GRAVEJAT Philippe

Agrégation

15/2/26

Chapitre IV : Interpolation polynomiale

Introduction

L'interpolation polynomiale consiste à approcher une fonction de la variable réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par un polynôme P (de degré le plus bas possible) qui prend les mêmes valeurs que la fonction f en le nombre fini de points où celle-ci est connue. Sur le plan numérique, il est en effet bien plus simple de manipuler des fonctions polynômes que des fonctions quelconques, et plusieurs des méthodes numériques que nous utiliserons pour calculer des intégrales ou résoudre des équations différentielles ordinaires reposeront sur ce constat.

La principale méthode d'interpolation polynomiale est celle de Lagrange. Etant donnés $N+1$ points $(x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, elle consiste à déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$\forall 0 \leq i \leq N, \; P(x_i) = f(x_i)$.

Dans la suite, nous établirons l'existence (et l'unicité) d'un tel polynôme, détaillerons une manière efficace de le construire, puis nous nous intéresserons à l'erreur commise en remplaçant la fonction f par ce polynôme, lorsque cette fonction est suffisamment régulière.

Nous n'étudierons pas de méthodes d'interpolation alternatives : nous renvoyons aux ouvrages intitulés "Analyse numérique et équations différentielles", de Jean-Pierre Demailly, et "Modélisation à l'oral de l'agrégation. Calcul scientifique" de Laurent Dumas pour la description de méthodes d'interpolation autres que celle de Lagrange.

I Méthode d'interpolation de Lagrange

Soit $N \in \mathbb{N}$. Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $N+1$ points $(x_0, \dots x_N)$ $\in \mathbb{R}^{N+1}$, deux à deux distincts de $\mathbb{R}$. Le problème d'interpolation de Lagrange consiste à déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que :

$\forall\, 0 \leq i \leq N,\ P(x_i) = f(x_i)$,

où la notation $\mathbb{R}_N[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à N :

$$\mathbb{R}_N[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] \text{ t.q. } d^\circ(P) \leq N \}.$$

1. Existence et unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange

__Théorème :__ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que :

$\forall\, 0 \leq i \neq j \leq N,\ x_i \neq x_j.$

Il existe un unique polynôme $P_N \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que :

$\forall\, 0 \leq i \leq N,\ P_N(x_i) = f(x_i).$

De plus, ce polynôme est donné par l'expression :

$$P_N(X) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\, l_i(X),$$

où les polynômes $(l_0, \dots, l_N) \in \mathbb{R}_N[X]^{N+1}$ sont définis par :

$$\forall\, 0 \leq i \leq N,\ l_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Le polynôme P_N est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, \dots, x_N$.

__Preuve :__

L'existence découle de la formule établie ci-dessus puisque les polynômes $l_0, \dots$ et l_N sont de degré inférieur ou égal à N, et satisfont :

$\forall\, 0 \leq i, j \leq N,\ l_i(x_j) = \delta_{i,j}.$

Pour l'unicité, si P et Q sont solutions du problème, alors le polynôme $P - Q$ a au moins $N+1$ racines distinctes. Comme

$d^\circ(P - Q) \leq N$,

il vient :

$\mathcal{L} - \mathcal{Q} = 0$,

D'où l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}$.

Exemples: (i) Pour $N = 0$, le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_0$ est égal à:

$$\mathcal{L}_0(X) = f(x_0)$$

(ii) Pour $N = 1$, le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_1$ est égal à:

$$\mathcal{L}_1(X) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} X + \frac{f(x_0)\, x_1 - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

2. Méthode de construction des différences divisées

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $N+1$ points $(x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ deux à deux distincts.

Définition: La différence divisée d'ordre N de la fonction f aux points $(x_0, \dots, x_N)$ est le coefficient, noté $f[x_0, \dots, x_N]$, du monôme X^N du polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $(x_0, \dots, x_N)$.

Exemples: (i) $f[x_0] = f(x_0)$.

(ii) $$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Théorème: Le polynôme $\mathcal{L}_N$ d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $(x_0, \dots, x_N)$ est égal à:

$$\mathcal{L}_N = \sum_{k=0}^{N} f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (X - x_j).$$

Preuve:

Elle repose sur une récurrence sur l'entier $N \in \mathbb{N}$. La formule est vraie au rang $N = 0$, et si elle demeure vraie jusqu'au rang $N - 1$, alors, le polynôme $\mathcal{L}_N - \mathcal{L}_{N-1}$ est de degré au plus N, et il s'annule en $x_0, \dots,$ et x_{N-1}. Par définition de la différence divisée d'ordre N, il vient:

$$\mathcal{L}_N - \mathcal{L}_{N-1} = f[x_0, \dots, x_N] \prod_{j=0}^{N-1} (X - x_j),$$

ce qui suffit à conclure la preuve.

