

Chapitre III : Résolution de systèmes d'équations non linéaires

Introduction

Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$. L'objectif de ce chapitre est de présenter des méthodes pratiques de résolution de l'équation :

$$F(x_*) = 0,$$

où le point x_* appartient à l'espace $\mathbb{R}^n$, on a un sous-ensemble de cet espace.

Notons que nous pouvons toujours supposer que :

$$n = N.$$

En effet, si $n < N$, alors, le point x_* est une solution de l'équation :

$$F(x_*) = 0,$$

si et seulement si il est solution de l'équation :

$$G(x_*) = (F(x_*), 0, \dots, 0) = 0.$$

Au contraire, si $n > N$, alors, le point x_* est une solution de l'équation :

$$F(x_*) = 0,$$

si et seulement si le point $y_* = (x_*, 0) \in \mathbb{R}^n$ satisfait l'équation :

$$G(y_*) = F(x_*) = 0.$$

Dans la suite, nous supposons donc que :

$$n = N.$$

En pratique, déterminer une valeur approchée d'un zéro, ou d'une racine, x_* de la fonction F revient à construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_*.$$

La liste de la valeur approchée x_n parmi les valeurs prises par la suite

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépend de la précision de l'approximation recherchée. Si cette précision doit être de l'ordre d'un nombre strictement positif ε , le choix de la valeur approchée x_M sera tel que l'erreur à l'ordre M , qui est définie par la formule:

$$e_M = x_M - x_*,$$

vérifie l'inégalité:

$$\|e_M\| \leq \varepsilon,$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque de l'espace $\mathbb{R}^n$.

Notons ici que la valeur exacte de la racine x_* n'est pas connue en pratique. Afin de garantir la propriété précédente, le choix de la valeur approchée x_M se fera de sorte que:

$$\|x_M - x_{M+2}\| \leq \varepsilon,$$

et que l'évaluation de la vitesse de convergence vers le point x_* soit telle que:

$$\forall n \geq 0, \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Il sera donc nécessaire d'établir des estimations précises de la vitesse de convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Et plus ces vitesses seront rapides, meilleure sera la méthode, puisque l'entier n choisi sera d'autant plus petit.

Dans la suite, nous nous contenterons de présenter deux familles de méthodes de résolution de l'équation $F(x_*) = 0$, qui répondent aux impératifs précédemment mentionnés:

- les méthodes itératives, qui reposent sur le théorème du point fixe et consistent à construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui obéit à une relation de récurrence de la forme:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p+1}),$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et $f: (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction bien choisie.

Nous mentionnerons en particulier les méthodes de Picard, de Newton et de la sécante.

- les méthodes d'encadrement, qui reposent sur le théorème des valeurs intermédiaires, en particulier, les méthodes de dichotomie et de la fausse position.
- Nous insistons notamment sur l'estimation des vitesses de convergence pour ces différentes méthodes suivant les propriétés de la fonction F considérée et de sa racine x_* .

I Méthodes itératives

Ces méthodes reposent sur l'algorithme de Picard pour la preuve du théorème du point fixe. Considérons une fonction $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et cherchons à déterminer une racine x_* de cette fonction, soit une solution de l'équation:

$$F(x_*) = 0.$$

Il s'agit d'abord de déterminer une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui dépend de la fonction F , telle que, si un point $x_* \in \mathbb{R}^n$ est solution de l'équation:

$$x_* = f(x_*),$$

alors:

$$F(x_*) = 0.$$

Le choix le plus simple pour la fonction f consiste à poser:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = x - F(x),$$

mais ce choix ne garantit pas nécessairement que la fonction f satisfait aux hypothèses du théorème du point fixe, et donc qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la choice d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n),$$

converge vers un point fixe x_* de la fonction f . Ce choix ne garantit pas non plus que la vitesse de convergence vers ce possible point fixe x_* soit rapide, et nous introduisons d'autres choix pour lesquels la vitesse de convergence sera meilleure. Ceci conduira aux méthodes dites de Newton et de la sécante.

1. Méthode du point fixe de Picard

Soit $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Définition: Tout $a \in \mathbb{R}^N$. Le point a est un point fixe de la fonction f si et seulement si: $f(a) = a$.

Exemple: La fonction sinus a un point fixe en 0.

Définition: L'application f est contractante si et seulement s'il existe un nombre $K \in [0, 1[$ telle que:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^N)^2, \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

Exemple: La fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \cos(x)$ est contractante sur $\mathbb{R}$.

Théorème du point fixe de Banach: Supposons que la fonction f est contractante sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $K \in [0, 1[$ tel que:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^N)^2, \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

(i) Il existe un unique point $a \in \mathbb{R}^N$ tel que:

$$f(a) = a.$$

(ii) Si $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n),$$

alors:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a.$$

De plus, l'erreur e_n à l'ordre n définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = x_n - a,$$

satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \{0, \dots, m\}, \|e_n\| \leq \frac{K^{n-m}}{1-K} \|x_{m+1} - x_m\|.$$

Preuve:

(i) Unicité si existence:

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^N)^2$ tels que: $f(a) = a$. Il vient:

$$\text{Et } f(b) = b$$

$$\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| \leq K \|a - b\|$$

De sorte que $\|a - b\| = 0$ et $a = b$.

(ii) Existence:

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Posons:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n).$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+2} - x_n\| \leq K \|x_n - x_{n-1}\| \leq K^n \|x_1 - x_0\|$$

Comme la série $\sum_{n \geq 0} K^n$ est convergente, la série $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Il existe donc un point $a \in \mathbb{R}^N$ tel que:

$$a = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) + x_0,$$

Ce qui revient à dire que:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a.$$

Par continuité de la fonction f , il vient alors:

$$a = f(a).$$

(iii) Vitesse de convergence:

D'après le point (ii), nous avons également:

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = x_n - a = \sum_{k=n}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k),$$

De sorte que:

$$\|c_n\| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} K^k \|x_1 - x_0\| \leq \frac{K^n}{1-K} \|x_1 - x_0\|.$$

L'estimation recherchée découle alors de l'inégalité:

$$\forall 0 \leq m \leq n, \|x_m - x_{n+1}\| \leq K^{n-m} \|x_m - x_{m+1}\|.$$

En général, la fonction f n'est pas contractante sur l'espace $\mathbb{R}^N$, mais sur un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^N$.

Exemple: La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est contractante sur tout intervalle de la forme

$(a, a+1)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, mais n'est pas contractante sur $\mathbb{R}$.

Le théorème du point fixe demeure vrai lorsque X est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$.

Théorème du point fixe de Banach: Soit X , un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$ et $f: X \rightarrow X$, une fonction contractante sur X , c'est-à-dire telle qu'il existe un nombre $K \in [0, 1[$ tel que:

$$\forall (x, y) \in X^2, \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

(i) Il existe un unique point $a \in X$ tel que:

$$f(a) = a.$$

(ii) Si $x_0 \in X$ et si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n),$$

alors:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a.$$

De plus, l'erreur e_n à l'ordre n définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = x_n - a,$$

satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in [0, +\infty[, \|e_n\| \leq \frac{K^{m-n}}{1-K} \|x_{n+1} - x_n\|.$$

Preuve:

L'unicité du point fixe a été démontrée de manière identique au cas de l'espace $\mathbb{R}^N$. De même, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et elle vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\| \leq K^n \|x_1 - x_0\|$$

Il s'ensuit que:

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \text{ avec } m > n, \|x_m - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \|x_1 - x_0\| \cdot \frac{K^n}{1-K}.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans l'ensemble complet X .

