Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

Fabrice Béthuel, Raphaël Danchin, Philippe Gravejat, Jean-Claude Saut, et Didier Smets

Les équations d'Euler, des ondes et de Korteweg-de Vries comme limites asymptotiques de l'équation de Gross-Pitaevskii

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° I, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A1_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n^{o} I, 1-12

Les équations d'Euler, des ondes et de Korteweg-de Vries comme limites asymptotiques de l'équation de Gross-Pitaevskii

Fabrice Béthuel, Raphaël Danchin, Philippe Gravejat, Jean-Claude Saut, Didier Smets

1 Introduction

On s'intéresse à la dynamique onde longue pour l'équation de Gross-Pitaevskii

$$(GP) \qquad i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Delta\Psi = \Psi(|\Psi|^2 - 1)$$

sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ avec $N \geq 1$, avec les conditions de bord à l'infini

$$|\Psi(x,t)| \to 1 \qquad \text{quand } |x| \to +\infty.$$

Plus précisément, on va considérer trois régimes correspondant à trois asymptotiques bien définies. Dans chacun des cas, le module de la fonction Ψ ne s'annule pas, de sorte que l'on peut opérer à la représentation phase-module

$$\Psi = \rho \exp(i\varphi).$$

Dans cette représentation, l'équation de Gross-Pitaevskii se récrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\rho + \rho\Delta\varphi = 0, \\ \rho\partial_t\varphi + \rho|\nabla\varphi|^2 - \Delta\rho = \rho(1-\rho^2), \end{cases}$$

et en posant $u = 2\nabla\varphi$ on obtient la forme hydrodynamique de (GP)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^2 + \mathrm{div}(\rho^2 u) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + 2\nabla\rho^2 = 2\nabla\big(\dfrac{\Delta\rho}{\rho}\big). \end{cases} \tag{1}$$

Les trois asymptotiques considérées sont de la forme[1]

$$\begin{cases} \rho^2(x,t) = 1 + \varepsilon^\alpha a_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon t), \\ u(x,t) = \varepsilon^\alpha u_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon t), \end{cases} \tag{2}$$

où $\alpha = 0$, 1 ou 2.

Dans un premier temps, on supposera que $\alpha = 1$. On abordera ensuite les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$ en utilisant notamment les estimations quantitatives obtenues pour le cas $\alpha = 1$ (ce qui revient à considérer, suivant les cas, $\tilde{a}_\varepsilon = \varepsilon^{\pm 1} a_\varepsilon$).

[1]Modulo l'une ou l'autre constante de normalisation sans réelle importance.

2 Estimations quantitatives dans H^k

Dans cette section, on s'intéresse au cas $\alpha = 1$. Par conséquent, on procède au changement de variable

$$\begin{cases} \rho^2(x,t) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} a_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon t), \\ u(x,t) = \varepsilon u_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon t). \end{cases} \tag{3}$$

En termes de a_ε et u_ε, les équations (1) se récrivent

$$\begin{cases} \partial_t a_\varepsilon + \sqrt{2}\,\mathrm{div}\, u_\varepsilon = -\varepsilon \mathrm{div}(a_\varepsilon u_\varepsilon), \\ \partial_t u_\varepsilon + \sqrt{2}\,\nabla a_\varepsilon = \varepsilon \left(-u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + 2\nabla \left(\dfrac{\Delta \sqrt{\sqrt{2} + \varepsilon a_\varepsilon}}{\sqrt{\sqrt{2} + \varepsilon a_\varepsilon}} \right) \right). \end{cases} \tag{4}$$

Dans [5], on démontre le

Théorème 1 ([5])**.** *Soit $s > 1 + \frac{N}{2}$. Il existe une constante $C \equiv C(s, N)$ pour laquelle quelles que soient les données initiales $(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$ satisfaisant aux hypothèses $(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in H^{s+1} \times H^s$ et $C\varepsilon \|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|_{H^{s+1}\times H^s} \leq 1$, on a une minoration de la forme*

$$T_\varepsilon \geq \frac{1}{C\varepsilon \|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|_{H^{s+1}\times H^s}}$$

de l'intervalle de temps $[0, T_\varepsilon]$ pour lequel le système (4) possède une unique solution $(a_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \mathcal{C}^0([0, T_\varepsilon]; H^{s+1} \times H^s)$. De plus, celle-ci vérifie

$$\|(a_\varepsilon(\cdot,t), u_\varepsilon(\cdot,t))\|_{H^{s+1}\times H^s} \leq C\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|_{H^{s+1}\times H^s} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2} \leq \rho\left(\cdot, \frac{t}{\varepsilon}\right) \leq 2$$

pour chaque $t \in [0, T_\varepsilon]$.

La constante C est telle que la condition $C\varepsilon\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|_{H^{s+1}\times H^s} \leq 1$ imposée aux données initiales implique (par simple injection de Sobolev) que $\rho \geq \frac{1}{2}$ au temps zéro. Le Théorème 1 fournit donc en particulier une borne inférieure sur le premier temps (éventuel) d'apparition du vide, correspondant à $\rho = 0$ en au moins un point. Il fournit aussi des bornes uniformes (proportionnelles à celles des données initiales) sur l'intervalle considéré. On fera abondamment usage de ces bornes dans la suite.

