

Chapitre V: Méthodes de calcul approché d'intégrales

Introduction

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Considérons une fonction f définie et continue sur le segment (a, b) , à valeurs réelles, ou complexes. Nous présentons dans ce chapitre des méthodes numériques qui fournissent une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Nous ne décrirons pas de manière exhaustive les méthodes disponibles pour un tel calcul. Nous renvoyons aux ouvrages intitulés "analyse numérique et équations différentielles" de Jean-Pierre Demailly, et "Méthodologie à l'oral de l'agrégation - Calcul scientifique" de Laurent Dumas pour une présentation plus détaillée des méthodes numériques à disposition (méthodes de Gauss, de Runge-Kutta, de Monte-Carlo...). Nous nous limiterons aux méthodes de quadrature les plus simples, les méthodes de quadrature composées.

De façon générale, une méthode de quadrature consiste à approcher la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ par une combinaison linéaire de valeurs de la fonction f de la forme $\sum_{i=0}^N \lambda_i f(\xi_i)$. Dans cette expression, les points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$ appartiennent (en principe) au segment (a, b) , et les coefficients $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq N}$ sont des nombres réels (ou complexes), qui sont choisis de façon à ce que la combinaison linéaire $\sum_{i=0}^N \lambda_i f(\xi_i)$ soit la plus proche possible de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ quelle que soit l'expression de la fonction f .

Les méthodes de quadrature élémentaires que nous présentons dans la suite découlent de ce principe. Étant donnés des points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$, la fonction f est

approché par son polynôme d'interpolation de Lagrange L aux points $(\xi_j)_{0 \leq j \leq n}$, lequel est donné par la formule:

$$\forall x \in (a, b), L(x) = \sum_{j=0}^n f(\xi_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - \xi_k}{\xi_j - \xi_k}.$$

L'expression

$\int_a^b L(x) dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(\xi_j)$, avec $\forall 0 \leq j \leq n, \lambda_j = \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} dx$, donne une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Mais que cette formule de quadrature fournisse la valeur exacte de cette intégrale, lorsque la fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

Les méthodes de quadrature composées que nous traitons dans la suite affinent ce procédé en appliquant le principe des sommes de Riemann. La formule de Charles permet de décomposer l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ suivant une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx,$$

puis la valeur de chacune des intégrales $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ est approchée suivant une méthode de quadrature élémentaire de la forme précédente.

Le principal avantage des méthodes de quadrature composées réside dans la propriété que les ordonnées linéaires qui les définissent, forment des sommes de Riemann pour la subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Lorsque le pas de cette subdivision tend vers 0, les valeurs approchées ainsi obtenues convergent vers la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.

Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons plusieurs exemples de méthodes de quadrature élémentaires et composées, en particulier, celles de Newton-Cotes. Nous établissons ensuite la convergence des méthodes de quadrature composées. Nous donnons enfin des estimations précises de l'erreur entre la valeur exacte de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$, et les valeurs approchées données par chacune des méthodes de quadrature composées que nous introduisons.

I Méthodes de quadratures élémentaires et composées

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, et f , une fonction définie et continue sur le segment $[a, b]$, et n valeurs réelles, ou complexes.

1. Définitions et exemples

On se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$, nous introduisons une subdivision $a = x_0 < \dots < x_{n+1} = b$ du segment $[a, b]$, et appliquons la formule de Charles afin d'obtenir la décomposition:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

Sur chacun des segments $[x_i, x_{i+1}]$, nous utilisons le changement de variables $x = \frac{1}{2} [(x_{i+1} - x_i) y + x_{i+1} + x_i]$ afin d'obtenir la formule:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) \int_{-1}^1 f_i(y) dy,$$

et de nous ramener à une fonction

$\forall y \in [-1, 1]$, $f_i(y) = f\left(\frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) y + \frac{1}{2} (x_{i+1} + x_i)\right)$, qui est définie et continue sur le segment $[-1, 1]$.

Étant donnée une fonction g définie et continue sur le segment $[-1, 1]$, nous introduisons alors $N+1$ points distincts $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ du segment $[-1, 1]$, et considérons le polynôme d'interpolation de Lagrange L aux points (ξ_j) de la fonction g . La méthode de quadrature élémentaire associée aux points $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ consiste à approcher l'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ par l'intégrale $\int_{-1}^1 L(y) dy$.