L'existence du point fixe $a \in X$ découle de cette propriété, et l'estimation de l'erreur e_n se montre de manière identique au cas de l'espace $\mathbb{R}^N$.

La méthode de Picard pour la détermination des points fixes de la fonction f s'applique donc même lorsque la fonction f a plusieurs points fixes, qui correspondent à des sous-ensembles fermés différents de $\mathbb{R}^n$ dans lesquels f est contractante. Afin de vérifier si cette dernière propriété est vraie, nous introduisons la classification suivante des points fixes.

Définition: Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un point fixe $a \in \mathbb{R}^n$.

(i) Le point fixe a est attractif si et seulement si le rayon spectral de la différentielle de f en a vérifie l'inégalité:

$$\rho(df(a)) < 1.$$

(ii) Le point fixe a est super-attractif si et seulement si:

$$df(a) = 0.$$

(iii) Le point fixe a est répulsif si et seulement si le rayon spectral de la différentielle de f en a vérifie l'inégalité:

$$\rho(df(a)) > 1.$$

Nous avons alors la caractérisation suivante du caractère contractant de la fonction f autour d'un de ces points fixes.

Théorème: Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un point fixe $a \in \mathbb{R}^n$. Il existe une norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$, un nombre $\kappa \in [0, 1[$ et un nombre strictement positif R tels que:

$$\forall (x, y) \in B_p(a, R)^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \kappa \|x - y\|,$$

si et seulement si le point fixe a est attractif.

Preuve:

→ Nous observons que:

$$\forall h \in B_p(0, 1), \forall 0 \leq t \leq R, \|f(a+th) - f(a)\| \leq \kappa t \|h\|$$

De sorte qu'à la limite $t \rightarrow 0$,

$$\|df(a)(h)\| \leq \kappa \|h\|.$$

Il s'ensuit que:

$$\rho(df(a)) \leq \|df(a)\| \leq K < 1.$$

so Nous savons qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que la différentielle $df(a)$ satisfait l'inégalité:

$$\|df(a)\| \leq L,$$

pour la norme subordonnée $\|\cdot\|$ à la norme $\|\cdot\|$. Par continuité de la différentielle, il existe donc un nombre $K \in (0, 1[$ et un nombre strictement positif R tels que:

$$\forall x \in B_f(a, R), \|df(x)\| \leq K.$$

Le résultat découle alors du théorème des accroissements finis.

Notons que, lorsque le point fixe a est attractif, le théorème du point fixe peut s'appliquer puisque la fonction f est alors contractante sur la boule $B_f(a, R)$ et qu'elle satisfait de plus:

$$\forall x \in B_f(a, R), \|f(x) - a\| = \|f(x) - f(a)\| \leq K \|x - a\| \leq L,$$

De sorte que l'image par f de la boule $B_f(a, R)$ est incluse dans cette boule.

Dans le cas où le point fixe a est régulier, la fonction f n'est pas localement contractante au voisinage de ce point. Néanmoins, il reste parfois possible de déterminer la valeur du point fixe a par la méthode de Picard. Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a et qu'elle satisfait:

$$m(df(a)) = \min \{ |\lambda|, \lambda \in \sigma_s(df(a)) \} > 1.$$

Dans ce cas, la différentielle $df(a)$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage de a telle que f est bijective de ce voisinage sur son image. La bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a et elle satisfait:

$$df^{-1}(a) = df(a)^{-1},$$

De sorte que:

$$\rho(df^{-1}(a)) = \frac{1}{n \|df(a)\|} < 1.$$

Il est donc permis d'appliquer la méthode de Picard pour déterminer la valeur de a en tant qu'unique point fixe de la fonction f^{-1} . Ceci nécessite cependant de pouvoir déterminer la valeur de cette fonction.

Le théorème précédent conduit à la mise en pratique suivante de la méthode de Picard. Il est clair que résoudre l'équation $F(x_0) = 0$ revient à déterminer les points fixes des fonctions :

$$f(x) = x - \lambda F(x),$$

où λ est un nombre réel non nul bien choisi. Lorsque la fonction F est de classe C^1 , la différentielle de la fonction f en l'un de ses points fixes a est donnée par :

$$df(a) = I_N - \lambda dF(a),$$

et il s'agit donc de déterminer une valeur de λ telle que :

$$\rho(df(a)) = \rho(I_N - \lambda dF(a)) < 1.$$

Ceci n'est pas en général possible comme le montre l'exemple où :

$$dF(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Mais, en dimension un, ceci est permis dès lors que :

$$F'(a) \neq 0.$$

Dans ce cas, les suites définies par le choix d'une valeur $x_0 \in \mathbb{R}$ suffisamment proche de a , et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

convergeront vers le point a , qui sera solution de l'équation :

$$F(a) = 0.$$

Même dans ce cas, il reste nécessaire de connaître une valeur approchée de a pour bien choisir le nombre x_0 , ainsi qu'une valeur approchée de $F'(a)$ (ou au moins son signe) pour définir correctement la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notons qu'alors la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le point fixe a sera au moins géométrique, soit suivant la terminologie suivante, au moins

d'ordre 2.

Définition: Soit $x_* \in \mathbb{R}^n$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de $\mathbb{R}^n$ telle que:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_*.$$

Notons e_n , l'erreur à l'ordre n définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = x_n - x_*.$$

(i) La convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le point x_* est au moins d'ordre 2, ou au moins géométrique, si et seulement si:

$$\exists K \in (0, 1[\text{ t.q. } \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \|e_{n+2}\| \leq K \|e_n\|.$$

(ii) La convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le point x_* est au moins d'ordre 2, ou au moins quadratique, si et seulement si:

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \|e_{n+1}\| \leq K \|e_n\|^2.$$

(iii) Soit $p \in]2, +\infty[$. La convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le point x_* est au moins d'ordre p si et seulement si:

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \|e_{n+1}\| \leq K \|e_n\|^p.$$

Exemples: (i) La suite $(\sin(2^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge au moins géométriquement vers 0.

(ii) La suite $(2^{-2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge au moins quadratiquement vers 0.

Il est clair que la convergence est d'autant meilleure que l'ordre p de convergence est grand. Il est donc intéressant d'optimiser l'ordre p de convergence d'une méthode itérative. En ce qui concerne la méthode de Picard, nous avons le résultat suivant.

Corollaire: Sous les hypothèses du théorème des points fixes de Banach, la convergence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le choix d'un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n),$$

vers l'unique point fixe $x \in \mathbb{R}^n$ de la fonction f , est au moins géométrique.

Preuve:

En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|e_{n+2}\| = \|x_{n+2} - a\| = \|f(x_n) - f(a)\| \leq K \|e_n\|.$$

Cette vitesse de convergence est déjà rapide, mais il est possible de l'améliorer de beaucoup dans le cas suivant.