Il est utile, afin d'éliminer au mieux la dépendance en ε, de se placer dans un repère lié à une changement d'échelle de type parabolique plutôt que hyperbolique. Plus précisément, on considère les nouvelles inconnues

$$\begin{cases} b_\varepsilon(x,t) = a_\varepsilon(x, \dfrac{t}{\varepsilon}) \\ v_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x, \dfrac{t}{\varepsilon}), \end{cases}$$

de sorte que $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ satisfont au système

$$\begin{cases} \partial_t b_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \mathrm{div} v_\varepsilon = -\mathrm{div}(b_\varepsilon v_\varepsilon), \\ \partial_t v_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \nabla b_\varepsilon = -v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon + 2\nabla \big(\dfrac{\Delta \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \big). \end{cases} \tag{5}$$

Au vu de la forme du système précédent (en particulier de sa partie linéaire), le but est de transposer les méthodes d'énergie classiques pour les systèmes hyperboliques symétriques. Dans ce cas en effet, les termes singuliers impliquant le facteur $\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ sont transparents du fait de leur anti-symétrie et ne contribuent pas aux bilans d'énergie. Dans le traitement du système complet, les termes non linéaires et ceux impliquant des dérivées d'ordre supérieur sont plus difficiles, à la fois pour eux-mêmes et pour leurs interactions avec les termes singuliers mentionnés juste avant. Dans un contexte voisin, une difficulté de même nature a été dépassée par S. Benzoni-Gavage, R. Danchin et S. Descombes dans [4]. Le point clé, inspiré par des idées antérieures de F. Coquel, consiste a considérer un système augmenté d'une inconnue (vectorielle), qui dans le cas présent correspond à $\nabla(\log\rho^2)$. Ce choix est en réalité assez naturel dans la mesure où on a l'égalité

$$\Psi = \exp\Big(\frac{i}{2}\big(2\varphi - i\log\rho^2\big)\Big).$$

On utilisera donc la fonction[2] à valeurs dans $\mathbb{C}^N$

$$z(x,t) = (v+iw)(x,t) \equiv \varepsilon^{-1}\nabla(2\varphi - i\log\rho^2)(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}^2). \tag{6}$$

Ainsi, le système pour z et b s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t b + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\mathrm{div}(\mathrm{Re} z) = -\mathrm{div}(b\,\mathrm{Re} z), \\ \partial_t z + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla b = i\Delta z - \nabla\Big(\dfrac{z\cdot z}{2}\Big), \end{cases} \tag{7}$$

où $z\cdot z' = \sum_{k=1}^N z_k z'_k$, les produits étant complexes. On remarque que

$$\frac{\nabla\Psi}{\Psi}(x,t) = \frac{i}{2}\,\varepsilon z(\varepsilon x,\varepsilon^2 t) \quad \text{et} \quad (|\Psi|^2-1)(x,t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b(\varepsilon x,\varepsilon^2 t),$$

de sorte que

$$E(\Psi) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\Psi|^2}{2} + \frac{(|\Psi|^2-1)^2}{4} = \frac{\varepsilon^{2-N}}{8}\Big(\|b\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|z\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N;(1+\varepsilon b/\sqrt{2})dx)}\Big).$$

La quantité E correspond à l'hamiltonien de (GP) et est par conséquent préservée par le flot. L'ingrédient principal de la preuve du Théorème 1 est l'estimation pondérée d'énergie qui suit, impliquant les dérivées d'ordre supérieur de (b,z).

Proposition 1. *Soit s un entier naturel*[3] *et Ψ une solution de (GP) pour laquelle $(b,z) \in \mathcal{C}^1([0,T],H^{s+1}(\mathbb{R}^N))$ et $(Db,Dz) \in \mathcal{C}^0([0,T];L^\infty)$ pour un certain $T>0$. Sous l'hypothèse que*

$$m := \inf_{x,t}|\Psi(x,t)| > 0, \tag{8}$$

il existe $C>0$ ne dépendant que de s, m, et N, telle que pour tout $t\in[0,T]$ et tout entier $k\in\{0,\cdots,s\}$, on a

$$\frac{d}{dt}\Gamma^k(b,z) \le C(1+\varepsilon\|b\|_{L^\infty})\|(Db,Dz)\|_{L^\infty}\left(\Gamma^k(b,z)+\varepsilon^{2-N}E(\Psi)\right),$$

[2] On omet la référence à ε lorsque cela ne nuit pas.

[3] Le résultat se généralise presque sans modification aux indices non entiers.

où

$$\Gamma^k(b,z) = \|D^k b\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|D^k z\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N;(1+\varepsilon b/\sqrt{2})dx)}.$$

La preuve repose, comme annoncé plus haut, sur des estimations d'énergie. L'unique difficulté consiste à montrer qu'il n'y a ni perte de dérivée ni croissance singulière. Le système étant d'une certaine manière surdéterminé par l'ajout de la nouvelle variable w, on utilisera à profit l'identité :

$$-\nabla\Big(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b\Big) = \Big(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b\Big)\mathrm{Im}z, \tag{9}$$

qui représente un gain d'une dérivée.