Cette formule permet un calcul rapide du polynôme d'interpolation de Lagrange P_N de par les formules de récurrence suivante.

<u>Lemme</u>: Les différences divisées successives de la fonction f aux points $(x_0, \ldots, x_N)$ sont données par les formules:

$$f[x_0] = f(x_0), \text{ et } \forall\, 1 \leq j \leq N,\ f[x_0, \ldots, x_j] = \frac{f[x_1, \ldots, x_j] - f[x_0, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_0}$$

<u>Preuve</u>:

Le lemme est clair pour $j = 0$. Pour $1 \leq j \leq N$, considérons les polynômes d'interpolation de Lagrange P_{j-1} et Q_{j-1} de la fonction f aux points $(x_0, \ldots, x_{j-1})$ et $(x_1, \ldots, x_j)$, et introduisons le polynôme:

$$P(X) = \frac{1}{x_j - x_0}\left[(X - x_0)\, Q_{j-1}(X) - (X - x_j)\, P_{j-1}(X)\right]$$

Ce polynôme est bien défini et a un degré au plus j. De plus, il satisfait:

$$\text{et}\begin{cases} P(x_0) = P_{j-1}(x_0) = f(x_0) \\ \forall\, 1 \leq l \leq j-1, \quad P(x_l) = \dfrac{x_l - x_0 - x_l + x_j}{x_j - x_0} f(x_l) = f(x_l) \\ P(x_j) = Q_{j-1}(x_j) = f(x_j) \end{cases}$$

Il s'agit donc du polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $(x_0, \ldots, x_j)$, et l'identification de son terme de degré égal à j conduit à la formule recherchée:

$$f[x_0, \ldots, x_j] = \frac{f[x_1, \ldots, x_j] - f[x_0, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_0}.$$

En pratique, la construction du polynôme d'interpolation de Lagrange P_N de la fonction f aux points $(x_0, \ldots, x_N)$ repose sur l'algorithme suivant:

- La première étape consiste à calculer les différences divisées successives de la fonction f grâce au lemme précédent. Au rang 0, sont calculées les différences divisées $f[x_0]$, …, et $f[x_N]$, qui permettent le calcul des différences divisées $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$, …, et $f[x_{N-1}, x_N]$, et ainsi de suite, suivant le tableau ci-dessous:

$$
\begin{array}{lllll}
f[x_N] & — & f[x_{N-1}, x_N] & — & f[x_{N-2}, x_{N-1}, x_N] \quad --- \quad f[x_0, \dots, x_N] \\
f[x_{N-1}] & — & f[x_{N-2}, x_{N-1}] & & \\
f[x_{N-2}] & & & & \\
\dots & & & & \\
f[x_2] & — & f[x_1, x_2] & — & f[x_0, x_1, x_2] \\
f[x_1] & — & f[x_0, x_1] & & \\
f[x_0] & & & &
\end{array}
$$

- La seconde étape consiste en le calcul proprement dit du polynôme L_N grâce à l'algorithme de Hörner, qui consiste à poser $Q_N = f[x_0, \dots, x_N]$, puis à déterminer par récurrence les polynômes $(Q_j)_{0 \leq j \leq N-1}$ suivant la formule :

$Q_j = f[x_0, \dots, x_j] + (X - x_j)\, Q_{j+1}$.

Le polynôme Q_0 est alors égal à L_N par le théorème précédent.

Cet algorithme présente l'intérêt d'être peu coûteux en temps comme en mémoire. De plus, son caractère récursif facilite l'ajout d'un ou plusieurs points d'interpolation.

Il est possible de simplifier encore le calcul du polynôme d'interpolation de Lagrange L_N dans le cas de points $x_0, \dots,$ et x_N équidistants. Supposons ainsi qu'il existe un nombre strictement positif h tel que:

$\forall\, 0 \leq i \leq N-1, \quad x_{i+1} - x_i = h,$

De sorte que les points $(x_0, \dots, x_N)$ sont donnés par l'expression:

$\forall\, 0 \leq i \leq N-1, \quad x_i = x_0 + hi.$

La simplification repose alors sur l'introduction de l'opérateur aux différences finies Δ.