Définition: Soit $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N} \in [-1, 1]^{N+1}$ tels que: $\forall 0 \leq j \neq k \leq N, \xi_j \neq \xi_k$. La méthode de quadrature élémentaire associée aux points $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ consiste à approcher l'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ d'une fonction g définie et continue sur le segment $[-1, 1]$ par l'expression:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx \sum_{j=0}^N \lambda_j g(\xi_j),$$

où:

$$\forall 0 \leq i \leq N, \lambda_i = \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} \frac{y - \xi_i}{\xi_i - \xi} dy.$$

Exemples: (i) Méthode des rectangles à gauche:

Pour $\xi_0 = -1$, l'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ est approchée par:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 g(-1).$$

(ii) Méthode des rectangles à droite:

Pour $\xi_0 = 1$, l'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ est approchée par:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 g(1).$$

(iii) Méthode du point milieu:

Pour $\xi_0 = 0$, l'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ est approchée par:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 g(0).$$

(iv) Méthodes de Newton - Cotes (fermées)

La méthode de Newton - Cotes (fermée) d'ordre N consiste à choisir des points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$ équidistants dans le segment $[-1, 1]$, soit de la forme:

$$\forall 0 \leq i \leq N, \xi_i = -1 + \frac{2i}{N}.$$

Pour $N=1$ et $(\xi_0, \xi_1) = (-1, 1)$, il s'agit de la méthode des trapèzes. L'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ est approchée par:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 \left(\frac{1}{2} g(-1) + \frac{1}{2} g(1) \right).$$

Pour $N=2$ et $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (-1, 0, 1)$, il s'agit de la méthode de Simpson. L'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ est approchée par:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 \left(\frac{1}{6} g(-1) + \frac{2}{3} g(0) + \frac{1}{6} g(1) \right).$$

Pour $N=4$ et $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1)$, il s'agit de la méthode de Boole - Villarsen. L'intégrale

$\int_{-1}^1 g(y) dy$ est approchée par:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 \left(\frac{7}{30} g(-1) + \frac{32}{45} g(-\frac{1}{2}) + \frac{2}{25} g(0) + \frac{32}{45} g(\frac{1}{2}) + \frac{7}{30} g(1) \right)$$

Pour $N=6$ et $(\xi_i)_{0 \leq i \leq 6} = (-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, il s'agit

de la méthode de Middel - Hardy. L'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ est approchée par:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx 2 \left(\frac{4^2}{840} g(-1) + \frac{9}{35} g\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{9}{280} g\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{34}{205} g(0) + \frac{9}{280} g\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{9}{35} g\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{4^2}{840} g(1) \right).$$

Les méthodes de quadratures composées associées à ces méthodes de quadrature élémentaires sont alors définies de la façon suivante.

Définition: Soit $a = x_0 < \dots < x_N = b$, une subdivision du segment $[a, b]$, et

$(\xi_j)_{0 \leq j \leq N} \in [-1, 1]^{N+1}$ tels que: $\forall 0 \leq j \neq k \leq N, \xi_j \neq \xi_k$.

La méthode de quadrature composée associée à la subdivision $(x_i)_{i=0}^N$

et aux points $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ consiste à approcher l'intégrale

$\int_a^b f(x) dx$ d'une fonction f définie et continue sur le segment

$[a, b]$ par l'expression:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j f\left(\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\xi_j + x_{i+1} + x_i\right),$$

où:

$$\forall 0 \leq j \leq N, \lambda_j = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{h_{\neq j}} \frac{y - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} dy.$$

Remarque: Il est bien sûr permis de choisir des méthodes de quadrature élémentaires sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$. Ceci peut permettre de mieux approcher de possibles singularités de la fonction f .

Exemples: Soit $a = x_0 < \dots < x_N = b$, une subdivision du segment $[a, b]$.

(i) Méthode des rectangles à gauche:

L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est approchée par:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i).$$

(ii) Méthode des rectangles à droite:

L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est approchée par:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}).$$

(iii) Méthode du point milieu:

L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est approchée par:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

(iv) Méthodes de Newton-Cotes (fermées):

La méthode des trapèzes approche l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ par:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left[\frac{1}{2} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i+1}) \right].$$

La méthode de Simpson approche l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ par:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-2} (x_{i+2} - x_i) \left(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{4}{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+2}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_{i+2}) \right).$$