Les détails étant relativement concis, on peut les présenter ici.

On commence par calculer la dérivée temporelle de $\Gamma^k(b,z)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\langle D^k z, D^k z\rangle + \langle D^k b, D^k b\rangle \\
&\quad = 2\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\langle D^k z, D^k\partial_t z\rangle + \langle D^k b, D^k\partial_t b\rangle + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\partial_t b\langle D^k z, D^k z\rangle \\
&\quad = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{10}$$

Etape 1: Développement des termes I_1 et I_2.

Dans $I_1 + I_2$, on remplace $\partial_t z$ et $\partial_t b$ par leurs expressions issues de (7), que l'on développe ensuite. Cela donne

$$I_1 = 2(I_{1,1}+I_{1,2}+I_{1,3}+I_{1,4}+I_{1,5}) \qquad \text{et} \qquad I_2 = 2(I_{2,1}+I_{2,2})$$

où

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &= \int_{\mathbb{R}^N}\langle D^k z, D^k(-\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla b)\rangle, \\
I_{1,2} &= \int_{\mathbb{R}^N} b\langle D^k z, D^k(-\nabla b)\rangle, \\
I_{1,3} &= \int_{\mathbb{R}^N}\langle D^k z, D^k(i\Delta z)\rangle, \\
I_{1,4} &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b\langle D^k z, D^k(i\Delta z)\rangle, \\
I_{1,5} &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\Big\langle D^k z, D^k\big(-\nabla(\frac{z\cdot z}{2})\big)\Big\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2,1} &= \int_{\mathbb{R}^N}\langle D^k b, D^k(-\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\mathrm{div}(\mathrm{Re}z))\rangle, \\
I_{2,2} &= \int_{\mathbb{R}^N}\langle D^k b, D^k(-\mathrm{div}(b\mathrm{Re}z))\rangle.
\end{aligned}$$

Etape 2: Les termes $I_{1,3}$ et $I_{1,1}+I_{2,1}$ sont identiquement nuls.

Il s'agit là d'une conséquence immédiate des propriétés d'anti-symétrie de la partie linéaire du système, comme cela a déjà été évoqué. Cela se montre par exemple par intégration par partie, et, pour $I_{1,1}+I_{2,1}$, en utilisant le fait que b est réelle.

Etape 3: Estimations pour $I_{1,2}+I_{2,2}$.

On procède à une intégration par parties dans $I_{2,2}$ et on utilise la formule de Leibniz. Cela donne

$$\begin{aligned}
I_{1,2}+I_{2,2} &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle D^k(\nabla b), D^k(b\mathrm{Re}z) - bD^k z\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle D^k(\nabla b), D^k b\,\mathrm{Re}z\rangle + \sum_{j=1}^{k-1}\int_{\mathbb{R}^N} \langle D^k(\nabla b), D^j b D^{k-j}\mathrm{Re}z\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \frac{|D^k b|^2}{2}, \mathrm{Re}z\rangle - \sum_{j=1}^{k-1}\int_{\mathbb{R}^N} \langle D^k b, \mathrm{div}(D^j b D^{k-j}\mathrm{Re}z)\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|D^k b|^2}{2}\,\mathrm{div}(\mathrm{Re}z) - \sum_{j=1}^{k-1}\int_{\mathbb{R}^N} \langle D^k b, \mathrm{div}(D^j b D^{k-j}\mathrm{Re}z)\rangle.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on écrit

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} |D^k b|^2\,\mathrm{div}(\mathrm{Re}z)\right| \le \|Dz\|_{L^\infty}\|b\|_{H^k}^2.$$

Afin de majorer le deuxième terme, on utilise l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg selon laquelle, pour $j=1,\cdots,k-1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\langle D^k b, \mathrm{div}(D^j b D^{k-j}\mathrm{Re}z)\rangle| \le C\|(Db,Dz)\|_{L^\infty}\left(\|b\|_{H^k}^2+\|z\|_{H^k}^2\right).$$

En recombinant les deux précédentes inégalités, on obtient

$$|I_{1,2}+I_{2,2}| \le C\|(Db,Dz)\|_{L^\infty}\left(\|b\|_{H^k}^2+\|z\|_{H^k}^2\right). \tag{11}$$

Etape 4: Estimation de $2I_{1,4}+2I_{1,5}+I_3$.

On utilise une propriété de compensation qui peut paraître miraculeuse. Pour ce faire, on intègre par parties dans $I_{1,4}$, ce qui donne

$$I_{1,4} = -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\nabla b\langle D^k z, D^k(i\nabla z)\rangle,$$

ayant utilisé l'identité ponctuelle $\langle D^k(\nabla z), D^k(i\nabla z)\rangle = 0$.

