tel que, pour tout entier $n \geq N(\eta)$,

$$\bigcup_{i=1}^J \mathcal{B}_o(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n) \subset \bigcup_{i=1}^M \mathcal{B}_o(a_j, \frac{\eta}{2})$$

or, d'après la propriété précédente,

$$\forall x \in \mathcal{S}(a_j, \frac{\eta}{2}), |u_{\varepsilon_n}(x)|_{\mathcal{E}} \geq \frac{1}{2}$$

donc, k_j^n est défini, et, de même, d_i^n est défini. De plus, on a

$$d_i^n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n)} \frac{u_{\varepsilon_n} \wedge \partial_{\tau} u_{\varepsilon_n}}{|u_{\varepsilon_n}|^2}$$

donc, d'après les propriétés précédentes, et le fait qu'il existe une constante C telle que

$$\|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon_n}$$

on obtient

$$|d_i^n| \leq C \int_{\mathcal{S}(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda\varepsilon_n)} |\partial_{\tau} u_{\varepsilon_n}| \leq C.$$

On a par ailleurs évidemment

$$\forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, k_j^n = \sum_{i \in \Lambda_j} d_i^n.$$

□

Dans la suite, on supposera, quitte à extraire une fois de plus, que les degrés $(d_i)_{i \in \llbracket 1, J \rrbracket}$ et $(k_j)_{j \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ sont indépendants de la variable n . On utilisera de plus la notation suivante :

$$\forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, \forall n \in \llbracket N(\eta), +\infty \llbracket, \forall \mu \in \left[\frac{\eta}{2}, \eta\right], \Omega_j^n(\mu) = \mathcal{B}_o(a_j, \mu) \setminus \bigcup_{i \in \Lambda_j} \mathcal{B}_o(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda_{\varepsilon_n}).$$

Propriété 2.5. *Il existe une constante C telle que*

$$\forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, \forall n \in \llbracket N(\eta), +\infty \llbracket, \int_{\Omega_j^n(\eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} |k_j| \ln\left(\frac{\eta}{2\varepsilon_n}\right) - C.$$

Démonstration. On note ici

$$\forall n \in \llbracket N(\eta), +\infty \llbracket, \forall x \in \Omega_j^n(\eta), v_{\varepsilon_n}(x) = \frac{u_{\varepsilon_n}(x)}{\rho_{\varepsilon_n}(x)},$$

et on se donne un réel μ dans l'intervalle $[\frac{\eta}{2}, \eta]$ que l'on déterminera par la suite. On commence par constater que

$$\int_{\Omega_j^n(\eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq \int_{\Omega_j^n(\mu)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2,$$

Ensuite, comme v_{ε_n} est une fonction de $\mathcal{H}^1(\Omega_j^n(\mu), \mathcal{E})$ de degré k_j sur $\mathcal{S}(a_j, \mu)$ et de degré d_i sur les cercles $\mathcal{S}(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda_{\varepsilon_n})$ inclus dans $\Omega_j^n(\mu)$, on sait d'après le théorème 2.2 qu'il existe une constante C telle que

$$\int_{\Omega_j^n(\mu)} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} |k_j| \ln\left(\frac{\mu}{\varepsilon_n}\right) - C \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} |k_j| \ln\left(\frac{\eta}{2\varepsilon_n}\right) - C.$$

Par ailleurs,

$$u_{\varepsilon_n} = \rho_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}$$

ce qui conduit à

$$|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 = |v_{\varepsilon_n}|^2 |\nabla \rho_{\varepsilon_n}|^2 + \rho_{\varepsilon_n}^2 |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{2} \nabla \rho_{\varepsilon_n}^2 \cdot \nabla |v_{\varepsilon_n}|^2.$$

De plus, on a

$$\int_{\Omega_j^n(\mu)} \rho_{\varepsilon_n}^2 |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 = \int_{\Omega_j^n(\mu)} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 - \int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2.$$

Comme $|\nabla u_{\varepsilon_n}|_{\mathcal{E}}^2 = \rho_{\varepsilon_n}^2 |\nabla v_{\varepsilon_n}|_{\mathcal{E}}^2 + |\nabla \rho_{\varepsilon_n}|_{\mathcal{E}}^2$ et $\rho_{\varepsilon_n} \geq \frac{1}{2}$ sur $\Omega_j^n(\mu)$, il existe une constante C telle que

$$|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \leq C |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2$$

ce qui entraîne

$$\int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \leq C \int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq C \|w_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^4(\Omega)}^2$$

et, d'après la propriété 2.2,

$$\int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \leq C \varepsilon_n \|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^4(\Omega)}^2.$$

D'après cette même propriété, on obtient

$$\|\Delta u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon_n^2} \|w_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon_n}$$

ce qui conduit à

$$\|u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon_n}.$$

Grâce au lemme de Gagliardo-Nirenberg , il existe une constante C ne dépendant que de Ω telle que

$$\|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^4(\Omega)}^2 \leq C \|u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \|u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon_n}$$

donc,

$$\int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \leq C$$

et, finalement,

$$\int_{\Omega_j^n(\mu)} \rho_{\varepsilon_n}^2 |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} |k_j| \ln\left(\frac{\eta}{2\varepsilon_n}\right) - C.$$

On a alors grâce au théorème de Stokes

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_j^n(\mu)} \nabla \rho_{\varepsilon_n}^2 \cdot \nabla |v_{\varepsilon_n}|^2 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_j^n(\mu)} \nabla w_{\varepsilon_n} \cdot \nabla |v_{\varepsilon_n}|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} \Delta |v_{\varepsilon_n}|^2 - \int_{\partial\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} \partial_\nu |v_{\varepsilon_n}|^2.$$