Théorème: Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un point fixe $a \in \mathbb{R}^n$ hyper-attractif. Il existe un nombre positif κ et un nombre strictement positif R tels que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par le choix d'un point $x_0 \in B_f(a, R)$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = f(x_n),$$

sont bien définies et convergent de manière au moins quadratique vers le point fixe a , soit de façon à ce que l'erreur se vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|e_{n+2}\| \leq \kappa \|e_n\|^2.$$

Preuve:

L'existence du nombre R tel que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers a lorsque $x_0 \in B_f(a, R)$ résulte des énoncés précédents. De plus, le théorème de Taylor - Lagrange permet d'établir l'existence d'un nombre positif K tel que:

$$\forall x \in B_f(a, R), \|f(x) - f(a)\| \leq \|df(a)(x-a)\| + \|f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\| \leq K \|x-a\|^2.$$

Il s'ensuit que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+2} - a\| \leq \kappa \|x_n - a\|^2,$$

De sorte que la convergence est au moins quadratique.

Ce résultat peut se généraliser de la façon suivante.

Théorème: Soit $p \in [2, +\infty[$. Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{p+2}$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un point fixe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que:

$$\forall 2 \leq k \leq p, \quad df^{(k)}(a) = 0.$$

Il existe un nombre strictement positif R tel que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par le choix d'un point $x_0 \in B_f(a, R)$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = f(x_n),$$

sont bien définies et convergent au moins à l'ordre $p+2$ vers le point fixe a , c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif K tel que l'erreur à l'ordre n satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|e_{n+2}\| \leq K \|e_n\|^{p+2}.$$

Preuve:

Elle est identique à la précédente. Le théorème de Taylor-Lagrange permet d'obtenir l'existence d'un nombre positif K tel que:

$$\forall x \in B_f(a, R), \quad \|f(x) - f(a)\| \leq K \|x - a\|^{p+2},$$

D'où on a que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|e_{n+2}\| = \|f(x_n) - f(a)\| \leq K \|e_n\|^{p+2}.$$

Notons que ces estimations de convergence sont optimales au sens suivant.

Théorème: Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un point fixe attractif $a \in \mathbb{R}^n$ tel que:

$$df(a) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$$

Il existe alors une norme $\|\cdot\|$ et des nombres strictement positifs K_1, K_2 et R tels que:

$$(i) \quad K_1 < 1 \text{ et } K_2 < 1,$$

(ii) Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par le choix d'un point $x_0 \in B_f(a, R)$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = f(x_n),$$

sont bien définies et convergent vers le point fixe a .

(iii) L'erreur e_n à l'ordre n satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad K_1 \|e_n\| \leq \|e_{n+2}\| \leq K_2 \|e_n\|.$$

Preuve:

D'après les énoncés précédents, il est suffisant d'établir le point (iii) pour des nombres K_1 et K_2 , qui satisfont le point (i).

Par la formule de Taylor avec reste intégral, nous savons que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} = f(a+c_n) - f(a) = df(a)(c_n) + \int_0^1 (df(a+tc_n) - df(a))(c_n) dt$$

Comme $\rho(df(a)) < 1$, nous pouvons choisir une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que la norme subordonnée $\|\cdot\|$ à cette norme de l'application $df(a)$ satisfasse:

$$\|df(a)\| < 1.$$

De plus, comme l'application $df(a)$ est continue, le minimum:

$$m = \inf \{ \|df(a)(c)\|, c \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|c\| = 1 \},$$

est atteint. Puisque l'application $df(a)$ est inversible, il vient:

$$m > 0.$$

Il s'ensuit que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \|c_n\| \leq \|df(a)(c_n)\| \leq \|df(a)\| \|c_n\|.$$

De plus, comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a , nous pouvons réduire si nécessaire la valeur de R de sorte que:

$$\forall x \in B(a, R), \quad \|df(x) - df(a)\| \leq \min \left\{ \frac{m}{2}, \frac{1 - \|df(a)\|}{2} \right\}$$

Il vient alors:

$$\left\| \int_0^1 (df(a+tc_n) - df(a))(c_n) dt \right\| \leq \min \left\{ \frac{m}{2}, \frac{1 - \|df(a)\|}{2} \right\} \|c_n\|$$

De sorte que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{m}{2} \|c_n\| \leq \|c_{n+2}\| \leq \frac{1 + \|df(a)\|}{2} \|c_n\|,$$

D'où le résultat pour $K_1 = \frac{m}{2}$ et $K_2 = \frac{1 + \|df(a)\|}{2}$.

Dans le cas de la dimension $N=1$, nous pouvons également démontrer la cétte d'optimalité suivant.

Exercice: Soit $p \in [2, +\infty[$. Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle possède un point fixe a tel que:

$$f(a) = \dots = f^{(p-2)}(a) = 0, \text{ et } f^{(p-1)}(a) \neq 0.$$

Il existe alors des nombres strictement positifs K_1, K_2 et R tels que les

suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par le choix d'un point $x_0 \in [a-h, a+h]$

et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = f(x_n),$$

sont bien définies et convergent vers le point fixe α . De plus l'erreur en n d'ordre n satisfait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_2 |x_n - \alpha|^p \leq |x_{n+2} - \alpha| \leq K_2 |x_n|^p$$

Preuve :

Il est de même suffisant d'établir la dernière inégalité. Les formules de Taylor avec reste intégral permet d'établir que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} &= f(x_{n+1}) - f(\alpha) \\ &= \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} (x_{n+1} - \alpha)^p + \int_0^1 \frac{f^{(p)}(\alpha + t(x_{n+1} - \alpha))}{(p-1)!} (x_{n+1} - \alpha)^{p-1} (1-t) dt \end{aligned}$$

La continuité de la fonction $f^{(p)}$ en α permet alors de réduire si nécessaire la valeur de h de façon à ce que :

$$\forall x \in [a-h, a+h], \quad |f^{(p)}(x) - f^{(p)}(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |f^{(p)}(\alpha)|.$$

Il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{|f^{(p)}(\alpha)|}{2p!} |x_n|^p \leq |x_{n+2} - \alpha| \leq 3 \frac{|f^{(p)}(\alpha)|}{2p!} |x_n|^p,$$

$$\text{D'où l'inégalité pour } K_2 = \frac{|f^{(p)}(\alpha)|}{2p!} \text{ et } K_2 = \frac{3|f^{(p)}(\alpha)|}{2p!}.$$

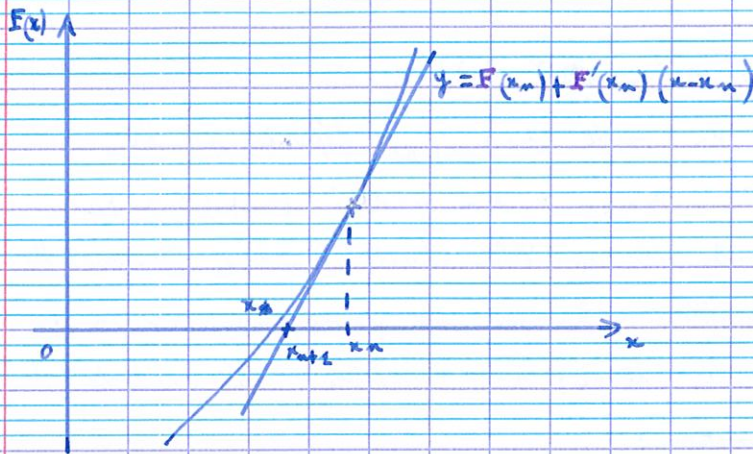
En conclusion, la méthode de Picard pour la détermination des points fixes α d'une fonction f est d'autant meilleure que les dérivées de cette fonction s'annulent en ce point. Si nous cherchons à résoudre l'équation $F(x_0) = 0$ par cette méthode, il est intéressant de trouver une formulation équivalente à cette équation de la forme :

$$x_0 = f(x_0),$$

telle que les dérivées successives de la fonction f en x_0 s'annulent. C'est le principe de la méthode de Newton que nous allons désormais étudier.