De par (9), on est amené à

$$I_{1,4} = \int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\langle D^k z, D^k(i\nabla z)\rangle \mathrm{Im}z.$$

On s'intéresse maintenant à $I_{1,5}$. D'abord, en développant $\nabla(\frac{z\cdot z}{2})$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{1,5} &= -\int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\langle D^k z, D^k(z\cdot\nabla z)\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\langle D^k z, D^k(\nabla z)\cdot z\rangle - \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\langle D^k z, D^j(\nabla z)\cdot D^{k-j} z\rangle \\
&= I'_{1,5}+I''_{1,5}.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fournit une fois encore, pour $j = 0, \cdots, k-1$,

$$I''_{1,5} \leq C\big(1 + \varepsilon \|b\|_{L^\infty}\big) \|Dz\|_{L^\infty} \|z\|^2_{H^k}. \tag{12}$$

Pour ce qui est du terme $I'_{1,5}$, on utilise l'identité algébrique

$$\langle z_1, \zeta\, z_2\rangle = \langle z_1, z_2\rangle \mathrm{Re}\, \zeta + \langle z_1, i z_2\rangle \mathrm{Im}\, \zeta \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^N, \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, pour chaque $j \in \{1, \cdots, N\}$,

$$\begin{aligned}(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b)\langle D^k z, D^k(\partial_j z)\cdot z^j\rangle &= (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b) \Big[\langle D^k z, D^k(\partial_j z)\rangle \mathrm{Re}\, z^j + \langle D^k z, D^k(i\partial_j z)\rangle \mathrm{Im}\, z^j\Big] \\ &= (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b) \Big[\mathrm{Re}\, z^j \partial_j (\frac{|D^k z|^2}{2}) + \langle D^k z, D^k(i\partial_j z)\rangle \mathrm{Im}\, z^j\Big]\end{aligned}$$

et en intégrant par parties dans la première intégrale,

$$\begin{aligned}2\big(I'_{1,5} + I_{1,4}\big) + I_3 &= -\int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b)\Re z \cdot \nabla |D^k z|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \partial_t b \langle D^k z, D^k z\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{div}\Big(\Big(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b\Big)\Re z\Big)\, |D^k z|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \partial_t b\, |D^k z|^2.\end{aligned}$$

Puisque (7) est vérifiée, on conclut à l'égalité

$$2I'_{1,5} + 2I_{1,4} + I_3 = 0. \tag{13}$$

Etape 5: Fin de la démonstration.

Lorsque la condition (8) est satisfaite, il existe $C > 0$ ne dépendant que de k et m et telle que

$$\|(b, z)\|^2_{H^k} \leq C\big(\varepsilon^{2-N} E(\Psi) + \Gamma^k(b, z)\big). \tag{14}$$

Il suffit alors de combiner (10), (11), (12) et (13). □

3 Convergence vers Euler : le cas $\alpha = 0$.

On s'intéresse ici au cas $\alpha = 0$, qui correspond essentiellement, et après changement d'échelle, à la situation qu'avaient étudiée [13, 14].

Par simplification, on suppose que

$$(a^0_\varepsilon, u^0_\varepsilon) \to (a^0, u^0) \qquad \text{dans } H^{s+1} \times H^s. \tag{15}$$

En utilisant le résultat du Théorème 1 moyennant l'identification $(a^0_\varepsilon, u^0_\varepsilon) \mapsto (\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} a^0_\varepsilon, \varepsilon u^0_\varepsilon)$ provenant du changement de la valeur de α, on obtient de manière immédiate le

Théorème 2. *Il existe $C > 0$ telle que si $\|(a^0, u^0)\|_{H^{s+1}\times H^s} \leq C^{-1}$ et si (15) est vérifiée, alors pour ε suffisamment petit les solutions correspondantes de (1) existent au moins jusqu'au temps $(C\|(a^0, u^0)\|_{H^{s+1}\times H^s})^{-1}$ et convergent fortement dans $(H^{s-2})^2$ vers la solution de l'équation d'Euler*

$$\begin{cases} \partial_t a + \mathrm{div}((1 + a)u) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + 2\nabla a = 0. \end{cases}$$

4 Convergence vers l'équation des ondes, le cas $\alpha = 1$.

Lorsque $\alpha = 1$, les temps d'existence sont suffisamment longs pour embrayer sur les propriétés dispersives des équations sous-jacentes.

La linéarisation autour de $(0,0)$ du système (4) est donnée par l'opérateur (ε-dépendant)

$$L_\varepsilon(a,u) = \Big(\partial_t a + \sqrt{2}\,\mathrm{div} u, \partial_t u + \sqrt{2}\,\nabla a - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}\nabla\Delta a\Big).$$

En variable de Fourier (en espace), cet opérateur se récrit, avec $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$L_\varepsilon(\hat{a,u})(\xi,t) = \begin{pmatrix}\partial_t \hat{a}(\xi,t)\\ \partial_t \hat{u}(\xi,t)\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\,\xi^T\\ (\sqrt{2} + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}|\xi|^2)\xi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}(\xi,t)\\ \hat{u}(\xi,t)\end{pmatrix}.$$

Pour les solutions de type potentiel ($u = 2\nabla\varphi$), les valeurs propres associées sont données par

$$\lambda_\pm = \pm i\sqrt{2}|\xi|\sqrt{\varepsilon^2|\xi|^2 + 1}.$$

En conséquence, on s'attend à ce que L_ε agisse comme l'opérateur des ondes à vitesse $\sqrt{2}$ pour les basses fréquences $|\xi| \ll \varepsilon^{-1}$, alors que pour les hautes fréquences $|\xi| \gg \varepsilon^{-1}$ il devrait se comporter comme l'opérateur de Schrödinger avec coefficient de diffusion égal à ε. Hormis en dimension $N = 1$, on s'attend donc à pouvoir augmenter les temps d'existence en utilisant un mélange des propriétés dispersives de ces deux opérateurs.