On calcule alors

$$\Delta |v_{\varepsilon_n}|^2 = 2|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 + 2v_{\varepsilon_n} \cdot \Delta v_{\varepsilon_n},$$

ce qui permet d'affirmer

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} \Delta |v_{\varepsilon_n}|^2 \geq \int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n} \cdot \Delta v_{\varepsilon_n}.$$

On montre ensuite que

$$\Delta v_{\varepsilon_n} = \frac{2}{\rho_{\varepsilon_n}^2} |\nabla \rho_{\varepsilon_n}|^2 u_{\varepsilon_n} - \frac{2}{\rho_{\varepsilon_n}^2} \nabla \rho_{\varepsilon_n} \cdot \nabla u_{\varepsilon_n} + \frac{1}{\rho_{\varepsilon_n}} \Delta u_{\varepsilon_n} - \frac{1}{\rho_{\varepsilon_n}^2} \Delta \rho_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}.$$

D'après les estimations précédentes, on en déduit

$$\|\Delta v_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_j^n(\mu))} \leq C(\|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^4(\Omega)} + \|\Delta u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|\Delta \rho_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_j^n(\mu))}) \leq \frac{C}{\varepsilon_n} + C\|\Delta \rho_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_j^n(\mu))}.$$

On remarque enfin que ρ_{ε_n} vérifie l'équation

$$-\Delta \rho_{\varepsilon_n} + \rho_{\varepsilon_n} |\nabla v_{\varepsilon_n}|_{\mathcal{E}}^2 = \frac{\rho_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^2} \left(\frac{v_{\varepsilon_n 1}^2}{a^4} + \frac{v_{\varepsilon_n 2}^2}{b^4} \right) w_{\varepsilon_n}$$

ce qui permet grâce aux estimations précédentes d'aboutir à

$$\begin{cases} \|\Delta \rho_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_j^n(\mu))} \leq \frac{C}{\varepsilon_n} \\ \|\Delta v_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_j^n(\mu))} \leq \frac{C}{\varepsilon_n} \end{cases}$$

et, en définitive, à

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} \Delta |v_{\varepsilon_n}|^2 \geq -C \|w_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|\Delta v_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_j^n(\mu))} \geq -C.$$

Par ailleurs, on a

$$\int_{\partial\Omega_j^n(\mu)} w_{\varepsilon_n} \partial_\nu |v_{\varepsilon_n}|^2 = \int_{\mathcal{S}(a_j, \mu)} w_{\varepsilon_n} \partial_\nu |v_{\varepsilon_n}|^2 - \sum_{i \in \Lambda_j} \int_{\mathcal{S}(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda_{\varepsilon_n})} w_{\varepsilon_n} \partial_\nu |v_{\varepsilon_n}|^2.$$

Comme la fonction w_{ε_n} est bornée par 1, et $\|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon_n}$, on obtient

$$\left| \sum_{i \in \Lambda_j} \int_{\mathcal{S}(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda_{\varepsilon_n})} w_{\varepsilon_n} \partial_\nu |v_{\varepsilon_n}|^2 \right| \leq C \sum_{i \in \Lambda_j} \int_{\mathcal{S}(x_i^{\varepsilon_n}, \lambda_{\varepsilon_n})} |\nabla u_{\varepsilon_n}| \leq C.$$

En outre, on a d'après les estimations précédentes, et notamment, la propriété 2.3,

$$\int_{\frac{\eta}{2}}^{\eta} \int_{\mathcal{S}(a_j, \mu)} |w_{\varepsilon_n} \partial_\nu |v_{\varepsilon_n}|^2 d\mu \leq C \|w_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq C \varepsilon_n |\ln \varepsilon_n|^{\frac{1}{2}},$$

donc, il existe un réel μ dans l'intervalle $[\frac{\eta}{2}, \eta]$ qui vérifie

$$\left| \int_{\mathcal{S}(a_j, \mu)} w_{\varepsilon_n} \partial_\nu |v_{\varepsilon_n}|^2 \right| \leq C \varepsilon_n |\ln \varepsilon_n|^{\frac{1}{2}}.$$

En choisissant μ de la sorte, on aboutit finalement à

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_j^n(\mu)} \nabla \rho_{\varepsilon_n}^2 \cdot \nabla |v_{\varepsilon_n}|^2 \geq -C$$

ce qui conduit directement à l'inégalité recherchée

$$\int_{\Omega_j^n(\eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} |k_j| \ln\left(\frac{\eta}{2\varepsilon_n}\right) - C.$$

□

On déduit de cette propriété le corollaire suivant qui nous permettra ensuite de déterminer la valeur des $(k_j)_{j \in \llbracket 1, M \rrbracket}$.

Lemme 2.6.

$$\forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, k_j \geq 0.$$

Démonstration. Grâce à la propriété 2.3, on a pour n suffisamment grand,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} d \ln(|\varepsilon_n|) + C.$$

Comme

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_j^n(\eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} \sum_{j=1}^M |k_j| \ln\left(\frac{\eta}{\varepsilon_n}\right) - C,$$

on a

$$\sum_{j=1}^M |k_j| + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(1) \leq d + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(1)$$

et,

$$\sum_{j=1}^M |k_j| \leq d.$$

Enfin, on a bien sûr

$$\sum_{j=1}^M k_j = d$$

ce qui mène à

$$\forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, k_j \geq 0.$$

□

On prouve enfin le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Il existe une constante C telle que, pour η suffisamment petit,*

$$\forall n \in \llbracket N(\eta), +\infty[, \int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{B}_o(a_j, \eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} d |\ln(\frac{\eta}{2})| + C.$$

Démonstration. Soit $n \in \llbracket N(\eta), +\infty[$. Il existe une constante strictement positive C telle que

$$\int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{B}_o(a_j, \eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 - \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_j^n(\eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + C$$

donc , d'après les propriétés 2.3, et 2.6,

$$\int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{B}_o(a_j, \eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq -\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} d \ln(\varepsilon_n) - \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} \sum_{j=1}^M k_j \ln(\frac{\eta}{2\varepsilon_n}) + C$$

et, comme $\sum_{j=1}^M k_j = d$, on obtient

$$\int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{B}_o(a_j, \eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} d |\ln(\frac{\eta}{2})| + C.$$

□

On déduit de ce théorème que $(u_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{H}_{loc}^1(\Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_M\}, \mathbb{C})$ ce qui va nous permettre d'étudier le comportement asymptotique de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$.