<u>Définition</u>: Soit $m \in [\![2, +\infty[\![$. L'opérateur aux différences finies Δ sur $\mathbb{R}^m$ est défini par:

$$\forall\, X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \Delta X = (x_2 - x_1, \dots, x_m - x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

Il est en effet possible d'exprimer les différences divisées successives de la fonction f en fonction des itérés de l'opérateur aux différences finies Δ.

<u>Lemme:</u> Supposons qu'il existe un nombre strictement positif h tel que:

$$\forall\, 0 \leq i \leq N, \quad x_i = x_0 + hi,$$

et notons :

$$F = \big(f(x_0), \dots, f(x_N)\big).$$

Les différences divisées de la fonction f sont données par la formule:

$$\forall\, 1 \leq k \leq N, \quad \forall\, 0 \leq i \leq N-k, \quad f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{[\Delta^k F]_i}{k!\, h^k}.$$

<u>Preuve:</u>

La preuve repose sur une récurrence sur l'entier $1 \leq k \leq N$. La formule est vraie au rang $k=1$, et si elle est vraie jusqu'au rang $k-1$, alors, le lemme précédent autorise à écrire:

$$\begin{aligned} f[x_i, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \\ &= \frac{1}{k!\, h^k}\Big([\Delta^{k-1} F]_{i+1} - [\Delta^{k-1} F]_i\Big) \\ &= \frac{[\Delta^k F]_i}{k!\, h^k}, \end{aligned}$$

D'où les formules par récurrence sur l'entier $1 \leq k \leq N$.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange L_N s'exprime donc de la façon suivante.

<u>Corollaire:</u> Supposons qu'il existe un nombre strictement positif h tel que:

$$\forall\, 0 \leq i \leq N, \quad x_i = x_0 + hi,$$

et notons :

$$F = \big(f(x_0), \dots, f(x_N)\big).$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange L_N de la fonction f aux points $(x_0, \dots, x_N)$ est égal à:

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \quad L_N(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^{N} [\Delta^k F]_0 \, \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}.$$

Preuve :

Immédiat

En pratique, les énoncés précédents permettent de remplacer le calcul des différences divisées par celui des itérés de l'opérateur aux différences finies Δ. Ce dernier calcul peut reposer sur la formule suivante.

Lemme : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq m$. L'opérateur Δ^k est égal à :

$$\forall X \in \mathbb{R}^{1+m},\ \forall\, 0 \leq i \leq m-k,\ (\Delta^k X)_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+k} C_k^j X_{i+j}.$$

Preuve :

La preuve est par récurrence sur l'entier $0 \leq k \leq m$. La formule est vraie aux rangs $k=0$ et $k=1$, et si elle est vraie jusqu'au rang $k-1$, alors, nous avons :

$$\begin{aligned}\forall\, 0 \leq i \leq m-k,\ (\Delta^k X)_i &= (\Delta^{k-1} X)_{i+1} - (\Delta^{k-1} X)_i \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j-1+k} C_{k-1}^j X_{i+1+j} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+k} C_{k-1}^j X_{i+j} \\ &= \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} C_{k-1}^{l-1} X_{i+l} + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l} C_{k-1}^{l} X_{i+l} \\ &= \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l X_{i+l},\end{aligned}$$

par la formule du triangle de Pascal. D'où le résultat par récurrence sur $0 \leq k \leq m$.

3. Estimation de l'erreur d'interpolation

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $N+1$ points $(x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ deux à deux distincts. L'estimation de l'erreur d'interpolation entre la fonction f et son polynôme d'interpolation de Lagrange L_N aux points $(x_0, \dots, x_N)$ repose sur le théorème de Rolle.

Théorème de Rolle : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Supposons que la fonction f est continue et dérivable sur le segment $[a,b]$ et qu'elle vérifie :

$f(a) = f(b)$.

Alors, il existe un point $c \in]a,b[$ tel que:

$f'(c) = 0$.

__Preuve:__

Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle atteint son minimum et son maximum en des points $c \in [a,b]$ et $d \in [a,b]$. Si $(c,d) \in \{a,b\}$ alors,

$\forall x \in [a,b],\ f(x) = f(a)$,

puisque $f(a) = f(b)$, de sorte que:

$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$.

Sinon, $c \in]a,b[$ ou $d \in]a,b[$, et dans ces cas,

$f'(c) = 0$ ou $f'(d) = 0$.

Le théorème de Rolle a le corollaire suivant.