La méthode de Boole - Villarcieu approche l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-4} (x_{i+4} - x_i) \left(\frac{7}{32} f(x_i) + \frac{16}{32} f\left(\frac{3x_i}{4} + \frac{x_{i+1}}{4}\right) + \frac{16}{32} f\left(\frac{x_i + x_{i+2}}{2}\right) + \frac{16}{32} f\left(\frac{x_i}{4} + \frac{3x_{i+1}}{4}\right) + \frac{7}{32} f(x_{i+4}) \right).$$

La méthode de Weddle - Waudy approche l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ par:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-6} (x_{i+6} - x_i) \left(\frac{42}{840} f(x_i) + \frac{2}{35} f\left(\frac{5}{6} x_i + \frac{x_{i+1}}{6}\right) + \frac{2}{840} f\left(\frac{2}{3} x_i + \frac{x_{i+2}}{3}\right) + \frac{34}{840} f\left(\frac{x_i + x_{i+2}}{2}\right) + \frac{2}{840} f\left(\frac{x_i}{3} + \frac{2x_{i+1}}{3}\right) + \frac{2}{35} f\left(\frac{x_i}{6} + \frac{5x_{i+1}}{6}\right) + \frac{42}{840} f(x_{i+6}) \right).$$

2. Convergence des méthodes de quadrature composées

La preuve de la convergence des méthodes de quadrature composées lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ repose sur le principe des sommes de Riemann, dont nous rappelons ici les principaux éléments.

Définition: Soit $a = x_0 < \dots < x_n = b$, une subdivision du segment $[a, b]$. Le pas h de cette subdivision est défini par:

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

Définition: Soit $a = x_0 < \dots < x_n = b$, une subdivision du segment $[a, b]$, et $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1}$, une famille de points du segment $[a, b]$ tels

que :

$$\forall 0 \leq i \leq n-2, x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}.$$

La somme de Riemann d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}))$ associée à la subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et aux points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ est définie par :

$$S_{n,S}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i).$$

Théorème : Les sommes de Riemann d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}))$ associées à des subdivisions $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et des points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ avec $\forall 0 \leq i \leq n-2, x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, convergent vers l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$, lorsque le pas h des subdivisions tend vers 0.

Preuve :

Par le théorème de Weierstrass, la fonction f est uniformément continue sur le segment $[a,b]$. Pour tout nombre strictement positif ε , il existe un nombre strictement positif δ tel que :

$$\forall (u,v) \in [a,b]^2, |u-v| \leq \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Lorsque le pas h d'une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est inférieur ou égal à δ , il vient :

$$\begin{aligned} |S_{n,S}(f) - \int_a^b f(x) dx| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [-f(x) + f(\xi_i)] dx \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon}{b-a} dx \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Faisons désormais $N+1$ points distincts $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N} \in]a,b]$, et considérons les méthodes de quadrature composées sur le segment $[a,b]$ associées à la donnée de ces points. À l'aide du théorème précédent, nous pouvons établir le résultat de convergence suivant.

Théorème : Soit $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N} \in]a,b]$ tels que : $\forall 0 \leq j \neq k \leq N, \xi_j \neq \xi_k$. Les méthodes de quadrature composées associées à des subdivisions $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ et aux points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$

convergent vers l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ d'une fonction f définie et continue sur le segment $[a, b]$ lorsque le pas des subdivisions

tend vers 0: si nous notons:

$$\forall 0 \leq j \leq N, \lambda_j = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \frac{y - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} dy,$$

alors, quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (ou $\mathbb{C}$),

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j f\left[\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2} \xi_j + \frac{\xi_{i+1} + \xi_i}{2}\right] \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

lorsque $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} |\xi_{i+1} - \xi_i| \rightarrow 0$.

Preuve:

Comme la formule de quadrature élémentaire associée aux points

$(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ est exacte pour les polynômes de degré 0, nous avons:

$$\sum_{j=0}^N \lambda_j = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Il nous reste alors que les expressions:

$$S_j(f) = \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i) f\left[\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2} \xi_j + \frac{\xi_{i+1} + \xi_i}{2}\right],$$

sont des sommes de Riemann, de sorte que, lorsque le pas h tend vers 0,

$$\sum_{j=0}^N \frac{\lambda_j}{2} S_j(f) \rightarrow \sum_{j=0}^N \lambda_j \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Cette épreuve garantit que la réduction des pas des subdivisions considérées, ou de manière (presque) équivalente, l'augmentation du nombre $N+1$ de points considérés, améliore la précision des calculs de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Ceci n'est en général pas le cas lorsque l'on augmente le nombre $N+1$ de points des méthodes de quadrature élémentaires sous-jacentes. Cette affirmation est reliée au phénomène de Runge que nous avons rencontré dans l'étude de l'interpolation polynomiale, et elle peut se justifier à l'aide du théorème de Runge-Weinberger. Cette affirmation justifie de plus l'introduction des méthodes de quadrature composées pour lesquelles il est facile de modifier la subdivision, au contraire des méthodes de quadrature élémentaires pour des nombres $N+1$ de points plus grande, qui nécessitent le calcul de toujours plus de coefficients $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq N}$.