2.3 Analyse asymptotique des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau.

On commence par l'étude d'un problème de minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau dans le cas du degré 0. On considère ainsi un ouvert Ω régulier, bornée et simplement connexe de \mathbb{C} et une suite de fonctions $(g_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ de classe \mathcal{C}^1 de $\partial\Omega$ dans \mathbb{C} qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |g_{\varepsilon}|_{\mathcal{E}} \leq 1 \text{ sur } \partial\Omega \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, d^o(g_{\varepsilon}, \partial\Omega) = 0 \\ (g_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} \text{ est bornée dans } \mathcal{H}^1(\partial\Omega, \mathbb{C}) \\ (\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial\Omega} (1 - |g_{\varepsilon}|_{\mathcal{E}}^2)^2)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} \text{ est bornée} \\ \exists g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega, \mathbb{C}) / g_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g \text{ dans } \mathcal{C}^0(\partial\Omega, \mathbb{C}). \end{array} \right.$$

On considère aussi une suite $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ de minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau E_{ε} sur $\mathcal{H}_{g_{\varepsilon}}^1(\Omega, \mathbb{C})$: l'existence de cette suite est assurée par un lemme analogue au lemme 1.3. Grâce aux hypothèses précédentes, on constate que g est continue sur $\partial\Omega$ à valeurs dans \mathcal{E} et que son degré sur $\partial\Omega$ est nul. En utilisant un lemme analogue au lemme 1.1, on construit une fonction s_0 continue de $\partial\Omega$ dans \mathbb{R} telle que

$$g = \Phi(s_0).$$

On note alors s_* la fonction harmonique sur Ω égale à s_0 sur $\partial\Omega$ et,

$$u_* = \Phi(s_*).$$

Avec ces notations, on démontre le théorème suivant :

Théorème 2.4. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers u_* lorsque ε tend vers 0 dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$ et, dans tous les espaces $\mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$ pour α dans $[0, 1[$.

Démonstration. La démonstration de ce résultat est semblable à celle du théorème 1.2 ou, à celle de l'article de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH2]. Elle se décompose en les étapes suivantes :

Étape 1. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers u_* dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$ lorsque ε tend vers 0 et

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Comme les fonctions g_ε ont un degré 0 sur $\partial\Omega$ et convergent vers g lorsque ε tend vers 0, il est possible de construire une suite de fonctions $(s_{\varepsilon_0})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ de classe \mathcal{C}^1 de $\partial\Omega$ dans \mathbb{R} qui convergent vers s_0 lorsque ε tend vers 0 et, qui vérifient

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, g_\varepsilon = |g_\varepsilon| \varepsilon \Phi(s_{\varepsilon_0}).$$

Considérons alors les solutions $(\eta_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ et, $(\sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ des équations suivantes :

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta \eta_\varepsilon + \eta_\varepsilon = 1 \text{ sur } \Omega \\ \eta_\varepsilon = |g_\varepsilon| \varepsilon \text{ sur } \partial\Omega \\ \Delta \sigma_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Omega \\ \sigma_\varepsilon = s_{\varepsilon_0} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De même que dans l'article de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH2], on prouve qu'il existe une constante C qui vérifie

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 \leq C\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - \eta_\varepsilon^2)^2 \leq C\varepsilon. \end{cases}$$

De plus, on a d'après le principe du maximum,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \eta_\varepsilon \leq 1$$

donc, comme $\eta_\varepsilon \Phi(\sigma_\varepsilon)$ appartient à $\mathcal{H}_{g_\varepsilon}^1(\Omega, \mathbb{C})$, on est conduit à

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(\eta_\varepsilon \Phi(\sigma_\varepsilon)) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \sigma_\varepsilon|^2 \eta_\varepsilon^2 + |\nabla \eta_\varepsilon|^2 |\Phi(\sigma_\varepsilon)|^2) + \frac{1}{2} \nabla(\eta_\varepsilon^2) \cdot \nabla |\Phi(\sigma_\varepsilon)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - \eta_\varepsilon^2)^2.$$

D'après les inégalités précédentes, il existe une constante C telle que

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \sigma_\varepsilon|^2 + C\varepsilon + C\sqrt{\varepsilon} \|\nabla \sigma_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Comme $(s_{\varepsilon_0})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^1(\partial\Omega, \mathbb{R})$ et converge vers s_0 dans $\mathcal{C}^0(\partial\Omega, \mathbb{R})$, grâce à l'injection compacte de $\mathcal{H}^1(\partial\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega, \mathbb{R})$, $(s_{\varepsilon_0})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers s_0 dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega, \mathbb{R})$. Ainsi, comme $\Delta(\sigma_\varepsilon - s_*) = 0$ sur Ω et, $\sigma_\varepsilon = s_{\varepsilon_0}$ sur $\partial\Omega$, $(\sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers s_* dans $\mathcal{H}^1(\partial\Omega, \mathbb{R})$. D'après l'inéquation précédente, on en déduit que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$, donc, quitte à extraire, il existe une fonction v dans $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathbb{C})$ telle que

$$\begin{cases} u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v \text{ dans } \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}) \\ u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v \text{ dans } \mathcal{L}^4(\Omega, \mathbb{C}) \\ u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v \text{ pp.} \end{cases}$$