2. Méthode de Newton (ou Raphson)

La méthode de Newton, ou Newton - Raphson, repose sur le principe suivant :



Étant donnée une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont nous cherchons à déterminer une racine x_* , et un point initial $x_0 \in \mathbb{R}$, une bonne approximation de la fonction F au point x_0 est fournie par sa tangente en ce point, soit la droite d'équation :

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

Si le point x_0 n'est pas trop éloigné du point x_* , ce dernier point sera proche du point x_1 d'intersection des droites :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0),$$

dès lors que ce point sera bien défini, c'est-à-dire lorsque la dérivée $F'(x_0)$ sera non nulle. Dans ce cas, le point x_1 sera en effet donné par la formule :

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

Lorsque la dérivée $F'(x_1)$ sera elle-même non nulle, il sera possible d'itérer ce procédé en considérant le point $x_1 \in \mathbb{R}$ défini par :

$$x_1 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)},$$

puis, par récurrence (et toujours lorsque les dérivées successives sont non nulles), une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui obéit à la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}.$$

En cas de convergence vers un point $x_{\infty} \in \mathbb{R}$ tel que $F'(x_{\infty}) \neq 0$, la méthode itérative ainsi construite donnera une solution x_{∞} de l'équation :

$$F(x_{\infty}) = 0.$$

Cette méthode itérative dite de Newton ou de Newton-Raphson s'applique à la résolution de l'équation :

$$E(x_n) = 0,$$

où $E: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Étant donné un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$, il suffit de considérer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - dE^{-1}(x_n)(E(x_n)),$$

Lorsque cela est possible c'est-à-dire lorsque la différentielle $dE(x_n)$ est inversible. En cas de convergence vers un point $x_\infty \in \mathbb{R}^N$ tel que la différentielle $dE(x_\infty)$ soit inversible, la méthode donne une solution x_∞ de l'équation :

$$E(x_\infty) = 0.$$

Le principal avantage de cette méthode (lorsqu'elle est bien définie) réside dans sa vitesse de convergence, qui est, en général, quadratique. Cette affirmation repose sur le lemme suivant.

Lemme: Supposons que la fonction E est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$. Si $x_* \in \mathbb{R}^N$ est une racine de E telle que $dE(x_*)$ est inversible, alors, il existe un nombre strictement positif ρ tel que la fonction f définie par :

$$\forall x \in B(x_*, \rho), f(x) = x - dE(x)^{-1}(E(x)),$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur la boule ouverte $B(x_*, \rho)$ et de plus, le point x_* est un point fixe superattrayant de la fonction f .

Preuve:

Comme $dE(x_*)$ est inversible, il résulte du théorème d'inversion locale que la fonction E est un $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme d'une boule ouverte $B(x_*, \rho)$, avec $\rho > 0$, sur son image. En particulier,

$$\forall x \in B(x_*, \rho), dE(x) \in \mathcal{G.L.}_N(\mathbb{R}),$$

De sorte que la fonction f est bien définie sur la boule $B(x_*, \rho)$.

et par les opérations élémentaires, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cette boule. En particulier, il vient:

$$\begin{aligned} \forall x \in B(x_*, \rho), \quad df(x) &= I_N - dF(x)^{-1} (dF(x)) = dF(x)^{-1} (d^2F(x)(dF(x), \\ &\quad (F(x)), \cdot)) \\ &= -dF(x)^{-1} (d^2F(x)(dF(x)^{-1}(F(x)), \cdot)). \end{aligned}$$

En conclusion, nous obtenons:

$$f(x_*) = x_*, \text{ et } df(x_*) = 0,$$

De sorte que le point fixe x_* est superattractif.

Le lemme précédent permet d'établir que la méthode de Newton - Raphson est bien définie dans le voisinage d'une racine x_* de la fonction F telle que $dF(x_*)$ soit inversible, et que les suites ainsi construites convergent de manière au moins quadratique vers x_* .

Théorème: Supposons que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^N$ et qu'elle possède une racine $x_* \in \mathbb{R}^N$ telle que la différentielle $dF(x_*)$ est inversible. Il existe alors un nombre strictement positif R tel que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par le choix d'un point $x_0 \in B_R(x_*, R)$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - dF^{-1}(x_n) (F(x_n)),$$

sont bien définies et convergent au moins à l'ordre 2 vers la racine x_* , c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif K tel que l'erreur à l'ordre n satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|e_{n+1}\| \leq K \|e_n\|^2.$$

Démonstration:

Immédiat puisque la fonction f donnée par:

$$\forall x \in B(x_*, \rho), \quad f(x) = x - dF(x)^{-1} (F(x)),$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur la boule $B(x_*, \rho)$, et qu'elle possède un point fixe superattractif en x_* .

Dans le cas de la dimension $N=2$, la méthode de Newton - Raph son peut avoir un sens même si la dérivée $F'(x_*)$ s'annule, mais la convergence n'est alors que géométrique.

Théorème: Soit $p \in [2, +\infty[$. Supposons que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle possède une racine x_* telle que:

$$F'(x_*) = \dots = F^{(p-1)}(x_*) = 0, \text{ et } F^{(p)}(x_*) \neq 0.$$

Il existe alors un nombre strictement positif δ tel que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par le choix d'un point $x_0 \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \begin{cases} x_* & \text{si } x_n = x_*, \\ x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} & \text{sinon} \end{cases}$$

sont bien définies et convergent vers la racine x_* . De plus, il existe un nombre $0 \leq K < 1$ tel que l'erreur e_n à l'ordre n satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |e_{n+1}| \leq K |e_n|.$$

Preuve:

Considérons la fonction f définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x_* & \text{si } x = x_*, \\ x - \frac{F(x)}{F'(x)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme

$$F'(x) = \frac{F^{(p)}(x_*)}{(p-1)!} (x-x_*)^{p-2} + o_{x \rightarrow x_*}((x-x_*)^{p-2}),$$

il existe un nombre strictement positif ρ tel que la fonction f est bien définie sur $]x_* - \rho, x_* + \rho[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]x_* - \rho, x_* + \rho[$ et $]x_*, x_* + \rho[$. Notons alors que:

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{1}{p} (x-x_*) + o_{x \rightarrow x_*}(x-x_*),$$

De sorte que la fonction f se prolonge par continuité en x_* .