__Corollaire:__ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Supposons que la fonction f est p-fois dérivable sur le segment $[a,b]$ et qu'il existe des points $a \leq c_0 < \dots < c_p \leq b$ tels que:

$\forall\, 0 \leq i \leq p,\ f(c_i) = 0$.

Alors il existe un point $\xi \in]c_0, c_p[$ tel que:

$f^{(p)}(\xi) = 0$.

__Preuve:__

Le théorème de Rolle établit l'existence des points $c_0^1 < \dots < c_{p-1}^1$ tels que:

$\forall\, 0 \leq i \leq p-1,\ c_i < c_i^1 < c_{i+1}$ et $f'(c_i^1) = 0$.

Par récurrence sur l'entier $1 \leq j \leq p$, il est possible de construire des points $(c_i^j)_{0 \leq i \leq p-j}$ tels que:

$\forall\, 0 \leq i \leq p-j,\ c_i^{j-1} < c_i^j < c_{i+1}^{j-1}$ et $f^{(j)}(c_i^j) = 0$.

Le point $\xi = c_0^p$ convient alors.

L'erreur d'interpolation s'estime de la façon suivante.

Théorème : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq x_0 < \dots < x_N \leq b$. Supposons que la fonction f est $N+1$ fois dérivable sur le segment $[a,b]$ et désignons par P_N, son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(x_0, \dots, x_N)$. Alors :

$\forall x \in [a,b]$, $\exists \xi_x \in]\operatorname{Min}\{x_0,x\}, \operatorname{Max}\{x_N,x\}[$ t.q.

$$f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^{N} (x - x_i).$$

En particulier, si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ sur le segment $[a,b]$, alors :

$$\| f - P_N \|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{\| f^{(N+1)} \|_{L^\infty([a,b])}}{(N+1)!} \left\| \prod_{i=0}^{N} (\cdot - x_i) \right\|_{L^\infty([a,b])}.$$

Preuve :

Si $x \in \{x_0, \dots, x_N\}$, alors, tout point $\xi_x \in]x_0, x_N[$ convient. Sinon, considérons le polynôme d'interpolation de Lagrange P de la fonction f aux points $x, x_0, \dots,$ et x_N. La fonction $f - P$ satisfait les hypothèses du corollaire précédent, de sorte qu'il existe un point $\xi_x \in]\operatorname{Min}\{x_0,x\}, \operatorname{Max}\{x_N,x\}[$ tel que :

$$f^{(N+1)}(\xi_x) = P^{(N+1)}(\xi_x).$$

Notons alors que le polynôme $P - P_N$ s'annule en $x_0, \dots,$ et x_N, et a un degré inférieur ou égal à $N+1$. Il existe donc un nombre réel λ tel que :

$$P = P_N + \lambda \prod_{j=0}^{N} (X - x_j).$$

Comme $d^\circ(P_N) \leq N$, il vient :

$$P^{(N+1)}(\xi_x) = (N+1)!\, \lambda,$$

De sorte que :

$$\lambda = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}.$$

Il s'ensuit que :

$$f(x) - P_N(x) = P(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{N} (x - x_j),$$

Et la dernière inégalité se déduit de cette formule.

Ce théorème certifie que l'erreur d'interpolation dépend à la fois de la taille des oscillations de la fonction f à travers la norme $\| f^{(N+1)} \|_{L^\infty([a,b])}$, et de la répartition des points $x_0, \dots,$ et x_N à travers la norme $\|\prod_{j=0}^{N}(\cdot - x_j)\|_{L^\infty([a,b])}$

<u>Exemple</u>: Supposons qu'il existe un nombre strictement positif h tel que :

$\forall\, 0 \leq i \leq N,\quad x_i = x_0 + i h.$

Dans ce cas, l'erreur d'interpolation sur le segment $[x_0, x_N]$ s'écrit sous la forme :

$\forall\, x = x_0 + s h$ avec $0 \leq s \leq N$, $\exists\, \xi_x \in\,]x_0, x_N[$ tel que :

$$f(x_0 + s h) - l_N(x_0 + s h) = \frac{s(s-1)\dots(s-N)}{(N+1)!}\, h^{N+1} f^{(N+1)}(\xi_x)$$

Considérons alors la fonction :

$\forall\, s \in [0, N],\quad \varphi(s) = |s(s-1)\dots(s-N)|.$

La fonction φ est continue sur le segment $[0, N]$ et vérifie :

$\forall\, s \in [0, N],\quad \varphi(N - s) = \varphi(s).$

Elle atteint donc son maximum sur le segment $[0, N]$ dans le segment $[0, \frac{N}{2}]$. De plus, si $N \geq 2$, alors,

$\forall\, s \in [1, \frac{N}{2}],\quad \varphi(s-1) = \varphi(s)\, \frac{N+1-s}{s} > \varphi(s),$

De sorte que le maximum est en fait atteint dans le segment $[0, 1]$.