Comme

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \sigma_{\varepsilon}|^2 + C\varepsilon + C\sqrt{\varepsilon} \|\nabla \sigma_{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

on a à la limite

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla s_*|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_*|^2.$$

Par ailleurs, d'après la propriété 2.2,

$$\int_{\Omega} (1 - |u_{\varepsilon}|_{\mathcal{E}}^2)^2 \leq C\varepsilon^2$$

donc, à la limite,

$$\int_{\Omega} (1 - |v|_{\mathcal{E}}^2)^2 = 0$$

ce qui prouve que v appartient à $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$. D'après le théorème 1.1, on sait que u_* est l'unique minimiseur de l'intégrale de Dirichlet sur $\mathcal{H}_g^1(\Omega, \mathcal{E})$ ce qui prouve que v est égale à u_* . On remarque alors que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_*|^2$$

ce qui prouve que $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers u_* dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$ lorsque ε tend vers 0. Comme

$$E_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \sigma_{\varepsilon}|^2 + C\varepsilon + C\sqrt{\varepsilon} \|\nabla \sigma_{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

on constate que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u_{\varepsilon}|_{\mathcal{E}}^2)^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Etape 2. Soit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \rho_{\varepsilon} = |u_{\varepsilon}|_{\mathcal{E}}$. $(\rho_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge uniformément vers 1 sur Ω .

D'après le lemme de Gagliardo-Nirenberg démontré dans l'article de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH2], pour tout compact K inclus dans Ω , il existe une constante C telle que pour tout ε suffisamment petit,

$$\|\nabla u_{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^{\infty}(K)} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

En suivant la démonstration de l'étape 3 du théorème 1.2, on en déduit que

$$\rho_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 \text{ dans } \mathcal{L}^{\infty}(K).$$

Ainsi, par l'absurde, si $(\rho_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ ne converge pas uniformément vers 1 sur Ω , il existe un réel strictement positif δ , un point a de $\partial\Omega$, une suite de réels strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et, une suite de points $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω qui tend vers a , tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varepsilon_n}(a_n)|_{\mathcal{E}} \leq 1 - \delta.$$

On note alors pour tout entier n , d_n , la distance de a_n à $\partial\Omega$ et on considère une suite de réels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < r_n \leq \frac{d_n}{2}.$$

On verra comment déterminer $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la suite. D'après le lemme de Gagliardo-Nirenberg démontré dans l'article de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH2], il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, |\nabla u_{\varepsilon_n}(x)|^2 \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon_n^2} + \frac{1}{d(x, \partial\Omega)^2} \right).$$

Ainsi, on a pour tout élément x de $\mathcal{B}_o(a_n, r_n)$,

$$|\nabla u_{\varepsilon_n}(x)|^2 \leq C\left(\frac{1}{\varepsilon_n^2} + \frac{1}{d_n^2}\right)$$

ce qui conduit à

$$|u_{\varepsilon_n}(x)|_{\mathcal{E}} \leq |u_{\varepsilon_n}(a_n)|_{\mathcal{E}} + Cr_n\left(\frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{d_n}\right)$$

et

$$1 - |u_{\varepsilon_n}(x)|_{\mathcal{E}} \geq \delta - Cr_n\left(\frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{d_n}\right).$$

Si on choisit alors comme suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \text{Min}\left\{\frac{\delta\varepsilon_n}{4C}, \frac{\delta d_n}{4C}, \frac{d_n}{2}\right\}$$

alors,

$$\forall x \in \mathcal{B}_o(a_n, r_n), 1 - \rho_{\varepsilon_n}(x) \geq \frac{\delta}{2}$$

ce qui induit que

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\Omega} (1 - \rho_{\varepsilon_n}^2)^2 \geq \frac{\pi\delta^2 r_n^2}{4\varepsilon_n^2}$$

et qui permet de conclure que

$$\frac{r_n}{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

c'est-à-dire que,

$$\frac{d_n}{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On va maintenant utiliser un argument de blow-up pour conclure. On note ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Omega_n = \{y \in \mathbb{C}/d_n y + a_n \in \Omega\}.$$

Quitte à composer par une rotation, on supposera que la suite $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ "converge" vers $\Omega_{\infty} =]-1, \infty[\times \mathbb{R}$. Considérons alors les fonctions $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \Omega_n, v_n(y) = u_{\varepsilon_n}(d_n y + a_n).$$

Ces fonctions vérifient les équations

$$-L(v_n) = \frac{d_n^2}{\varepsilon_n^2} v_n (1 - |v_n|_{\mathcal{E}}^2) \text{ sur } \Omega$$

et, la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq C.$$

Si K est un compact de Ω_{∞} , on sait donc que, quitte à extraire, il existe une fonction v_K dans $\mathcal{H}^1(K, \mathbb{C})$ telle que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers v_K dans $\mathcal{H}^1(K, \mathbb{C})$: grâce au procédé diagonal de Cantor, on constate qu'à une extraction près, il existe une fonction v dans $\mathcal{H}^1(\Omega_{\infty}, \mathbb{C})$ telle que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers v dans $\mathcal{H}^1(\Omega_{\infty}, \mathbb{C})$. Par ailleurs, d'après le principe du maximum, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n|_{\mathcal{E}} \leq 1 \text{ sur } \Omega_n$$

ce qui entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\Delta v_n|_{\mathcal{E}} \leq C \frac{d_n^2}{\varepsilon_n^2} \text{ sur } \Omega_n$$

puis,

$$\Delta v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } \mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega_\infty, \mathbb{C})$$

et, enfin,

$$\Delta v = 0 \text{ sur } \Omega_\infty.$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, -L(v_n - v) = \frac{d^2}{\varepsilon_n^2} v_n (1 - |v_n|_{\mathcal{E}}^2)$ sur Ω , on sait que pour tout p dans $]1, +\infty[$, et pour tout compact K de Ω_∞ ,

$$\Delta(v_n - v) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } \mathcal{L}^p(K, \mathbb{C})$$

ce qui implique que

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \text{ dans } W^{2,p}(K, \mathbb{C})$$

et, grâce aux injections de Sobolev, que

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \text{ dans } \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}).$$

