**CY Cergy Paris Université** **Modélisation**
**Master 2 Mathématiques** **2023-2024**

# Examen

*La durée de cet examen est de deux heures. Les deux exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.*

**Exercice 1.** (6 points)

Soit $N \geq 1$. Étant donnés un nombre $R > 0$ et un point $a \in \mathbb{R}^N$, notons $B(a, R)$ la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $R$. Considérons alors une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et supposons qu'il existe un point $x_* \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$f(x_*) = 0, \quad \text{et} \quad df(x_*) \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}).$$

1.a. Vérifier que le sous-ensemble des matrices inversibles $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b. En déduire qu'il existe un nombre $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in B(x_*, \rho),\ df(x) \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}).$$

2. Soit

$$\forall x \in B(x_*, \rho),\ g(x) = x - df(x)^{-1} f(x).$$

a. Soit

$$\forall M \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}),\ \mathcal{I}(M) = M^{-1}.$$

Vérifier que la fonction inverse $\mathcal{I}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$, et que

$$\forall M \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}),\ d\mathcal{I}(M)(H) = -M^{-1} H M^{-1}.$$

b. En déduire que $g$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $B(x_*, \rho)$.

c. Vérifier que

$$\forall x \in B(x_*, \rho),\ dg(x) = df(x)^{-1} d^2 f(x) \big( df(x)^{-1} f(x), \cdot \big).$$

d. Conclure que $x_*$ est un point fixe superattractif de la fonction $g$.

**Exercice 2.** (14 points)

Soit $N \geq 1$. Notons $\langle\, , \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^N$, et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. Considérons une fonctionnelle elliptique $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, soit telle qu'il existe un nombre $\Lambda > 0$ pour lequel

$$\forall (x, y) \in \big(\mathbb{R}^N\big)^2,\ \langle \nabla F(y) - \nabla F(x), y - x \rangle \geq \Lambda \|y - x\|^2.$$

1.a. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \big(\mathbb{R}^N\big)^2,\ F(y) - F(x) \geq \langle \nabla F(x), y - x \rangle + \frac{\Lambda}{2} \|y - x\|^2.$$

b. En déduire que la fonctionnelle $F$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

c. Vérifier que

$$F(y) \underset{\|y\|\to+\infty}{\to} +\infty.$$

d. Conclure que $F$ possède un unique minimiseur $x_* \in \mathbb{R}^N$.

e. Vérifier que $x_*$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que

$$\nabla F(x_*) = 0.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $x \neq x_*$, posons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = F(x - t\nabla F(x)).$$

a. Vérifier que la fonction $f$ est elliptique sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que la fonction $f$ possède un unique minimiseur $\tau_x \in \mathbb{R}$.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par la formule de récurrence

$$\forall n \geq 0,\ x_{n+1} = \begin{cases} x_n, \text{ si } x_n = x_*, \\ x_n - \tau_{x_n}\nabla F(x_n), \text{ sinon.} \end{cases}$$

a. Vérifier que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite $(F(x_n))_{n\geq 0}$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $(F(x_n))_{n\geq 0}$ est convergente.

4.a Montrer que

$$\forall n \geq 0,\ \langle \nabla F(x_{n+1}), \nabla F(x_n)\rangle = 0.$$

b. En déduire que

$$\forall n \geq 0,\ \langle \nabla F(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle = 0.$$

c. En déduire que

$$F(x_n) - F(x_{n+1}) \geq \frac{\Lambda}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2.$$

d. Conclure que

$$x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

5.a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

b. En déduire que

$$\nabla F(x_{n+1}) - \nabla F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

c. Conclure que

$$\nabla F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

6.a. Vérifier que

$$\forall n \geq 0, \Lambda\|x_n - x_*\|^2 \leq \langle \nabla F(x_n), x_n - x_*\rangle.$$

b. Conclure que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_*.$$