De même, nous savons que:

$$\frac{F(x) F''(x)}{F'(x)^2} \underset{x \rightarrow x_*}{\sim} \frac{F^{(p)}(x_*)^2}{p! (p-1)!} \frac{(x-x_*)^{2p-2} ((p-2)!)^2}{(x-x_*)^{2p-2} F^{(p)}(x_*)^2} = \frac{p-2}{p},$$

De sorte que la fonction f se prolonge de façon $\mathcal{C}^2$ en x_* en posant

soit :

$$f'(x_n) = \frac{p-2}{p}$$

En particulier, la racine x_p est un point fixe attractif de la fonction, ce qui permet d'achever la preuve.

Le théorème établit la robustesse de la méthode de Newton - Raphson, en moins en dimension $N=1$, où elle continue à converger vers un zéro de la fonctionnelle E , même si cette convergence est alors moins rapide.

En pratique, la méthode de Newton - Raphson se heurte aux difficultés suivantes :

- le choix du point initial x_0 est décisif puisque la convergence n'est assurée que dans un voisinage des racines de la fonction E . Il existe des exemples où la méthode de Newton - Raphson se révèle divergente lorsque le point initial x_0 est mal choisi. L'un de ces exemples est fourni par la fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$$

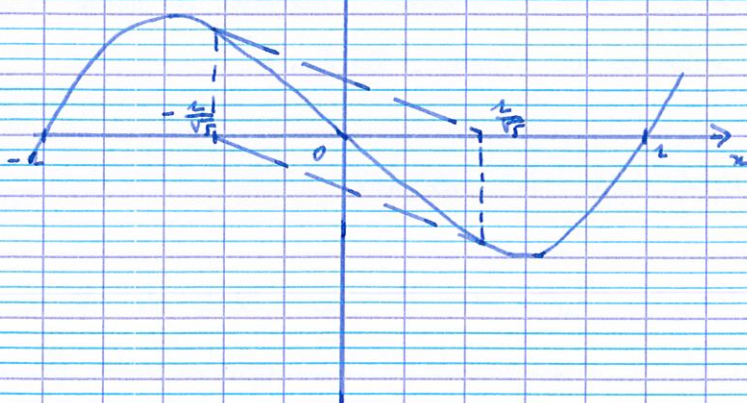
et le choix initial :

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

pour lequel il est facile d'établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (-1)^{n-2} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f(x) = x^3 - x$$

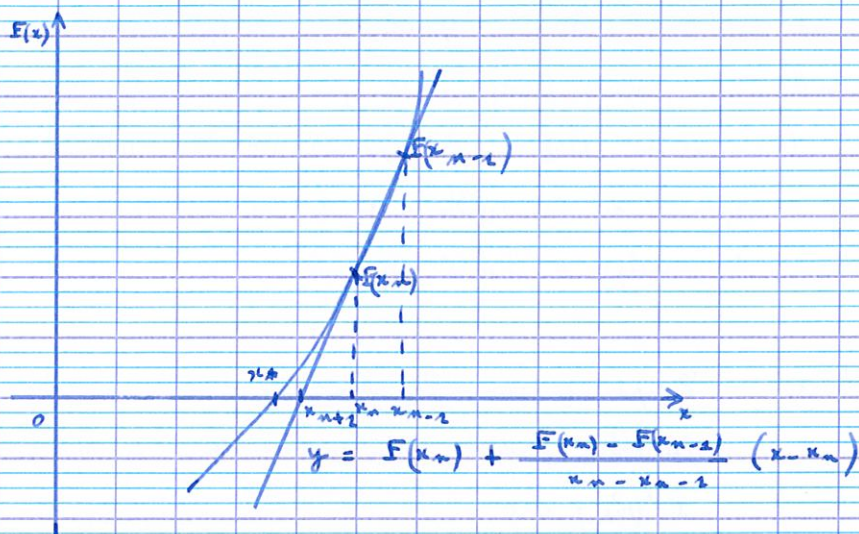


- il n'est pas toujours évident de calculer la différentielle de la fonction F , et l'inverse peut s'avérer coûteux en terme de temps de calcul. Une première façon de remédier à cette difficulté consiste à introduire une méthode pour laquelle le calcul de la différentielle n'est plus nécessaire, par exemple, la méthode de la sécante que nous analysons en détails ci-dessous. Dans ce cas, il n'y a bien sûr aucune garantie que la convergence de cette nouvelle méthode soit aussi rapide que pour la méthode de Newton-Raphson, et c'est en effet le cas pour la méthode de la sécante. Il est aussi permis de généraliser la méthode de Newton-Raphson en remplaçant la différentielle $dF(x_n)$ à l'étape n par une approximation L_n de cette application linéaire. Lorsque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, une manière simple de procéder consiste à fixer la valeur de L_n pour un certain nombre d'itérations à la valeur de la différentielle $dF(x_n)$, mais à n'actualiser cette quantité que lors d'un nombre k finie d'itérations. Lorsque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se révèle être convergente et que la différentielle est une application continue, l'erreur ainsi faite est suffisamment petite pour que la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ demeure une racine x_* de la fonction F . L'ouvrage intitulé "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation" de Ph. Giarlet fournit des conditions précises quant à la convergence de ces méthodes de Newton-Raphson généralisées, tandis que l'ouvrage intitulé "Modélisation à l'oral de l'agréation - Calcul scientifique" de G. Dumas mentionne d'autres améliorations possibles de la méthode de Newton-Raphson.

3. Méthode de la sécante

Il s'agit d'une alternative à la méthode de Newton-Raphson dans le cas particulier de la dimension $N=1$. La différence entre les deux méthodes réside dans le fait de remplacer la dérivée $F'(x_n)$ de la fonction F

à l'étape n par le taux d'accroissement $\frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. La méthode de la sécante repose donc sur le principe suivant:



Étant donnée une fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ dont nous cherchons à déterminer une racine x_* , et deux points distincts $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ suffisamment proches (et suffisamment proches de x_*), une bonne approximation de la fonction F au point x_1 est fournie par la droite d'équation:

$$y = F(x_1) + \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$

La racine x_* est donc proche du point x_1 d'intersection des droites:

$$y = 0 \text{ et } y = F(x_1) + \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0),$$

dès lors que ce point sera bien défini, c'est-à-dire lorsque le taux d'accroissement $\frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0}$ sera non nul. Dans ce cas, le point x_2 sera en effet donné par la formule:

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)(x_1 - x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}.$$

Par récurrence, et lorsque les taux d'accroissement successifs restent non nuls, il sera possible d'itérer ce procédé afin de constituer une suite de points (x_n) qui obéit à la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)(x_n - x_{n-1})}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

En cas de convergence vers un point $x_\infty \in \mathbb{R}$ tel que $F'(x_\infty) \neq 0$, cette méthode de la sécante fournira une solution x_∞ de l'équation:

$$F(x_\infty) = 0.$$

Un avantage de la méthode de la sécante vis-à-vis de celle de Newton - Raphson provient de la plus grande facilité à calculer un taux d'accroissement qu'une dérivée. Cependant, l'approximation de la fonction F ainsi calculée est moins bonne, ce qui ralentit la convergence vers la racine x_* (au moins lorsque la méthode est bien définie et qu'elle converge). La convergence de la méthode de la sécante demeure néanmoins rapide comme la vérifie l'exemple suivant.