Supposons alors que 0 appartienne à K . On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n(0) = u_{\varepsilon_n}(a_n)$$

ce qui conduit à

$$|v(0)|_{\mathcal{E}} \leq 1 - \delta.$$

De plus, $(g_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers g dans $\mathcal{C}^0(\partial\Omega, \mathbb{C})$ ce qui implique que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $g(a)$ sur $\partial\Omega_\infty$. Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers v dans $\mathcal{H}^1(\Omega_\infty, \mathbb{C})$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 \leq C,$$

on obtient que

$$\int_{\Omega_\infty} |\nabla v|^2 \leq C$$

et, d'après le théorème de Liouville, que v est constante, égale à $g(a)$ sur Ω_∞ ce qui est contradictoire avec le fait que

$$|v(0)|_{\mathcal{E}} \leq 1 - \delta.$$

On aboutit ainsi à ce que $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge uniformément vers 1 sur Ω .

Étape 3. *Il existe une constante C telle que, pour ε suffisamment petit,*

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 \leq C.$$

La démonstration est analogue à celle de l'étape 4 du théorème 1.2. Considérons ainsi un champ de vecteurs régulier V défini sur Ω et coïncidant avec la normale extérieure ν sur $\partial\Omega$. Pour tout ε strictement positif, on obtient grâce à la formule de Stokes,

$$\int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \cdot (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 - \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (V \cdot \nabla u_\varepsilon).$$

Comme

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (V_1 \partial_1 |\partial_i u_\varepsilon|^2 + V_2 \partial_2 |\partial_i u_\varepsilon|^2) + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\partial_i V_1 \partial_1 u_\varepsilon \cdot \partial_i u_\varepsilon + \partial_i V_2 \partial_2 u_\varepsilon \cdot \partial_i u_\varepsilon)$$

et comme $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$, on obtient à nouveau grâce à la formule de Stokes,

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\partial_1 V_1 |\partial_i u_\varepsilon|^2 + \partial_2 V_2 |\partial_i u_\varepsilon|^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} |\partial_i u_\varepsilon|^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1).$$

ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1)$$

puis, à

$$\int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \cdot (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1).$$

Par ailleurs, on a grâce à l'équation vérifiée par u_ε et à la formule de Stokes,

$$\int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \cdot (V \cdot \nabla u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (V \cdot \nabla u_\varepsilon) \cdot \varepsilon u_\varepsilon w_\varepsilon = \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \operatorname{div}(V) - \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\partial\Omega} w_\varepsilon^2 = O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1).$$

On conclut alors qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu u_\varepsilon|^2 \leq C.$$

Etape 4. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^2(\Omega, \mathbb{C})$.

La démonstration est identique à celle de l'étape 5 du théorème 1.2 à laquelle on pourra se référer.

Etape 5. $(\frac{w_\varepsilon}{\varepsilon^2})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$.

Comme $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{H}^2(\Omega, \mathbb{C})$, d'après les injections de Sobolev, $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{L}^q(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout q supérieur à 1. Si on note comme précédemment

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, A_\varepsilon = \frac{1}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2$$

on sait d'après l'étape 5 du théorème 1.2, et l'étape 2 précédente, que pour ε suffisamment petit, il existe une constante C telle que

$$-\Delta A_\varepsilon \leq C \frac{A_\varepsilon^2}{|u_\varepsilon|_{\mathcal{E}}^2} \leq C |\nabla u_\varepsilon|^4.$$

Considérons alors pour ε suffisamment petit, les solutions f_ε et h_ε des équations suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta f_\varepsilon = C |\nabla u_\varepsilon|^4 \text{ sur } \Omega \\ f_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta h_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Omega \\ h_\varepsilon = A_\varepsilon \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On obtient pour ε suffisamment petit,

$$\begin{cases} \Delta(A_\varepsilon - f_\varepsilon - h_\varepsilon) \geq 0 \text{ sur } \Omega \\ A_\varepsilon = f_\varepsilon + h_\varepsilon \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

donc, d'après le principe du maximum,

$$0 \leq A_\varepsilon \leq f_\varepsilon + h_\varepsilon \text{ sur } \Omega.$$

Par ailleurs, on sait que $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $W^{2,q}(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout q strictement supérieur à 1, donc, grâce aux injections de Sobolev, dans $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. On sait aussi grâce aux inégalités du type de celle de Cacciopoli que $(h_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ ce qui prouve que $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bornée dans $\mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. Par ailleurs, on a pour tout ε strictement positif,

$$-\Delta w_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{u_{\varepsilon 1}^2}{a^4} + \frac{u_{\varepsilon 2}^2}{b^4} \right) w_\varepsilon = 2|\nabla u_\varepsilon|_{\mathcal{E}}^2 \text{ sur } \Omega.$$

Il existe donc une constante C telle que

$$-\Delta w_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{u_{\varepsilon 1}^2}{a^4} + \frac{u_{\varepsilon 2}^2}{b^4} \right) w_\varepsilon \leq C \text{ sur } \Omega.$$

Comme $|u_\varepsilon|_{\mathcal{E}} \leq \frac{1}{2}$ sur Ω pour ε suffisamment petit, il existe une constante α telle que

$$-\Delta w_\varepsilon + \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} w_\varepsilon \leq C.$$

Soit alors K un compact de Ω et, δ la distance de K à $\partial\Omega$. On supposera quitte à translater que 0 appartient à K . Considérons enfin la solution v_ε des équations suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} v_\varepsilon = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_o(0, \frac{\delta}{2}) \\ v_\varepsilon = 1 \text{ sur } \mathcal{S}(0, \frac{\delta}{2}). \end{cases}$$