Ce faisant, on obtient

Théorème 3 ([5]). *Sous les hypothèses du Théorème 1 et si de plus $s > 2 + \frac{N}{2}$, le temps d'existence (et de contrôle de norme) T_ε peut-être minoré par*

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{\varepsilon^2\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|^2_{H^{s+1}\times H^s}} && \text{si } N \geq 4,\\
&\min\Big(\frac{c}{\varepsilon^{1+\alpha}\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|^{1+\alpha}_{H^{s+1}\times H^s}}, \frac{1}{\varepsilon^3\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|^2_{H^{s+1}\times H^s}}\Big) && \text{si } N = 3 \text{ and } 0 < \alpha < 1,\\
&\min\Big(\frac{c}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|^{\frac{4}{3}}_{H^{s+1}\times H^s}}, \frac{1}{\varepsilon^{q+1}\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|^q_{H^{s+1}\times H^s}}\Big) && \text{si } N = 2 \text{ and } 2 > q > \tfrac{2}{s-2}.
\end{aligned}$$

La constante c dépend de s et de N si $N \geq 4$, de α si $N = 3$, et de q si $N = 2$.

Sur cet intervalle de temps, utilisant des méthodes classiques d'énergie pour analyser (4) comme un système perturbé, on obtient :

Théorème 4 ([5]). *Sous les hypothèses du Théorème 3, si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{u})$ désigne la solution de l'équation des ondes libres*

$$\begin{cases}\partial_t \mathfrak{a} + \sqrt{2}\mathrm{div}\mathfrak{u} = 0,\\ \partial_t \mathfrak{u} + \sqrt{2}\nabla\mathfrak{a} = 0,\end{cases} \tag{16}$$

avec donnée initiale $(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$, alors pour chaque $0 \leq t \leq T_\varepsilon$ on a

$$\|(a_\varepsilon, u_\varepsilon)(\cdot,t) - (\mathfrak{a},\mathfrak{u})(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} \leq K(s)\Big(\varepsilon t\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|^2_{H^{s+1}\times H^s} + \varepsilon^2 t\|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|_{H^{s+1}\times H^s}\Big).$$

5 Convergence vers Korteweg-de Vries : le cas $\alpha = 2$ et $N = 1$.

Dans cette section, on va considérer des perturbations dont le rapport amplitude/longueur d'onde est un ordre inférieur à celui considéré dans la section précédente. Le but est de mieux décrire dans ce cas la déviation par rapport à l'équation des ondes, et ceci sur un intervalle de temps plus long.

Cette analyse se concrétise mieux en dimension $N = 1$, elle pourrait s'étendre en dimension plus grande mais au prix d'une préparation essentiellement unidirectionnelle des données initiales (voir [11]).

On écrit donc dans ce cadre

$$\begin{cases} \rho^2(x,0) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{6} N_\varepsilon^0(\varepsilon x), \\ u(x,0) = \frac{\varepsilon^2}{6\sqrt{2}} W_\varepsilon^0(\varepsilon x), \end{cases}$$

où N_ε^0 et W_ε^0 seront uniformément bornées dans un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ avec s suffisamment grand. En utilisant le résultat du Théorème 1 pour des telles données initiales, autrement dit en écrivant $a_\varepsilon^0 = -\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{6} N_\varepsilon^0$ et $u_\varepsilon^0 = \frac{\varepsilon}{6\sqrt{2}} W_\varepsilon^0$, on obtient des bornes uniformes sur un intervalle de temps $T_\varepsilon = O(\varepsilon^{-2})$. Plus exactement, en posant

$$n_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon t) = -\frac{6}{\varepsilon\sqrt{2}} a_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon t), \text{ et } w_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon t) = \frac{6\sqrt{2}}{\varepsilon} u_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon t),$$

on a par le Théorème 1 :