Théorème: Supposons que la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle possède une racine $x_* \in \mathbb{R}$ telle que:

$$F'(x_*) \neq 0.$$

Il existe alors un nombre strictement positif R tel que les suites

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par le choix de deux points $(x_0, x_1) \in]x_* - R, x_* + R[$

tels que $x_0 \neq x_1$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \begin{cases} x_* & \text{si } x_n = x_{n-1} = x_*, \\ \text{et } x_n = \frac{F(x_n)(x_n - x_{n-1})}{F(x_n) - F(x_{n-1})} & \text{sinon,} \end{cases}$$

sont bien définies et convergent vers la racine x_* . De plus,

il existe des nombres strictement positifs C et $\theta < 1$ tels que

l'erreur à l'ordre n satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |e_n| \leq C \theta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Preuve:

Comme la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, il existe un voisinage I de la racine x_* tel que:

$$m = \inf_{x \in I} |F'(x)| > 0 \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in I} |F''(x)| < +\infty.$$

Soit alors $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que:

$$0 < \frac{2m}{M} \rho < 1 \quad \text{et} \quad]x_* - \rho, x_* + \rho[\subset I.$$

Considérons deux nombres $(x_0, x_1) \in]x_* - \rho, x_* + \rho[$ tels que:

$$x_0 \neq x_1,$$

et montrons par récurrence que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée est

bien définie et vérifie:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n, x_{n+1}] \subset]x_* - \rho, x_* + \rho[$, et $x_n = x_{n-2} \Rightarrow x_n = x_{n-2} = x_*$.

Ceci est vrai au rang $n=1$. Supposons que ce soit vrai jusqu'au rang n et intéressons-nous au rang $n+2$. Si $x_n = x_{n-2} = x_*$, alors, le nombre x_{n+2} est bien défini et vaut:

$$x_{n+2} = x_n = x_{n-2} = x_* \in]x_* - \rho, x_* + \rho[.$$

Si non, $x_n \neq x_{n-2}$. Comme la fonction F est strictement monotone sur l'intervalle $]x_* - \rho, x_* + \rho[$, il s'ensuit que:

$$F(x_n) \neq F(x_{n-2}),$$

De sorte que le point x_{n+2} est bien défini par la relation:

$$x_{n+2} = x_n - \frac{F(x_n) - F(x_{n-2})}{F'(x_n) - F'(x_{n-2})}.$$

Si $x_{n+2} = x_n$, alors,

$$F'(x_n) = 0.$$

Comme la fonction F est strictement monotone sur $]x_* - \rho, x_* + \rho[$, il vient:

$$x_n = x_* \Rightarrow x_{n+2} = x_n = x_* \in]x_* - \rho, x_* + \rho[.$$

Si $x_{n+2} \neq x_n$, alors,

$$x_{n+2} - x_* = x_n - x_* - \frac{(F(x_n) - F(x_*)) (x_n - x_{n-2})}{F'(x_n) - F'(x_{n-2})}.$$

Par le théorème des accroissements finis, nous savons qu'il existe des nombres $y_n \in]x_n, x_*[$ et $z_n \in]x_n, x_{n-2}[$ tels que:

$$F(x_n) - F(x_*) = (x_n - x_*) F'(y_n), \text{ et } F(x_n) - F(x_{n-2}) = (x_n - x_{n-2}) F'(z_n).$$

Il vient donc:

$$x_{n+2} - x_* = (x_n - x_*) \frac{F'(y_n) - F'(z_n)}{F'(y_n)}.$$

De sorte que:

$$|x_{n+2} - x_*| \leq \rho \frac{\pi |y_n - z_n|}{m} \leq \rho \frac{2\rho\pi}{m} < \rho.$$

Aussi le point x_{n+2} appartient-il à l'intervalle $]x_* - \rho, x_* + \rho[$, ce qui conclut la récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, il résulte de l'identité ci-dessus que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_{n+2} - x_*| \leq |x_n - x_*| \frac{2\rho\pi}{m} \leq \left(\frac{2\rho\pi}{m}\right)^n |x_2 - x_*|,$$

De sorte que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la racine x_* .

Soit donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = x_n - x_*$. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \neq 0$. Dans le cas contraire, l'estimation de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est vraie par définition.

tion de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous avons alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+2} - x_n = (x_n - x_0) \left(1 - \frac{(F(x_n) - F(x_0))(x_n - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(F(x_n) - F(x_{n-1}))} \right)$$

Nous calculons alors :

$$1 - \frac{(F(x_n) - F(x_0))(x_n - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(F(x_n) - F(x_{n-1}))} = \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} \left(\frac{F(x_{n-1}) - F(x_0)}{x_{n-1} - x_0} - \frac{F(x_0) - F(x_n)}{x_0 - x_n} \right)$$

La fonction φ définie par :

$$\forall y \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[, \varphi(y) = \begin{cases} \frac{F(y) - F(x_0)}{y - x_0} & \text{si } y \neq x_0, \\ F'(x_0) & \text{sinon,} \end{cases}$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ et elle satisfait :

$$\forall y \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[, \varphi'(y) = \begin{cases} \frac{F(x_0) - F(y) + F'(y)(y - x_0)}{(y - x_0)^2} & \text{si } y \neq x_0, \\ -\frac{1}{2} F''(x_0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, il résulte de la formule de Taylor avec reste intégral que :

$$\forall y \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[, |\varphi(y)| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Il s'ensuit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_{n+2}| \leq \frac{\eta}{2} |x_n| \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} \right| x_{n-2}$$

Comme F' ne change pas de signe sur l'intervalle $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$, nous avons également que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |F(x_n) - F(x_{n-1})| \geq m |x_n - x_{n-1}|,$$

De sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_{n+2}| \leq \frac{\eta}{2m} |x_n| |x_{n-1}|.$$

En particulier, la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n = \ln \left(\frac{\eta}{2m} |x_n| \right),$$

satisfait l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_{n+2} \leq \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}.$$

Par récurrence sur $\mathbb{N}$ et car $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_2 - \frac{2-\sqrt{5}}{2} \varepsilon_0}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \varepsilon_0 - \varepsilon_0}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\eta}{2m} |x_n| \leq \frac{\eta \varepsilon_0}{2m} \leq 1,$$

il vient :

$$\varepsilon_0 \leq 0 \text{ et } \varepsilon_1 \leq 0.$$

En particulier, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et un nombre $A \in \mathbb{R}^+$ tels que:

$$\forall n \geq N, \varepsilon_n \leq A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \Rightarrow |\varepsilon_n| \leq \frac{2^n}{n} (2^A) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

↳ inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\varepsilon_n| \leq C \theta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

on déduit pour $\theta = e^A$ et C assez grand.

Notons que, lorsque l'erreur ε_n satisfait l'inégalité:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\varepsilon_{n+2}| \leq K |\varepsilon_n|^p$$

pour des nombres réels $K \in \mathbb{R}_+$ et $p \in]2, +\infty[$, elle vérifie l'inégalité:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n \leq K \frac{p-1}{p+1} \varepsilon_0^{p^n}.$$

↳ l'estimation de la vitesse de convergence de la méthode de la sécante fournie par le théorème précédent correspond donc à une convergence au moins d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cette convergence est donc moins rapide que la convergence au moins quadratique de la méthode de Newton - Raphson, mais elle demeure plus satisfaisante que la convergence au moins géométrique de la méthode de Dichotomie.