D'après le principe du maximum, on sait que pour tout ε suffisamment petit,

$$\forall x \in \mathcal{B}_o(0, \frac{\delta}{2}), v_\varepsilon(x) \leq e^{\frac{\alpha}{2\varepsilon\delta}(|x|^2 - \frac{\delta^2}{4})}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} -\Delta(w_\varepsilon - v_\varepsilon) + \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}(w_\varepsilon - v_\varepsilon) \leq C \text{ sur } \mathcal{B}_o(0, \frac{\delta}{2}) \\ w_\varepsilon - v_\varepsilon \leq 0 \text{ sur } \mathcal{S}(0, \frac{\delta}{2}) \end{cases}$$

d'où, d'après le principe du maximum,

$$\forall x \in \mathcal{B}_o(0, \frac{\delta}{4}), w_\varepsilon(x) \leq v_\varepsilon(x) + C \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \leq C\varepsilon^2 + e^{-\frac{3\delta\alpha}{16\varepsilon}}$$

ce qui induit que

$$\forall x \in \mathcal{B}_o(0, \frac{\delta}{4}), \frac{w_\varepsilon(x)}{\varepsilon^2} \leq C$$

dès que ε est suffisamment petit. On conclut ainsi que $(\frac{w_\varepsilon}{\varepsilon^2})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est bien bornée dans $\mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$.

Etape 6. Soit α dans $[0, 1[$. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers u_* dans $\mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$.

La démonstration est identique à celle de l'étape 7 du théorème 1.2. On remarque notamment grâce à l'étape 4 précédente et, grâce aux injections de Sobolev que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ converge vers u_* dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1. \square

Le théorème précédent nous permet d'étudier la convergence des minimiseurs $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ de l'énergie de Ginzburg-Landau lorsque ε tend vers 0. En considérant ainsi la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du paragraphe précédent, on démontre le théorème suivant :

Théorème 2.5. *Il existe d points a_1, \dots, a_d de Ω et, une fonction u_* dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_d\}, \mathcal{E})$ tels que, quitte à extraire, $(u_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u_* dans $\mathcal{H}_{loc}^1(\overline{\Omega} \setminus \{a_1, \dots, a_d\}, \mathbb{C})$ et, dans $\mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \setminus \{a_1, \dots, a_d\}, \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1. u_* vérifie de plus les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} -L(u_*) = u_* |u_* \wedge \nabla u_*|^2 \text{ sur } \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_d\} \\ u_* = g \text{ sur } \partial\Omega \\ \forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, d^o(u_*, a_j) = k_j = 1. \end{cases}$$

Démonstration. Dans le paragraphe précédent, on a montré qu'il existait M points a_1, \dots, a_M de $\overline{\Omega}$ tels que $(u_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $\mathcal{H}_{loc}^1(\Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_M\}, \mathbb{C})$. Quitte à extraire, d'après le procédé diagonal de Cantor, il existe une fonction u_* dans $\mathcal{H}_{loc}^1(\Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_M\}, \mathbb{C})$ telle que pour tout compact K de $\Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_M\}$,

$$\begin{cases} u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_* \text{ dans } \mathcal{H}^1(K, \mathbb{C}) \\ u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_* \text{ pp.} \end{cases}$$

D'après la propriété 2.2, il existe une constante C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\Omega} w_{\varepsilon_n}^2 \leq C \varepsilon_n^2$$

ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} (1 - |u_*|_{\varepsilon}^2)^2 = 0$$

et au fait que u_* est à valeurs dans \mathcal{E} . On sait par ailleurs grâce à la convergence faible de la suite $(u_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}_{loc}^1(\Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_M\}, \mathbb{C})$ que u_* est égale à g sur $\partial\Omega$. Considérons alors un point x_0 de $\Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_M\}$ et un réel strictement positif R tel que

$$\mathcal{B}_f(x_0, 2R) \subset \Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_M\}.$$

On sait qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \int_{\mathcal{B}_o(x_0, 2R)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq C \\ \int_{\mathcal{B}_o(x_0, 2R)} w_{\varepsilon_n}^2 \leq C \varepsilon_n^2 \end{cases}$$

donc, d'après le théorème de Fubini, quitte à extraire, il existe un réel R' compris entre R et, $2R$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \int_{\mathcal{S}(x_0, R')} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq C \\ \int_{\mathcal{S}(x_0, R')} w_{\varepsilon_n}^2 \leq C \varepsilon_n^2 \end{cases}.$$

Comme $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}(x_0, R'), \mathbb{C})$ s'injecte de manière compacte dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{S}(x_0, R'), \mathbb{C})$, on en déduit que $(u_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u_* dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{S}(x_0, R'), \mathbb{C})$. En outre, pour n suffisamment grand, on a

$$\forall x \in \mathcal{B}_f(x_0, R'), |u_{\varepsilon_n}(x)|_{\varepsilon} \geq \frac{1}{2}$$

ce qui implique que

$$d^o(u_{\varepsilon_n}, \mathcal{S}(x_0, R')) = 0$$

puis, que

$$d^o(u_*, \mathcal{S}(x_0, R')) = 0.$$

On peut désormais appliquer le théorème 2.4 : si on note s_0 la fonction de $\mathcal{C}^0(\mathcal{S}(x_0, R'), \mathbb{R})$ qui vérifie

$$u_* = \Phi(s_0) \text{ sur } \mathcal{S}(x_0, R')$$

s_* la solution des équations

$$\begin{cases} \Delta s_* = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_o(x_0, R') \\ s_* = s_0 \text{ sur } \mathcal{S}(x_0, R') \end{cases}$$

et,

$$v_* = \Phi(s_*)$$

on obtient d'après le théorème 2.4,

$$\begin{cases} u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v_* \text{ dans } \mathcal{H}^1(\mathcal{B}_o(x_0, R'), \mathbb{C}) \\ \forall \alpha \in [0, 1[, u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v_* \text{ dans } \mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\mathcal{B}_o(x_0, R'), \mathbb{C}). \end{cases}$$