Proposition 2. *Si $s \geq 2$ et si $K\varepsilon^2 \|(N_\varepsilon^0, W_\varepsilon^0)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \leq 1$, alors désignant par $(\mathfrak{n}, \mathfrak{w})$ la solution de l'équation des ondes*

$$\begin{cases} \partial_t\big(\sqrt{2}\mathfrak{n}\big) - \partial_x \mathfrak{w} = 0, \\ \partial_t \mathfrak{w} - 2\partial_x\big(\sqrt{2}\mathfrak{n}\big) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

admettant pour donnée initiale $(N_\varepsilon^0, W_\varepsilon^0)$, pour chaque $0 \leq t \leq T_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} &\|(n_\varepsilon, w_\varepsilon)(\cdot, t) - (\mathfrak{n}, \mathfrak{w})(\cdot, t)\|_{H^{s-2}(\mathbb{R})} \\ &\leq K\varepsilon^2 t \Big(\|(N_\varepsilon^0, W_\varepsilon^0)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} + \|(N_\varepsilon^0, W_\varepsilon^0)\|^2_{H^{s+1}(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \Big), \end{aligned} \tag{18}$$

où

$$T_\varepsilon = \frac{1}{K\varepsilon^2 \|(N_\varepsilon^0, W_\varepsilon^0)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})}}.$$

En particulier, si N_ε^0 et W_ε^0 sont des éléments de suites en ε uniformément bornées dans $H^{s+1}(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, alors au vu de (18) l'équation des ondes fournit une bonne approximation sur des échelles de temps[4] de l'ordre de $o(\varepsilon^{-2})$. Cette approximation cesse d'être pertinente for des échelles de temps d'ordre $O(\varepsilon^{-2})$, comme on va le voir immédiatement.

[4]Attention qu'il s'agit déjà d'un temps modifié (par un facteur ε^{-1}) par rapport à celui de (GP).

En dimension $N = 1$, la solution générale, fournie par d'Alembert, de l'équation (17), s'écrit

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}) = (\mathfrak{n}^+, \mathfrak{w}^+) + (\mathfrak{n}^-, \mathfrak{w}^-),$$

où les fonctions $(\mathfrak{n}^\pm, \mathfrak{w}^\pm)$ sont de la forme

$$\begin{aligned}\big(\mathfrak{n}^+(x,t), \mathfrak{w}^+(x,t)\big) &= \big(N^+(x - \sqrt{2}t), W^+(x - \sqrt{2}t)\big),\\ \big(\mathfrak{n}^-(x,t), \mathfrak{w}^-(x,t)\big) &= \big(N^-(x + \sqrt{2}t), W^-(x + \sqrt{2}t)\big),\end{aligned}$$

les profils $N^\pm$ et $W^\pm$ étant des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Les solutions peuvent donc être décomposées en une onde vers la gauche et une onde vers la droite, chacune d'entre elles se déplaçant à vitesse $\sqrt{2}$. Pour que les fonctions $(\mathfrak{n}^\pm, \mathfrak{w}^\pm)$ soient solutions de (17), on doit avoir

$$\big(2N^+ + W^+\big)_x = 0, \text{ and } \big(2N^- - W^-\big)_x = 0, \tag{19}$$

autrement dit, s'il y a décroissance à l'infini,

$$2N^\pm = \mp W^\pm = \frac{2N^0_\varepsilon \mp W^0_\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Il n'est pas inutile de faire remarquer à ce stade que l'équation de Gross-Pitaevskii, tout comme l'équation des ondes, sont invariantes pour la symétrie $x \to -x$.

On définit maintenant les variables lentes

$$x^- = \varepsilon(x + \sqrt{2}t), \; x^+ = \varepsilon(x - \sqrt{2}t), \text{ and } \tau = \frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2}}t.$$

De par leur définition, les nouvelles coordonnées x^- et x^+ correspondent à des repères mobiles se déplaçant vers la gauche et vers la droite respectivement, avec une vitesse égale à $\sqrt{2}$ par rapport au système de coordonnées original. Dans ces nouveaux repères, on définit les fonctions $N^\pm_\varepsilon$ et $\Theta^\pm_\varepsilon$ par

$$\begin{aligned}N^\pm_\varepsilon(x^\pm, \tau) &= \frac{6}{\varepsilon^2}\eta\Big(\frac{x^\pm}{\varepsilon} \pm \frac{4\tau}{\varepsilon^3}, \frac{2\sqrt{2}\tau}{\varepsilon^3}\Big),\\ \Theta^\pm_\varepsilon(x^\pm, \tau) &= \frac{6\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{x^\pm}{\varepsilon} \pm \frac{4\tau}{\varepsilon^3}, \frac{2\sqrt{2}\tau}{\varepsilon^3}\Big),\end{aligned} \tag{21}$$

où $\eta = 1 - \rho^2$ et $\Psi = \rho \exp(i\varphi)$. On définit ensuite

$$\begin{aligned}U^-_\varepsilon(x^-, \tau) &= \frac{1}{2}\Big(N^-_\varepsilon(x^-, \tau) + \partial_{x^-}\Theta^-(x^-, \tau)\Big),\\ U^+_\varepsilon(x^+, \tau) &= \frac{1}{2}\Big(N^+_\varepsilon(x^+, \tau) - \partial_{x^+}\Theta^+(x^+, \tau)\Big),\end{aligned} \tag{22}$$

qui sont les variables dans lesquelles le résultat principal de cette section s'écrit le plus naturellement. Avant de l'énoncer, on introduit également la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}$ définie sur $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ par

$$\|f\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} = \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\Big|\int_a^b f(x)dx\Big|. \tag{23}$$