Le résultat de convergence du théorème précédent n'est cependant vrai que dans la limite où les subdivisions considérées comptent une infinité de points, ce qui n'est bien sûr pas possible en pratique. Il est donc nécessaire d'estimer l'erreur entre la valeur exacte de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$, et les valeurs approchées obtenues pour des subdivisions finies.

III Évaluation de l'erreur

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, et f , une fonction définie et continue sur le segment (a, b) , et α valeurs réelles, ou complexes.

1. Ordre d'une méthode de quadrature

Définition: Soit $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n} \in (-1, 1)^{n+1}$ tels que: $\forall 0 \leq i \neq k \leq n, \xi_i \neq \xi_k$.

(i) Une méthode de quadrature élémentaire associée aux points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si et seulement si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall R \in \mathbb{R}_p[X], \int_{-1}^1 R(y) dy = \sum_{i=0}^n \lambda_i R(\xi_i), \\ \text{avec } \forall 0 \leq i \leq n, \lambda_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{y - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} dy, \\ \text{Et } \left\{ \begin{array}{l} \exists Q \in \mathbb{R}_{p+1}[X] \text{ t.q. } \int_{-1}^1 Q(y) dy \neq \sum_{i=0}^n \lambda_i Q(\xi_i). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(ii) Toute méthode de quadrature composée associée aux points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si et seulement si la méthode de quadrature élémentaire associée aux points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est d'ordre $p \in \mathbb{N}$.

Exemples: (i) Les méthodes des rectangles à gauche et à droite sont d'ordre 0.

(ii) Une méthode du point milieu est d'ordre 1.

Lemme: Soit $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n} \in (-1, 1)^{n+1}$ tels que: $\forall 0 \leq i \neq k \leq n, \xi_i \neq \xi_k$.

Les méthodes de quadrature élémentaire et composées associées aux points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont d'ordre:

$$p \geq N.$$

Preuve:

Le polynôme d'interpolation de Lagrange d'un polynôme $p \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R})$ aux points $(s_i)_{0 \leq i \leq N}$ est en effet égal à p .

Exemples: Méthodes de Newton - Cotes (fermées)

Dans la lemme précédent, la méthode de Newton - Cotes (fermée) d'ordre N est d'ordre supérieur ou égal à N . Lorsque $N = 2m$,

les points $(s_i)_{0 \leq i \leq N}$ associés à cette méthode satisfont :

$$\forall 0 \leq i \leq N, \quad s_{N-i} = -1 + \frac{2(N-i)}{N} = 1 - \frac{2i}{N} = -s_i.$$

Les coefficients $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq N}$ vérifient alors :

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq i \leq N, \quad \lambda_{N-i} &= \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq N-i}}^N \frac{y - s_k}{s_{N-i} - s_k} dy \\ &= \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \frac{y - s_k}{-s_i - s_k} dy \\ &= \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \frac{y - s_k}{s_i + s_k} dy \\ &= \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \frac{y - s_k}{s_i - s_k} dy \\ &= (-1)^N \lambda_i \\ &= \lambda_i \end{aligned}$$

Lorsqu'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}))$ est impaire, il s'ensuit que :

$$\sum_{i=0}^N \lambda_i f(s_i) \stackrel{i=N-k}{=} \sum_{k=0}^N \lambda_{N-k} f(s_{N-k}) = - \sum_{k=0}^N \lambda_k f(s_k),$$

D'où soit que :

$$\sum_{i=0}^N \lambda_i f(s_i) = 0 = \int_{-1}^1 f(y) dy.$$

En particulier,

$$\int_{-1}^1 y^{N+1} dy = 0 = \sum_{i=0}^N \lambda_i s_i^{N+1}.$$

En conclusion, les méthodes de Newton - Cotes (fermées) d'ordre $N = 2m$ est au moins d'ordre $2m+1$. Cette amélioration explique que l'on utilise en pratique que les méthodes de Newton - Cotes (fermées) d'ordre $N = 2m$ pairs. Il est possible de vérifier que ces méthodes sont exactement d'ordre $N+1$. Les méthodes de Simpson, de Boole - Villeneuve et de Weddle - Hardy sont ainsi d'ordre 3, 5 et 7, celle du trapèze est d'ordre 1.