Par unicité de la limite, on constate que

$$u_* = v_*$$

et, on conclut déjà que u_* appartient à $\mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_M\}, \mathcal{E})$, vérifie les équations

$$\begin{cases} -L(u_*) = u_* |u_* \wedge \nabla u_*|^2 \text{ sur } \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_M\} \\ u_* = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et que $(u_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u_* dans $\mathcal{H}_{loc}^1(\overline{\Omega} \setminus \{a_1, \dots, a_M\}, \mathbb{C})$ et, dans $\mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \setminus \{a_1, \dots, a_M\}, \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1. Il suffit donc de montrer que M est égal à d et que

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \begin{cases} a_j \in \Omega \\ d^o(u_*, a_j) = k_j = 1. \end{cases}$$

Considérons donc un entier j compris entre 1 et M . Il existe un réel strictement positif R tel que $\mathcal{B}_f(a_j, 2R)$ ne contient aucun des points a_k autres que a_j . On a

$$\forall n \in \mathbb{N} : k_j = d^o(u_{\varepsilon_n}, \mathcal{S}(a_j, 2R))$$

donc, comme $(u_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u_* dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{S}(a_j, 2R), \mathbb{C})$, on a

$$k_j = d^o(u_*, \mathcal{S}(a_j, 2R)) = d^o(u_*, a_j).$$

D'après le lemme 2.6, on sait que

$$k_j \geq 0.$$

Supposons par l'absurde que $k_j = 0$. On a précédemment obtenu qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \int_{\mathcal{B}_o(a_j, 2R) \setminus \mathcal{B}_f(a_j, R)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq C \\ \int_{\mathcal{B}_o(a_j, 2R) \setminus \mathcal{B}_f(a_j, R)} w_{\varepsilon_n}^2 \leq C \varepsilon_n^2 \end{cases}$$

donc, d'après le théorème de Fubini, quitte à extraire, il existe un réel R' compris entre R et, $2R$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \int_{\mathcal{S}(a_j, R')} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq C \\ \int_{\mathcal{S}(a_j, R')} w_{\varepsilon_n}^2 \leq C \varepsilon_n^2 \end{cases}.$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, d^o(u_{\varepsilon_n}, \mathcal{S}(a_j, R')) = 0$, on conclut grâce à l'étape 1 du théorème 2.4 que

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\mathcal{B}_o(a_j, R')} w_{\varepsilon_n}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais, par définition de a_j , pour n suffisamment grand, $\mathcal{B}_o(a_j, R')$ contient un mauvais disque ce qui implique que

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\mathcal{B}_o(a_j, R')} w_{\varepsilon_n}^2 \geq \mu.$$

On aboutit ainsi à une contradiction et on en déduit que

$$k_j > 0.$$

Soit alors $\delta = \frac{1}{2}d(\Omega, \partial\Omega')$ et $\eta_0 = \frac{1}{8}\text{Min}\{|a_i - a_k|, 1 \leq i < k \leq M\} + \delta$. D'après le lemme 2.2, pour tout η dans $]0, \eta_0[$, il existe une constante C telle que

$$\int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{B}_o(a_j, \eta)} |\nabla u_*|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} \sum_{j=1}^M k_j^2 \ln\left(\frac{\delta}{\eta}\right) - C$$

or, d'après le théorème 2.3, il existe une constante C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{B}_o(a_j, \eta)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} d \left| \ln\left(\frac{\eta}{2}\right) \right| + C$$

ce qui implique, lorsque n tend vers $+\infty$, que

$$\int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{B}_o(a_j, \eta)} |\nabla u_*|^2 \leq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} d \left| \ln\left(\frac{\eta}{2}\right) \right| + C$$

puis, que

$$\sum_{j=1}^M (k_j^2 - k_j) \left| \ln(\eta) \right| \leq C$$

et finalement, lorsque η tend vers 0, que

$$\sum_{j=1}^M (k_j^2 - k_j) \leq 0.$$

On en déduit aisément que

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, d^o(u_*, a_j) = k_j = 1$$

puis, comme

$$d = \sum_{j=1}^M k_j$$

que $d = M$. Supposons enfin que a_j appartienne à $\partial\Omega$. Si η est strictement compris entre 0 et R , par un changement conforme de variables, on peut supposer que localement Ω est le demi-plan supérieur et que $a_j = 0$. Par cette transformation, la couronne ouverte de centre a_j et de rayons η et R est transformée en un ouvert contenu dans une couronne ouverte de centre 0 et de rayons η' et R' où η' et R' sont proches de η et R . Ainsi, si t est strictement compris entre η' et R' , on a après cette transformation,

$$d^o(u_*, \mathcal{S}(0, t)) = 1$$

ce qui induit

$$1 = \int_{\mathcal{S}(0, t)} \frac{|u_*|_{\mathcal{E}'} u_* \wedge \partial_{\tau} u_*}{ab}.$$

Si on note alors $\mathcal{S}^+(0, t) = \{x \in \mathcal{S}(0, t) / x_2 > 0\}$ et $\mathcal{S}^-(0, t) = \{x \in \mathcal{S}(0, t) / x_2 < 0\}$, on a

$$\int_{\mathcal{S}^-(0, t)} \frac{|u_*|_{\mathcal{E}'} u_* \wedge \partial_{\tau} u_*}{ab} = \int_{\mathcal{S}^-(0, t)} \frac{|g'|_{\mathcal{E}'} g' \wedge \partial_{\tau} g'}{ab} \leq C |g(t, 0) - g(-t, 0)|$$

or, comme g appartient à $\mathcal{H}^1(\partial\Omega, \mathcal{E})$,

$$|g(t, 0) - g(-t, 0)| \leq C\sqrt{t}$$

ce qui permet d'arriver à

$$\int_{\mathcal{S}^-(0,t)} \frac{|u_*|_{\mathcal{E}'} u_* \wedge \partial_\tau u_*}{ab} \leq C\sqrt{t}.$$