En pratique, le calcul du taux d'accroissement $\frac{F(x_n) - F(x_{n-2})}{x_n - x_{n-2}}$ devient singulier lorsque x_n et x_{n-2} sont trop proches. Il se heurte de plus au problème des erreurs d'arrondis, de sorte qu'il est préférable d'arrêter en maintenant ce taux d'accroissement constant lorsque la différence entre les points x_{n-2} et x_n se rapproche de l'erreur machine.

II Méthodes d'encadrement

Ces méthodes reposent sur le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème des valeurs intermédiaires: Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que: $a \leq b$. Si la fonction F est continue sur le segment $[a, b]$,

alors :

$$\forall \lambda \in [F(a), F(b)], \exists c \in [a, b] \text{ t.q. } \lambda = F(c).$$

Preuve :

Supposons qu'il existe un nombre $\lambda \in [F(a), F(b)]$ tel que :

$$\forall c \in [a, b], F(c) \neq \lambda.$$

Supposons également que $F(a) \leq F(b)$ et considérons les ensembles :

$$\begin{cases} U_- = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x \leq a \text{ ou } x \in [a, b] \text{ t.q. } F(x) < \lambda\}, \\ U_+ = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > b \text{ ou } x \in [a, b] \text{ t.q. } F(x) > \lambda\}. \end{cases}$$

U_- et U_+ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Comme $U_- \cup U_+ = \mathbb{R}$, il résulte de la connexité de $\mathbb{R}$ que :

$$U_- = \emptyset \text{ ou } U_+ = \emptyset,$$

ce qui est absurde !

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de garantir qu'une fonction $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$F(a) < 0 \text{ et } F(b) > 0 \text{ (ou la converse),}$$

pour deux nombres réels $a < b$, possède une racine x_* qui appartient à l'intervalle $]a, b[$. Les méthodes d'encadrement consistent à choisir un point $a < c < b$ et à tester si $F(c) < 0$ ou si $F(c) > 0$. Dans le premier cas, la fonction F possèdera une racine dans l'intervalle $]c, b[$, dans le second cas, dans l'intervalle $]a, c[$. Répéter de manière itérée la taille de cet intervalle permet in fine de calculer une valeur approchée d'une racine x_* de la fonction F .

Les méthodes d'encadrement diffèrent suivant le choix du point $c \in]a, b[$ en fonction des points a et b . Les méthodes de dichotomie ou de bisection reposent sur le choix du milieu $c = \frac{a+b}{2}$ du segment $[a, b]$, la méthode de la fausse position reprend le choix effectif lors de la méthode de la sécante.

2. Méthode de dichotomie ou de bisection

Considérons une fonction $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et supposons qu'il existe deux points $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, avec $x_0 < y_0$, tels que:

$$F(x_0) < 0 < F(y_0).$$

La méthode de dichotomie, ou de bisection consiste à déterminer le signe de la quantité $F\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)$, puis à poser:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \text{ et } y_1 = \frac{x_0+y_0}{2} & \text{si } F\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) > 0, \\ x_1 = y_0 \text{ et } y_1 = \frac{x_0+y_0}{2} & \text{si } F\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) = 0, \\ x_1 = \frac{x_0+y_0}{2} \text{ et } y_1 = y_0 & \text{si } F\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) < 0, \end{cases}$$

et enfin à construire par récurrence deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant les prescriptions ci-dessus.

Le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'à chaque étape, la fonction F possède une racine x_* dans le segment (x_n, y_n) . Devant la convergence des deux suites, elle est fournie par le résultat suivant.

Lemme: Soit $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe deux points $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ tels que:

$$F(x_0) < 0 < F(y_0),$$

et définissons deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant la relation de récurrence suivante:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} & \text{si } F\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) > 0, \\ x_{n+1} = y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} & \text{si } F\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) = 0, \\ x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = y_n & \text{si } F\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont alors bien définies et convergent vers une racine x_* de la fonction F . De plus, l'erreur en au rang n définie par la formule:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = \max\{|x_n - x_*|, |y_n - x_*|\},$$

satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n \leq 2^{-n} |x_0 - y_0|.$$

Preuve:

Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. De plus, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, tandis que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin, nous pouvons établir par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |y_n - x_n| \leq 2^{-n} |y_0 - x_0|.$$

Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, de sorte que:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t. q. } \forall n \geq n_0, x_n \rightarrow x_0 \text{ et } y_n \rightarrow x_0.$$

Lemme

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(x_n) \leq 0 \text{ et } E(y_n) \geq 0,$$

il vient:

$$E(x_0) = 0.$$

Enfin, nous obtenons:

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n \leq |x_n - y_n| \leq 2^{-n} |y_0 - x_0|.$$

L' convergence de la méthode de dichotomie, ou de bisection, est donc au moins géométrique, ce qui est très correct, même si des méthodes telles que celles de Newton-Raphson ou de la sécante convergent plus vite.

Un avantage de cette méthode réside dans le fait qu'une fois déterminées les valeurs de x_0 et de y_0 , la convergence est assurée, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans les méthodes de Newton-Raphson et de la sécante où il est nécessaire que le choix initial de x_0 soit suffisamment proche de la racine x_0 .

Un inconvénient de la méthode se trouve dans la possible impossibilité de déterminer des points initiaux x_0 et y_0 tels que la fonction E satisfasse

$$E(x_0) \leq 0 \leq E(y_0).$$

Il en va par exemple ainsi pour la fonction E définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = x^2,$$

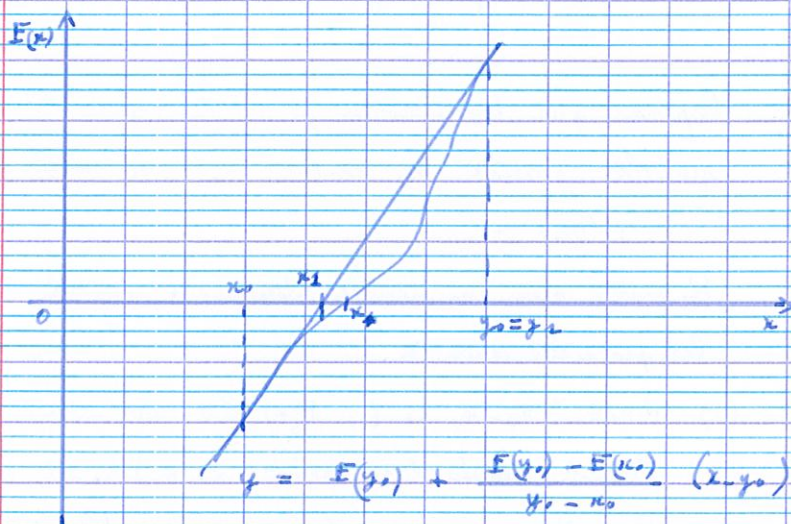
bien qu'elle s'annule en $x_0 = 0$. Le problème s'étend bien sûr aux

autres méthodes d'encadrement telles que la méthode de la fausse position.