2. Évaluation de l'erreur d'une méthode de quadrature élémentaire

Soient $N+1$ points distincts $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$ et considérons la méthode de quadrature élémentaire associée aux points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$, qui consiste à approcher l'intégrale $\int_{-2}^2 g(y) dy$ d'une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-2, 2], \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}))$ par l'expression:

$$\int_{-2}^2 g(y) dy \approx \sum_{i=0}^N \lambda_i g(\xi_i),$$

où $\forall 0 \leq i \leq N, \lambda_i = \int_{-2}^2 \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N (\xi_i - \xi_k)} dy.$

Définition: Soit $g \in \mathcal{C}^0([-2, 2], \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}))$. L'erreur $E(g)$ due à la méthode de quadrature élémentaire considérée est définie par la formule:

$$E(g) = \int_{-2}^2 g(y) dy - \sum_{i=0}^N \lambda_i g(\xi_i).$$

L'erreur due à la méthode de quadrature élémentaire s'estime à l'aide du moyen de Peano de cette méthode de quadrature.

Définition: Supposons que la méthode de quadrature élémentaire est d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Le moyen de Peano K_p de la méthode de quadrature est défini par:

$$\forall y \in [-2, 2], K_p(y) = E(g_y),$$

$$\text{où } \forall (y, z) \in [-2, 2]^2, g_y(z) = (z-y)_+^p = \begin{cases} (z-y)^p & \text{si } z \geq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le moyen de Peano permet d'exprimer l'erreur de la façon suivante.

Lemme: Supposons que la méthode de quadrature élémentaire est d'ordre $p \in \mathbb{N}$, et notons K_p son moyen de Peano. Si une fonction g est de classe $\mathcal{C}^{p+2}$ sur le segment $[-2, 2]$, alors, l'erreur $E(g)$ est égale à:

$$E(g) = \frac{1}{p!} \int_{-2}^2 K_p(y) g^{(p+2)}(y) dy.$$

Preuve:

La formule repose sur le théorème de Taylor avec reste intégral, qui fournit l'identité:

$\forall y \in [-1, 1], g(y) = \sum_{h=0}^p \frac{g^{(h)}(0)}{h!} y^h + \frac{1}{p!} \int_{-1}^1 (y-z)_+^p g^{(p+1)}(z) dz,$
pour une fonction g de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur le segment $[-1, 1]$. Comme la fonctionnelle erreur E dépend linéairement de la fonction g et qu'elle est nulle si g est un polynôme de degré inférieur ou égal à p , il vient:

$$E(g) = E\left(\frac{1}{p!} \int_{-1}^1 (-z)_+^p g^{(p+1)}(z) dz\right).$$

Par le théorème de Fubini, il s'ensuit que:

$$\begin{aligned} E(g) &= \frac{1}{p!} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (y-z)_+^p dy - \sum_{j=0}^N \lambda_j (\xi_j - z)_+ \right) g^{(p+1)}(z) dz \\ &= \frac{1}{p!} \int_{-1}^1 K_p(z) g^{(p+1)}(z) dz \end{aligned}$$

Le théorème conduit aux estimations suivantes de l'erreur.

Corollaire: Supposons que la méthode de quadrature élémentaire est d'ordre $p \in \mathbb{N}$, et notons K_p son noyau de Peano.

(i) Si une fonction g est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur le segment $[-1, 1]$, alors:

$$|E(g)| \leq \left(\frac{1}{p!} \int_{-1}^1 |K_p(z)| dz \right) \|g^{(p+1)}\|_{\infty([-1, 1])}.$$

(ii) Si le noyau de Peano K_p garde de plus un signe constant sur le segment $[-1, 1]$, alors, il existe un nombre $\xi \in (-1, 1)$ tel que:

$$E(g) = \frac{1}{p!} g^{(p+1)}(\xi) \int_{-1}^1 K_p(z) dz = \frac{1}{(p+1)!} g^{(p+1)}(\xi) E(-\cdot^{p+1}).$$

Preuve:

La preuve de (i) est immédiate. En ce qui concerne (ii), notons:

$$m = \min_{[-1, 1]} g^{(p+1)} \quad \text{et} \quad \eta = \max_{[-1, 1]} g^{(p+1)}.$$

Comme le noyau de Peano K_p garde un signe constant sur $[-1, 1]$,

il résulte du théorème précédent que:

$$\frac{m}{p!} \int_{-1}^1 K_p(y) dy \leq E(g) \leq \frac{\eta}{p!} \int_{-1}^1 K_p(y) dy.$$

Si lorsque $\int_{-1}^1 K_p(y) dy = 0$, la preuve est immédiate. Dans les autres

cas, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que:

$$\exists \xi \in (-1, 1) \text{ t.q. } g^{(p+2)}(\xi) = \frac{p! E(\tau)}{\int_{-1}^1 K_p(\eta) d\eta},$$

ce qui achève la preuve de la première identité. Il vient alors:

$$E(\cdot, p+2) = \frac{(p+2)!}{p!} \int_{-1}^1 K_p(\eta) d\eta,$$

De sorte que:

$$E(g) = \frac{E(\cdot, p+2)}{(p+2)!} g^{(p+2)}(\xi).$$

Exemples: (i) Méthode du point milieu:

Le noyau de Peano de cette méthode est égal à:

$$\forall t \in (-1, 1), K_2(t) = \frac{1}{2} (1 - |t|)^2 \geq 0.$$

Si une fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[-1, 1]$, alors:

$$\exists \xi \in (-1, 1) \text{ t.q. } |E(g)| = \left| \frac{g''(\xi)}{3} \right| \leq \frac{1}{3} \|g''\|_{\mathcal{C}^0([-1, 1])}.$$

(ii) Méthode des trapèzes:

Le noyau de Peano de cette méthode est égal à:

$$\forall t \in (-1, 1), K_2(t) = -\frac{1}{2} (1 - t^2) \leq 0.$$

Si une fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[-1, 1]$, alors:

$$\exists \xi \in (-1, 1) \text{ t.q. } |E(g)| = \left| -\frac{1}{3} g''(\xi) \right| \leq \frac{1}{3} \|g''\|_{\mathcal{C}^0([-1, 1])}.$$

(iii) Méthode de Simpson:

Le noyau de Peano de cette méthode est égal à:

$$\forall t \in (-1, 1), K_4(t) = -\frac{1}{24} (1 - |t|^3)(1 + 3|t|) \leq 0.$$

Si une fonction g est de classe $\mathcal{C}^4$ sur le segment $[-1, 1]$, alors:

$$\exists \xi \in (-1, 1) \text{ t.q. } |E(g)| = \left| -\frac{1}{90} g^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{90} \|g^{(4)}\|_{\mathcal{C}^0([-1, 1])}.$$

Remarque: Les théorèmes de Stiefensen garantissent que les noyaux de Peano des méthodes de Newton - Cotes (fermées) gardent un signe constant, de sorte que les points (ii) du corollaire précédent s'applique à ces méthodes.

3. Évaluation de l'erreur d'une méthode de quadrature composée

Soient $N+1$ points distincts $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$ du segment $(-1, 1)$ et considérons la méthode de quadrature élémentaire associée aux points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$, qui consiste à approcher l'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ d'une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}))$ par l'expression:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx \sum_{i=0}^N \lambda_i g(\xi_i),$$

où $\forall 0 \leq i \leq N, \lambda_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \frac{y - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} dy.$

Considérons alors une subdivision $a = x_0 < \dots < x_{n-1} = b$ du segment $(a, b]$ et notons h_i la pas de cette subdivision:

$$h_i = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

L'erreur E associée à la méthode de quadrature composée associée à cette méthode de quadrature élémentaire et à cette subdivision est définie de la façon suivante.

Définition: Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}))$. L'erreur $E(f)$ due à la méthode de quadrature composée est définie par l'expression:

$$E(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + (\xi_j - \xi_0)(x_{i+1} - x_i)\right).$$

Cette erreur s'estime aussi à l'aide du moyen de Peano de la méthode de quadrature composée.

Définition: Supposons que la méthode de quadrature composée est d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Le moyen de Peano $\mathcal{H}_p$ de la méthode de quadrature composée est égal à:

$$\forall x \in (a, b), \mathcal{H}_p(x) = E(f_x),$$

$$\text{où } \forall (x, y) \in (a, b]^2, f_x(y) = \begin{cases} (y-x)^p & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme une méthode de quadrature composée d'ordre $p \in \mathbb{N}$ est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p , il est possible d'étudier

les estimations obtenues dans le cas des méthodes de quadrature élémentaires aux méthodes de quadrature composées.