Aussi obtenons-nous que :

$\forall\, s \in [0, N],\quad \varphi(s) \leq N!$

Il s'ensuit que l'erreur d'interpolation sur le segment $[x_0, x_N]$ vérifie :

$$\| f - l_N \|_{L^\infty([x_0, x_N])} \leq \frac{h^{N+1}}{N}\, \| f^{(N+1)} \|_{L^\infty([x_0, x_N])},$$

et qu'elle est donc contrôlée par une puissance $N+1$-ième du pas h (lorsque la dérivée $f^{(N+1)}$ reste bornée convenablement).

4. <u>Stabilité</u> numérique de la méthode d'interpolation de Lagrange

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Considérons $N+1$ points $(x_0, \dots, x_N) \in [a, b]^{N+1}$ deux à deux distincts, et intéressons-nous à la méthode d'interpolation de Lagrange associée à ces points. Cette méthode est également associée à l'opérateur suivant.

Définition : L'opérateur L_N d'interpolation de Lagrange aux points $(x_0, \dots, x_N)$ est défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \quad L_N(f) = \ell_N,$$

où ℓ_N désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $(x_0, \dots, x_N)$.

Théorème : L'opérateur d'interpolation de Lagrange L_N aux points $(x_0, \dots, x_N)$ est une application linéaire continue de $(\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \| \ \|_{L^\infty([a,b])})$ dans $(\mathbb{R}_N[X], \| \ \|_{L^\infty([a,b])})$, qui vérifie :

$$\Lambda_N = \sup_{\|f\|_{L^\infty([a,b])} \leq 1} \| L_N(f) \|_{L^\infty([a,b])} = \| \sum_{i=0}^{N} |l_i| \|_{L^\infty([a,b])},$$

où les polynômes $(l_0, \dots, l_N) \in \mathbb{R}_N[X]^{N+1}$ sont définis par :

$$\forall 0 \leq i \leq N, \quad l_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Le nombre Λ_N est appelée constante de Lebesgue

Preuve :

Rappelons que, si $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, alors :

$$\forall x \in [a,b], \quad \ell_N(x) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, l(x),$$

De sorte que :

$$\| L_N(f) \|_{L^\infty([a,b])} = \| \ell_N \|_{L^\infty([a,b])} \leq \|f\|_{L^\infty([a,b])} \, \| \sum_{i=0}^{N} |l_i| \|_{L^\infty([a,b])}$$

Notons par ailleurs que la fonction $\sum_{i=0}^{N} |l_i|$ est continue sur le segment $[a,b]$, de sorte qu'il existe un point $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$\| \sum_{i=0}^{N} |l_i| \|_{L^\infty([a,b])} = \sum_{i=0}^{N} |l_i(\xi)|.$$

Il est alors possible de construire une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, par exemple, affine par morceaux, telle que :

$$\forall 0 \leq i \leq N, \quad f(x_i) = \operatorname{sign}(l_i(\xi)), \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^\infty([a,b])} = 1.$$

Il vient alors :

$$\| L_N(f) \|_{L^\infty([a,b])} \geq L_N(f)(\xi) = \sum_{i=0}^{N} |l_i(\xi)| = \| \sum_{i=0}^{N} |l_i| \|_{L^\infty([a,b])},$$

D'où le résultat.

La constante de Lebesgue Λ_N permet d'estimer l'amplification de l'erreur numérique. En pratique, nous ne disposons en effet que d'une valeur approchée de la fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, que nous souhaitons interpoler par la méthode de Lagrange aux points $(x_0, \dots, x_N)$. La fonction à laquelle cette méthode est en pratique appliquée s'écrit sous la forme :

$$g = f + h,$$

où l'erreur h satisfait une estimation de la forme :

$$\| h \|_{L^\infty([a,b])} \leq \varepsilon,$$

pour un nombre strictement positif ε donné. L'erreur numérique commise est donnée par la fonction :

$$L_N(h) = L_N(g) - L_N(f).$$

Au pire, cette erreur est de l'ordre de $\| L_N(h) \|_{L^\infty([a,b])} = \Lambda_N \| h \|_{L^\infty([a,b])}$.
En particulier, si la constante de Lebesgue Λ_N est grande, l'amplification de l'erreur sera importante, et la méthode ne sera pas numériquement très stable.