2. Méthode de la fausse position

Elle reprend la construction mise en place pour la méthode de la sécante. Considérons une fonction $E \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et supposons qu'il existe deux points $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, avec $x_0 < y_0$, tels que :

$$E(x_0) \leq 0 \leq E(y_0)$$



La fonction E possède alors une racine x_* dans l'intervalle $]x_0, y_0[$. Lorsque les points x_0 et y_0 sont assez proches (et donc proches de x_*), une approximation correcte de la fonction E entre les points x_0 et y_0 est fournie par la droite d'équation :

$$y = E(y_0) + \frac{E(y_0) - E(x_0)}{y_0 - x_0} (x - y_0)$$

La racine x_* est alors proche du point d'intersection z_0 de cette droite et de la droite d'équation $y = 0$, qui est donné par la formule :

$$z_0 = \frac{E(y_0)x_0 - y_0 E(x_0)}{E(y_0) - E(x_0)}$$

Suivant le signe de $E(z_0)$, la racine x_* appartient à l'intervalle $]x_0, z_0]$ ou à l'intervalle $]z_0, y_0[$, et les points x_1 et y_1 sont définis de manière ad hoc. Par récurrence, il est possible de construire deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant les formules :

$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n = \frac{E(y_n)x_n - y_n E(x_n)}{E(y_n) - E(x_n)} \text{ et } y_{n+1} = y_n \text{ si } x_n \neq y_n \text{ et } E(z_n) \leq 0 \\ x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = z_n \text{ si } E(z_n) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_{n+1} & \text{si } x_n = y_n \\ x_{n+1} = y_{n+1} = g_n & \text{si } E(g_n) = 0 \text{ et } x_n < y_n \\ x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = g_n & \text{si } E(g_n) > 0 \text{ et } x_n < y_n. \end{cases}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'à chaque étape, la fonction E possède une racine dans le segment $[x_n, y_n]$, et il est permis d'imaginer que les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vont converger vers une racine de E à une vitesse plus rapide que celle de la méthode de dichotomie ou de bisection. Cette dernière affirmation n'est en fait pas si vraie.

Théorème: Supposons que la fonction E est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle possède une racine $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que:

$$E'(x_0) > 0.$$

Il existe alors un nombre strictement positif R tel que nous ayons les propriétés suivantes.

(i) $\forall x \in]x_0 - R, x_0[$, $E(x) < 0$ et $\forall x \in]x_0, x_0 + R[$, $E(x) > 0$.

(ii) Étant donné deux points $x_0 \in]x_0 - R, x_0[$ et $y_0 \in]x_0, x_0 + R[$,

les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_{n+1} & \text{si } x_n = y_n, \\ x_{n+1} = y_n = \frac{E(y_n)x_n - y_n E(x_n)}{E(y_n) - E(x_n)} & \text{et } y_{n+1} = y_n \text{ si } E(g_n) = 0 \text{ et } x_n < y_n, \\ \text{et } x_{n+1} = y_{n+1} = g_n & \text{si } E(g_n) > 0 \text{ et } x_n < y_n, \\ x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = g_n & \text{si } E(g_n) > 0 \text{ et } x_n < y_n, \end{cases}$$

sont bien définies et au moins l'une des deux suites converge vers la racine x_0 .

(iii) De plus, l'erreur en un rang n définie par la formule:

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \left| x_n - x_0 \right|^{\frac{1}{2}} \left| y_n - x_0 \right|^{\frac{1}{2}}$$

satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} \leq K e_n,$$

$$\text{où } K \in [0, 1[.$$

Preuve:

(i) Cette propriété est vraie si R est assez petit puisque $F(x_*) = 0$ et $F'(x_*) > 0$.

(ii) Comme la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, il existe un tel voisinage I de la racine x_* tel que:

$$m = \inf_{x \in I} |F'(x)| > 0 \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in I} |F''(x)| < +\infty.$$

Soit alors un nombre strictement positif R suffisamment petit pour que:

$$0 < \frac{2MR}{m} < 1 \quad \text{et} \quad]x_* - R, x_* + R[\subset I.$$

Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies, et montrent par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'elles vérifient:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_* - R < x_n \leq x_* \leq y_n < x_* + R.$$

Ceci est vrai au rang 0. Supposons que ce soit vrai aux rangs $k \in [0, n-1]$ et introduisons nous au rang $n+k$. Deux cas se présentent:

- Si $x_n = y_n$, alors,

$$x_n = y_n = x_*$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} = x_*$$

- Si $x_n \neq y_n$ et si $y_n = \frac{F(x_n)x_* - x_n F(x_*)}{F(x_n) - F(x_*)}$ satisfait $F(y_n) = 0$, alors,

$$x_{n+1} = y_{n+1} = x_*$$

- Si $x_n \neq y_n$, et $F(y_n) < 0$, alors:

$$x_* \leq y_{n+1} < x_* + R,$$

et $x_{n+1} = y_n$. Calculons alors:

$$x_* - x_{n+1} = x_* - x_n + \frac{F(x_n)(x_* - y_n)}{F(x_n) - F(y_n)} = (x_* - x_n) \left(1 - \frac{F(x_n) - F(y_n)}{F(x_n) - F(y_n)} \frac{x_* - y_n}{x_n - x_*} \right)$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe alors des nombres $\tilde{y}_n \in]x_n, x_*[$

et $\tilde{y}_n \in]x_n, y_n[$ tels que:

$$F(x_n) - F(x_*) = (x_n - x_*) F'(\tilde{y}_n),$$

$$\text{et} \quad F(x_n) - F(y_n) = (x_n - x_{n+1}) F'(\tilde{y}_n).$$

Il vient donc:

$$x_* - x_{n+1} = (x_* - x_n) \left(1 - \frac{F'(\tilde{y}_n)}{F'(\tilde{y}_n)} \right)$$

De sorte que:

$$|x_* - x_{n+1}| \leq R \wedge |\tilde{y}_n - x_*| \leq \frac{2MR}{m} R < R.$$

Comme $F(x_{n+1}) < 0$, il vient:

$$x_{n+1} - R \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}.$$

Le cas $x_n \neq y_n$ et $E(y_n) > 0$ se traite de la même façon.

La propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n - R \leq x_{n+1} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n+1} \leq x_n + R,$$

en résulte par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$.

(iii) De plus, nous pouvons affirmer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_{n+1} \leq K \varepsilon_n,$$

avec $K = \sqrt{\frac{1+R}{m}} < 1$. Il s'ensuit que:

$$\varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

Comme les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, car monotones et bornées, au moins l'une des deux converge vers la racine x_* , ce qui conclut la preuve.

Remarquons que la convergence précédente implique également que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ then } \{|x_n - x_*|, |y_n - x_*|\} \leq \varepsilon_n \leq K^n \varepsilon_0,$$

De sorte que, lorsqu'une seule des deux suites converge vers x_* , la convergence est au moins géométrique. C'est le cas lorsque la fonction E est de plus localement convexe ou concave, soit du type:

$$E''(x_*) \in \mathbb{R}^*.$$

La méthode de la fausse position n'est néanmoins pas beaucoup plus rapide que celle de dichotomie, ou de bisection, et elle présente à la fois les défauts de cette méthode à travers le choix de points initiaux x_1 et x_2 , et ceux des méthodes de Newton - Raphson et de la sécante à travers le choix d'un voisinage de la racine x_* à déterminer.