Par ailleurs, si on note $u_* = \Phi(s_*)$ sur $\mathcal{S}^+(0,t)$, alors

$$\int_{\mathcal{S}^+(0,t)} \frac{|u_*|_{\mathcal{E}'} u_* \wedge \partial_\tau u_*}{ab} = \frac{1}{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \int_{\mathcal{S}^+(0,t)} \partial_\tau s_* \leq \frac{\sqrt{\pi t}}{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \left(\int_{\mathcal{S}^+(0,t)} |\nabla s_*|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On aboutit ainsi à

$$\int_{\mathcal{S}(0,t)} |\nabla u_*|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{\pi t} - \frac{C}{\sqrt{t}} - C$$

donc, en intégrant de η' à R' ,

$$\int_{\mathcal{B}_o(0,R') \setminus \mathcal{B}_o(0,\eta')} |\nabla u_*|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{\pi} |\ln(\eta')| - C$$

et, en utilisant la transformation conforme inverse,

$$\int_{\mathcal{B}_o(a_j,R) \setminus \mathcal{B}_o(a_j,\eta)} |\nabla u_*|^2 \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{\pi} |\ln(\eta)| - C$$

Mais, d'après le lemme 2.2, il existe une constante C telle que

$$\int_{\Omega' \setminus \mathcal{B}_o(a_j,R) \cup \bigcup_{k=1, k \neq j}^d \mathcal{B}_o(a_k,\eta)} |\nabla u_*|^2 \geq (d-1) \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} |\ln(\eta)| - C$$

ce qui mène à

$$\int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^d \mathcal{B}_o(a_j,\eta)} |\nabla u_*|^2 \geq (d+1) \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} |\ln(\eta)| - C.$$

Par ailleurs, la propriété 2.3 affirme que

$$\int_{\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^d \mathcal{B}_o(a_j,\eta)} |\nabla u_*|^2 \leq d \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^2}{2\pi} |\ln(\eta)| + C$$

ce qui est impossible lorsque η tend vers 0. On en déduit que tous les points a_j sont dans Ω ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Conclusion

Dans ce mémoire, on a pu constater que la plupart des résultats démontrés par F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein dans leur article [BBH2] et dans leur livre [BBH3] pour l'énergie de Ginzburg-Landau définie par

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}), E_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |v|^2)^2$$

se transposent à l'énergie de Ginzburg-Landau plus générale définie par

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C}), E_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |v|_{\mathcal{E}}^2)^2.$$

Malheureusement, certains théorèmes ne sont plus aussi simples à démontrer comme par exemple ceux qui concernent les convergences dans les espaces \mathcal{C}_{loc}^k pour tout entier k . Ces difficultés ont une origine assez simple : dans le cas du cercle, on sait que les minimiseurs u_ε ont des modules qui convergent uniformément vers 1 lorsque ε tend vers 0. On peut donc les écrire en coordonnées polaires sous la forme $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\theta_\varepsilon}$. On aboutit alors aux équations assez simples suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2 \nabla \theta_\varepsilon) = 0 \\ -\Delta \rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon |\nabla \theta_\varepsilon|^2 = \frac{\rho_\varepsilon}{\varepsilon^2} (1 - \rho_\varepsilon^2). \end{cases}$$

Dans le cas de l'ellipse, on peut toujours écrire pour ε suffisamment petit les minimiseurs u_ε en coordonnées elliptiques sous la forme $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \Phi(s_\varepsilon)$. Mais, on aboutit à des équations bien plus compliquées :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2 \nabla s_\varepsilon) = -\rho_\varepsilon \Delta \rho_\varepsilon \Phi(s_\varepsilon) \cdot \Phi'(s_\varepsilon) \\ -\Delta \rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon |\nabla s_\varepsilon|^2 |\Phi'(s_\varepsilon)|_\mathcal{E}^2 = \frac{\rho_\varepsilon}{\varepsilon^2} (1 - \rho_\varepsilon^2) \left(\frac{\Phi(s_\varepsilon)_1^2}{a^4} + \frac{\Phi(s_\varepsilon)_2^2}{b^4} \right). \end{cases}$$

Ces équations ne permettent pas d'obtenir aussi facilement les convergences dans les espaces \mathcal{C}_{loc}^k pour tout entier k , et empêchent d'étudier simplement le comportement asymptotique des points critiques de l'énergie de Ginzburg-Landau lorsque ε tend vers 0. Ce travail qui est réalisé dans le cas du cercle dans le livre de F.Béthuel, H.Brézis et F.Hélein [BBH3] reste à réaliser dans le cas plus général de l'ellipse.

Références

- [B1] F.Béthuel, *Variational Methods for Ginzburg-Landau Equations*, Springer, LNM 1713, 1996, 1-43.
- [Br1] H.Brézis, *Equations de Ginzburg-Landau et singularités*, Cours de D.E.A. , 2001.
- [BBH1] F.Béthuel, H.Brézis, F.Hélein, *Limite singulière pour la minimisation de fonctionnelles du type Ginzburg-Landau*, C.R.Acad. Sc. Paris, 314, 1992, 891-895.
- [BBH2] F.Béthuel, H.Brézis, F.Hélein, *Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional*, Calc. Var and PDE, 1, 1993, 123-148.
- [BBH3] F.Béthuel, H.Brézis, F.Hélein, *Ginzburg-Landau Vortices*, Birkhäuser, 1994.