<u>Exemple</u>: Supposons qu'il existe un nombre strictement positif h tel que :

$$\forall\, 0 \leq i \leq N, \quad x_i = x_0 + i h.$$

La constante de Lebesgue Λ_N associée à la méthode d'interpolation de Lagrange aux points $(x_0, \dots, x_N)$ sur le segment $[x_0, x_N]$ est égale à :

$$\Lambda_N = \max_{x_0 \leq x \leq x_N} \sum_{i=0}^{N} \prod_{j \neq i} \left| \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right|.$$

Comme

$$\forall\, 0 \leq i \neq j \leq N, \quad |x_i - x_j| = |i - j|\,|h|,$$

cette identité s'écrit aussi :

$$\Lambda_N = \max_{x_0 \leq x_0 + s h \leq x_0 + N h} \sum_{i=0}^{N} \prod_{j \neq i} \frac{|s - j|}{|i - j|}.$$

Nous pouvons alors calculer :

$$\forall\, 0 \leq i \leq N, \quad \prod_{j \neq i} \frac{\left| \frac{1}{2} - j \right|}{|i - j|} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \left(i - \frac{3}{2}\right) \times \left(i + \frac{1}{2}\right) \times \dots \left(N - \frac{1}{2}\right)}{i!\,(N-i)!}$$

$$\geq \frac{1 \times 2 \times \dots \times (i-2) \times i \times \dots \times (N-1)}{4\, i!\,(N-i)!}$$

$$\geq \frac{N!}{4\, i!\,(N-i)!\, N^2}.$$

Il vient donc :

$$\Lambda_N \geq \sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{4 N^2\, i!\,(N-i)!} = \frac{2^{N-2}}{N^2} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Aussi la méthode d'interpolation de Lagrange pour des points équidistants n'est-elle pas très stable sur le plan numérique.

Des choix différents des points $(x_0, \dots, x_N)$ d'interpolation ne conduisent pas à un résultat différent quant à la divergence de la constante de Lebesgue. Sur un segment $[a,b]$ fixé, le meilleur choix possible est fourni par les points de Tchebychev qui sont donnés par la formule:

$$\forall 0 \leq i \leq N, \quad x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right).$$

La constante de Lebesgue est alors de l'ordre de:

$$\Lambda_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(N),$$

et diverge donc encore lorsque $N \to +\infty$.

5. Phénomène de Runge

En général, les polynômes d'interpolation de Lagrange P_N de la fonction f aux points $x_0, \dots,$ et x_N ne convergent pas vers la fonction f lorsque N tend vers $+\infty$. Un exemple de divergence est fourni par la fonction:

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \frac{1}{1+25x^2},$$

et un choix de points équidistants dans le segment $[-1,1]$ donné par les formules :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \forall 0 \leq i \leq N, \quad x_i = -1 + \frac{2i}{N}.$$

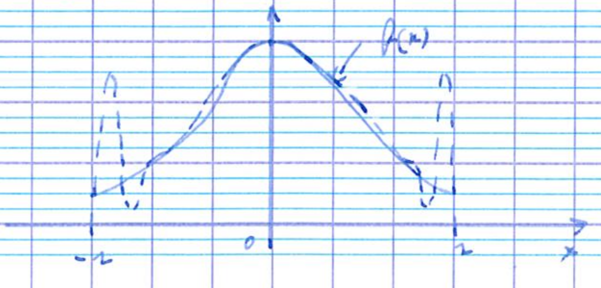
Il est alors possible de vérifier que les polynômes d'interpolation de Lagrange P_N de la fonction f aux points $(x_0, \dots, x_N)$ satisfont:

$$\| P_N - f \|_{L^\infty([-1,1])} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

C'est le phénomène de Runge qui est relié au fait que:

- les constantes de Lebesgue Λ_N augmentent très rapidement lorsque $N \to +\infty$,
- les dérivées $f^{(N)}$ de la fonction f croissent également très vite lorsque $N \to +\infty$.

En pratique, ce phénomène conduit à des graphes de la forme suivante:



La divergence correspond à des oscillations de plus en plus importante entre les points d'interpolation (en particulier, sur les bord du segment $[-1, 1]$).