Théorème 5 ([7]). *Soient $k \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés. On suppose que la donnée initiale est telle que*

$$\|N_\varepsilon^0\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} + \|\partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} + \|N_\varepsilon^0\|_{H^{k+5}(\mathbb{R})} + \varepsilon \|\partial_x^{k+6} N_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{H^{k+5}(\mathbb{R})} \leq K_0. \quad (24)$$

Soient $\mathcal{U}^-$ et $\mathcal{U}^+$ les solutions des équations de Korteweg-de Vries

$$\partial_\tau \mathcal{U}^- + \partial_{x^-}^3 \mathcal{U}^- + \mathcal{U}^- \partial_{x^-} \mathcal{U}^- = 0, \quad \text{(KdV)}$$

et

$$\partial_\tau \mathcal{U}^+ - \partial_{x^+}^3 \mathcal{U}^+ - \mathcal{U}^+ \partial_{x^+} \mathcal{U}^+ = 0, \quad (6)$$

admettant les mêmes données initiales que U_ε^- et U_ε^+ respectivement. Alors, il existe ε_1 et K_1 positives, dépendant seulement de k et K_0, telles que

$$\|U_\varepsilon^-(\cdot,\tau) - \mathcal{U}^-(\cdot,\tau)\|_{H^k(\mathbb{R})} + \|U_\varepsilon^+(\cdot,\tau) - \mathcal{U}^+(\cdot,\tau)\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq K_1 \varepsilon^2 \exp K_1|\tau|, \quad (7)$$

pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$, à condition que $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Dans une direction voisine, on obtient également

Théorème 6 ([6, 7]). *Soient $\varepsilon > 0$ et $k \geq 0$ fixés. On suppose que la donnée initiale est telle que*

$$\|N_\varepsilon^0\|_{H^{k+5}(\mathbb{R})} + \varepsilon \|\partial_x^{k+6} N_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{H^{k+5}(\mathbb{R})} \leq K_0. \quad (8)$$

Soient $\mathcal{N}^\pm$ et $\mathcal{W}^\pm$ les solutions des équations de Korteweg-de Vries

$$\partial_\tau \mathcal{U}^\pm \mp \partial_x^3 \mathcal{U}^\pm \mp \mathcal{U}^\pm \partial_x \mathcal{U}^\pm = 0,$$

admettant les mêmes données initiales que N_ε^0 et $\partial_x \Theta_\varepsilon^0$ respectivement. Il existe ε_2 et K_2 positives, dépendant seulement de K_0 et k, telles que

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{N}^\pm(\cdot,\tau) - N_\varepsilon^\pm(\cdot,\tau)\|_{H^k(\mathbb{R})} + \|\mathcal{W}^\pm(\cdot,\tau) - \partial_x \Theta_\varepsilon^\pm(\cdot,\tau)\|_{H^k(\mathbb{R})} \\ &\qquad \leq K_2 \big(\varepsilon^2 + \|N_\varepsilon^0 \pm \partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{H^k(\mathbb{R})}\big) \exp K_2|\tau|, \end{aligned} \quad (9)$$

pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$, à condition que $\varepsilon \leq \varepsilon_2$.

Remarque 1. *Si le terme $\|N_\varepsilon^0 \pm \partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{H^k(\mathbb{R})}$ est petit, il s'en suit que l'approximation par Korteweg-de Vries (en temps que déviation par rapport aux ondes) est pertinente sur une échelle de temps (dans les variables originelles) $t \in [0, \mathcal{T}_\varepsilon]$ où*

$$\mathcal{T}_\varepsilon = o\bigg(\min \bigg\{ \frac{|\log(\varepsilon)|}{\varepsilon^3}, \frac{|\log(\|N_\varepsilon^0 \pm \partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{H^k(\mathbb{R})})|}{\varepsilon^3} \bigg\} \bigg).$$

En particulier, si $\|N_\varepsilon^0 \pm \partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^\alpha$, avec $\alpha > 0$, l'approximation en question est pertinente sur un intervalle $t \in [0, \mathcal{T}_\varepsilon']$ où $\mathcal{T}_\varepsilon' = o(\varepsilon^{-3}|\log(\varepsilon)|)$. De plus, si $\|N_\varepsilon^0 \pm \partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{H^k(\mathbb{R})}$ est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, alors l'erreur d'approximation reste d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ sur une intervalle de temps $t \in [0, \mathcal{T}_\varepsilon'']$ où $\mathcal{T}_\varepsilon'' = \mathcal{O}(\varepsilon^{-3})$.

La différence essentielle entre les Théorèmes 5 et 6 réside dans le fait que le second fournit de l'information sur $N_\varepsilon^\pm$ et $\partial_x \Theta_\varepsilon^\pm$ en lieu et place de $U_\varepsilon^\pm$. Le terme d'erreur dans (9) implique la quantité $\|N_\varepsilon^0 \pm \partial_x \Theta_\varepsilon^0\|_{H^k(\mathbb{R})}$, qui n'est petite que si l'onde voyageant en direction opposée est petite. A la différence du Théorème 5, les hypothèses du Théorème 6 ne font pas intervenir la norme $\mathcal{M}$.