Théorème: Supposons que la méthode de quadrature composée est d'ordre $p \in \mathbb{N}$, et notons H_p , son noyau de Peano. Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^{p+2}$ sur le segment $[a, b]$, alors, l'erreur $E(f)$ est égale à:

$$E(f) = \frac{1}{p!} \int_a^b K_p(x) f^{(p+2)}(x) dx.$$

Preuve:

Identique au cas élémentaire.

Corollaire: Supposons que la méthode de quadrature composée est d'ordre $p \in \mathbb{N}$, et notons H_p , son noyau de Peano.

(i) Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^{p+2}$ sur le segment $[a, b]$, alors:

$$|E(f)| \leq \left(\frac{1}{p!} \int_a^b |K_p(x)| dx \right) \|f^{(p+2)}\|_{\mathcal{C}^0([a, b])}.$$

(ii) Si le noyau de Peano H_p garde de plus un signe constant sur le segment $[a, b]$, alors, il existe un nombre $\xi \in (a, b)$ tel que:

$$E(f) = \frac{1}{(p+2)!} f^{(p+2)}(\xi) E(\cdot^{p+2}) = \frac{1}{p!} f^{(p+2)}(\xi) \int_a^b K_p(x) dx.$$

Preuve:

Identique au cas composé.

Il est facile de relier le noyau de Peano H_p de la méthode de quadrature composée à celui K_p de la méthode de quadrature élémentaire sous-jacente.

Lemme: Si H_p désigne le noyau de Peano de la méthode de quadrature composée et K_p , celui de la méthode de quadrature élémentaire, alors:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in (x_i, x_{i+1}), H_p(x) = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^{p+2} K_p \left(\frac{2}{x_{i+1} - x_i} \left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right).$$

Preuve:

Par définition, nous avons:

$$\forall x \in (a, b), \mathcal{H}_p(x) = \int_a^b (y-x)_+^p dy - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x_{i+2}-x_i}{2} \sum_{j=0}^p \lambda_j \left(\frac{1}{2} (x_{i+2}-x_i) \right) \left(y - \frac{1}{2} (x_{i+2}+x_i) - x \right)_+^p dy$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{x_{i+2}-x_i}{2} \right)^{p+1} \left\{ \int_{-1}^1 \left(y - \frac{1}{2} (x_{i+2}+x_i) - x \right)_+^p dy - \sum_{j=0}^p \lambda_j \left(\int_{-1}^1 \left(y - \frac{1}{2} (x_{i+2}+x_i) - x \right)_+^p dy \right) \right\}$$

Lorsque $x_i \leq x \leq x_{i+2}$, nous avons:

$$\forall 0 \leq h \leq n-1, \frac{1}{x_{h+2}-x_h} \left(x - \frac{1}{2} (x_{h+2}+x_h) \right) \in [-1, 1] \text{ si } h=i,$$

De sorte que:

$$\mathcal{H}_p(x) = \left(\frac{x_{i+2}-x_i}{2} \right)^{p+1} \left\{ \int_{-1}^1 \left(y - \frac{1}{2} (x_{i+2}+x_i) - x \right)_+^p dy - \sum_{j=0}^p \lambda_j \left(\int_{-1}^1 \left(y - \frac{1}{2} (x_{i+2}+x_i) - x \right)_+^p dy \right) \right\}$$

$$= \left(\frac{x_{i+2}-x_i}{2} \right)^{p+1} K_p \left(\frac{1}{2} (x_{i+2}+x_i) - x \right).$$

Nous déduisons de ce lemme la corollaire suivante.

Corollaire: Supposons que la méthode de quadrature composite est d'ordre $p \in \mathbb{N}$, et notons K_p , le noyau de Peano de la méthode de quadrature élémentaire sous-jacente.

(i) Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur le segment $[a, b]$, alors:

$$|E(f)| \leq \frac{h^{p+1}}{2^{p+1} p!} \left(\int_{-1}^1 |K_p(y)| dy \right) \|f^{(p+1)}\|_{L^\infty([a, b])}.$$

(ii) Si le noyau de Peano K_p garde de plus un signe constant sur le segment $[-1, 1]$, alors, il existe un nombre $\xi \in (a, b)$ tel

que:

$$E(f) = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{2^{p+1} p!} \sum_{i=0}^{n-2} (x_{i+2}-x_i)^{p+1} \int_{-1}^1 K_p(y) dy = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{2^{p+1} (p+1)!} \sum_{i=0}^{n-2} (x_{i+2}-x_i)^{p+1} \times E_{\text{Peano}}^{(p+1)}.$$

Preuve:

(i) Par le lemme précédent, nous savons que:

$$\int_a^b |\mathcal{H}_p(y)| dy = \sum_{i=0}^{n-2} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \left(\frac{x_{i+2}-x_i}{2} \right)^{p+1} |K_p \left(\frac{1}{2} (x_{i+2}+x_i) - y \right)| dy$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \int_{-1}^1 \left(\frac{x_{i+2}-x_i}{2} \right)^{p+1} |K_p(y)| dy$$

$$\leq \frac{h^{p+1}}{2^{p+1}} \int_{-1}^1 |K_p(y)| dy.$$

L'inégalité ci-dessus découle alors du corollaire précédent.

(ii) Il vient de même :

$$\int_a^b K_p(x) dx = \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{p+1} \int_{-1}^1 K_p(y) dy,$$

D'où les identités ci-dessus.

Lorsque le pas h tend vers 0, l'erreur est d'autant plus faible que l'ordre de la méthode de quadrature considérée est grand. Les méthodes d'ordre élevé sont donc plus précises (au moins lorsqu'elles sont appliquées à des fonctions régulières), mais leur mise en pratique peut s'avérer plus délicate.

Exemples: (i) Méthode du point milieu

Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ t.q. } |E(f)| = \left| \frac{h^3}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^2 f''(\xi) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{24} \|f''\|_{\mathcal{C}([a,b])}$$

(ii) Méthode des trapèzes

Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ t.q. } |E(f)| = \left| -\frac{h^3}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^2 f''(\xi) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \|f''\|_{\mathcal{C}([a,b])}$$

(iii) Méthode de Simpson

Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ t.q. } |E(f)| = \left| -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^4 f^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{h^4(b-a)}{2880} \|f^{(4)}\|_{\mathcal{C}([a,b])}$$

4. Influence des erreurs d'arrondis

Considérons la méthode de quadrature élémentaire associée à des points $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ distincts du segment $[-1, 1]$, qui consiste à approcher l'intégrale $\int_{-1}^1 g(y) dy$ d'une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}))$ par l'expression :

$$\int_{-1}^1 g(y) dy \approx \sum_{j=0}^N \lambda_j g(S_j),$$

où $\forall 0 \leq j \leq N, \lambda_j = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \frac{y - S_k}{S_j - S_k} dy$.

Fixons une subdivision $a = x_0 < \dots < x_{N+1} = b$ du segment $[a, b]$, et intéressons-nous à la méthode de quadrature composée associée à cette subdivision et à la mé-

thode de quadrature élémentaire ci-dessus. Les calculs associés à ces méthodes sont en pratique entachés d'erreurs d'arrondis. Si nous supposons que ces erreurs d'arrondis sur les calculs d'une fonction f définie et continue sur le segment $[a, b]$ sont au plus de l'ordre δ , l'erreur ainsi commise s'estime par la quantité :

$$\delta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \sum_{j=0}^N |\lambda_j|.$$

Lorsque les coefficients $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq N}$ ont tous même signe (donc sont de signe positif), cette quantité est égale à :

$$\delta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j = \delta \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \delta(b-a),$$

puisque $\sum_{j=0}^N \lambda_j = 1$. L'erreur totale ainsi commise s'avère donc très faible, de l'ordre de l'erreur d'arrondi δ . Ce n'est plus le cas lorsque les coefficients $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq N}$ sont de signes différents, puisque l'erreur est alors multipliée par la somme $\sum_{j=0}^N |\lambda_j|$, qui peut s'avérer très grande en pratique.

Afin de contrôler les erreurs d'arrondis, il est donc préférable que les coefficients $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq N}$ soient tous positifs. C'est le cas pour les diverses méthodes de quadrature que nous avons évoquées ci-dessus (méthodes des rectangles à gauche et à droite, du point milieu, des trapèzes, de Simpson, de Boole - Villeneuve et de Weddle - Hardy). Mais ce n'est plus le cas pour les méthodes de Newton - Cotes d'ordre supérieur ou égal à 8, ce qui explique qu'elles ne soient que peu utilisées.