6 Brèves remarques bibliographiques.

Des considérations de même nature pour l'équation de Gross-Pitaevskii ou pour des problèmes voisins existent dans la littérature, par de nombreux auteurs.

Pour ce qui est du cas $\alpha = 0$, les deux travaux qui ont joué un rôle précurseur sont ceux de Gérard [13] et Grenier [14]. Leur contexte qui peut sembler différent du nôtre à première vue se ramène facilement à celui-ci (hormis les conditions aux limites de nature différente) par un changement d'échelle. Plusieurs extensions ont été réalisées par la suite, notamment dans le contexte de Gross-Pitaevskii, par Alazard et Carles [1] ainsi que par Chiron et Rousset [10, 11]. Un panorama plus complet est disponible dans [9]

Ces précédents travaux s'appliquent bien sûr au cas $\alpha = 1$ (les données sont simplement plus petites !), mais l'originalité de notre travail [5] a consisté notamment à étendre le temps d'approximation par les propriétés dispersives. Comme il a été mentionné plus haut, notre approche (par le biais d'un système étendu) a été motivée par des travaux de Benzoni-Gavage, Danchin et Descombes [4].

Enfin, pour ce qui est du cas $\alpha = 2$, il est utile de mentionner que des problématiques similaires ont été envisagées pour ce qui concerne la limite onde longue du système des ondes à la surface de l'eau. Dans un travail important [12], Craig a démontré le premier résultat rigoureux de convergence vers l'équation de Korteweg-de Vries, sous des hypothèses qui dans l'esprit sont très similaires à celles du Théorème 6, en se focalisant sur une onde voyageant dans une seule direction. Schneider et Wayne [16] ont complété cette analyse en pouvant traiter simultanément des ondes dans les deux directions, obtenant ainsi un résultat de même nature que celui du Théorème 5. Bona, Colin et Lannes ont amélioré les estimations d'erreur dans [8] (voir aussi [17]). Enfin, une extension en dimension supérieure a été justifiée par Alvarez-Samaniego et Lannes dans [2]. Dans une direction parallèle, Ben Youssef et Colin se sont intéressés [3] à des limites onde longue pour une classe assez générale de systèmes hyperboliques. Dans le contexte de l'équation de Gross-Pitaevskii, le premier résultat (formel) de convergence vers Korteweg-de Vries se trouve dans Kuznetsov et Zakharov [15].

References

[1] T. Alazard et R. Carles, *WKB analysis for the Gross-Pitaevskii equation with non-trivial boundary conditions at infinity,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 3, 959-977.

[2] B. Alvarez-Samaniego et D. Lannes. Large time existence for 3D water-waves and asymptotics. *Invent. Mat.*, 171(3):485–541, 2008.

[3] W. Ben Youssef et T. Colin. Rigorous derivation of Korteweg-de Vries-type systems from a general class of nonlinear hyperbolic systems. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 34(4):873–911, 2000.

[4] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin et S. Descombes, On the well-posedness of the Euler-Korteweg model in several space dimensions, Indiana Univ. Math. J., 56(4), (2007), 1499–1579.

[5] F. Béthuel, R. Danchin, et D. Smets. On the linear wave regime of the Gross-Pitaevskii equation. J. Anal. Math., sous presse, 2009.

[6] F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut, et D. Smets. On the Korteweg-de Vries long-wave approximation of the Gross-Pitaevskii equation I. Int. Math. Res. Not., sous presse, 2009.

[7] F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut, et D. Smets. On the Korteweg-de Vries long-wave approximation of the Gross-Pitaevskii equation II. prépublication 2009.

[8] J.L. Bona, T. Colin, et D. Lannes. Long wave approximations for water waves. Arch. Ration. Mech. Anal., 178(3):373–410, 2005.

[9] R. Carles, Semi-classical analysis for nonlinear Schrödinger equations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.

[10] D. Chiron et F. Rousset, Geometric optics and boundary layers for nonlinear Schrödinger equations, Communications in Mathematical Physics 288 (2009), no. 2, 503-546.

[11] D. Chiron and F. Rousset. The KdV/KP-I limit of the nonlinear Schrödinger equation. prépublication 2008.

[12] W. Craig. An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg-de Vries scaling limits. Comm. Partial Differential Equations, 10(8):787–1003, 1985.

[13] P. Gérard, Remarques sur l'analyse semi-classique de l'équation de Schrödinger non linéaire, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1992–1993, Exp. No. XIII, École Polytechnique Palaiseau.

[14] E. Grenier, Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), no. 2, 523–530.

[15] E.A. Kuznetsov and V.E. Zakharov. Multi-scales expansion in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform. Phys. D, 18(1-3):455–463, 1986.

[16] G. Schneider and C.E. Wayne. The long-wave limit for the water wave problem I. The case of zero surface tension. Comm. Pure Appl. Math., 53(12):1475–1535, 2000.

[17] J.D. Wright. Corrections to the KdV approximation for water waves. SIAM J. Math. Anal., 37(4):1161–1206, 2005.