Devoir à la maison N°1

1 Le modèle de Leontieff

Le modèle de Leontieff décrit une situation d'équilibre pour l'économie d'un pays à travers la détermination de la quantité de biens à produire.

Le modèle considère une partition de l'économie en $N \geq 1$ secteurs qui produisent une quantité notée x_i d'un bien i. Pour produire ce bien, le secteur i consomme une quantité $a_{i,j}$ du bien j par unité de bien i produite. La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ est appelée matrice de production de l'économie. La demande des consommateurs pour le bien i est notée c_i.

Le modèle de Leontieff cherche à déterminer l'équilibre économique via le bilan des quantités de biens produits et consommés, soit via la résolution de l'équation

$$x = Ax + c,$$

où $x = (x_i)_{1 \leq i \leq N}$ et $c = (c_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^N$, dont toutes les composantes sont positives. Les coefficients de la matrice A sont aussi positifs.

Il s'agit donc de résoudre l'équation

$$Bx = c,$$

où la matrice $B = I_N - A$ a une structure dite de Z-matrice : tous ses coefficients non diagonaux sont négatifs ou nuls.

1.1 Aspect théorique

Afin de résoudre cette question, nous introduisons la classe des matrices productives : une Z-matrice B est dite productive si et seulement si, quel que soit le vecteur c à composantes positives, il existe un unique vecteur x à composantes positives tel que

$$Bx = c.$$

Cette classe est exactement celle dans laquelle nous pouvons résoudre de manière satisfaisante le problème de l'équilibre de Leontieff. Nous cherchons par conséquent à établir des caractérisations des Z-matrices productives.

1. Soit B une Z-matrice productive.

a. Vérifier qu'il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^N$ à coefficients positifs tel que tous les coefficients du vecteur By sont strictement positifs.

b. Montrer que tous les coefficients du vecteur y sont strictement positifs.

2. Soit B une Z-matrice pour laquelle il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^N$ à coefficients strictement positifs tel que tous les coefficients du vecteur By sont strictement positifs.

a. Soit $Y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux du vecteur y. Vérifier que la matrice BY est à diagonale dominante.

b. Vérifier que tous les coefficients de la matrice inverse $(BY)^{-1}$ sont positifs.

c. En déduire que la matrice B est inversible et que tous les coefficients de son inverse B^{-1} sont positifs.

d. Conclure qu'une Z-matrice B est productive si et seulement s'il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^N$ à coefficients strictement positifs tel que tous les coefficients du vecteur By sont strictement positifs ou si et seulement si elle est inversible d'inverse à coefficients positifs.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs.

a. Supposons que son rayon spectral satisfait l'inégalité

$$\rho(A) < 1.$$

Vérifier que la matrice $I_N - A$ est inversible d'inverse d'égal à

$$\big(I_N - A\big)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

b. En déduire que la Z-matrice $I_N - A$ est productive.

4.a. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs telle que la Z-matrice $I_N - A$ est productive. Vérifier que la Z-matrice $tI_N - A$ est productive lorsque $t \geq 1$.

b. Rappelons le théorème de Perron-Frobenius qui assure que le rayon spectral d'une matrice M à coefficients positifs est une valeur propre de cette matrice. Déduire de ce théorème que la Z-matrice $I_N - A$ est productive si et seulement si

$$\rho(A) < 1.$$

1.2 Aspect numérique

1.a. Écrire une fonction *Matrice* qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et fournit en sortie une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs.

b. Écrire une fonction *rho* qui donne une valeur approchée du rayon spectral d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

c. Écrire une fonction *MatrProd* qui renvoie une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs, telle que la matrice $B = I_N - A$ soit productive et que son conditionnement soit inférieur ou égal à un nombre réel $\delta > 1$.

2.a. Écrire une fonction *Vecteur* qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et fournit en sortie un vecteur $c \in \mathbb{R}^N$ dont les coefficients sont positifs.

b. Considérons un vecteur $c \in \mathbb{R}^N$ dont les coefficients sont positifs, et une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs, et telle que la matrice $B = I_N - A$ soit productive. Écrire une fonction *Jacobi* qui résout l'équation $x = A(x) + c$ par la méthode de Jacobi.

c. Écrire une fonction *Gauss_Seidel* qui résout l'équation $x = A(x) + c$ par la méthode de Gauss-Seidel.

d. Écrire une fonction *Picard* qui résout l'équation $x = A(x) + c$ par la méthode du point fixe.

e. Comparer numériquement la rapidité des algorithmes *Jacobi*, *Gauss_Seidel* et *Picard*.

2 La méthode d'interpolation de Hermite

Soit $N \geq 0$. Considérons $N+1$ points deux à deux distincts x_0, x_1, …, et x_N de $\mathbb{R}$, et une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de chacun de ces points. L'objectif de cet exercice est d'introduire, puis de calculer le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f aux points x_0, …, x_N, soit l'unique polynôme réel $H_f(X)$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\ H_f(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad H_f'(x_i) = f'(x_i).$$

2.1 Aspect théorique

1. Vérifier qu'il existe au plus un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\ P(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad P'(x_i) = f'(x_i).$$

2. Soit

$$\forall 0 \leq i \leq N,\ P_i(X) = \ell_i(X)^2,$$

où $\ell_0(X)$, …, $\ell_N(X)$ désignent les polynômes de base de Lagrange aux points x_0, …, x_N donnés par les formules

$$\forall 0 \leq i \leq N,\ \ell_i(X) = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

a. Pour $0 \leq i \leq N$, vérifier que

$$P_i(x_i) = 1, \quad P_i'(x_i) = 2\ell_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}, \quad \text{et} \quad \forall j \neq i,\ P_i(x_j) = P_i'(x_j) = 0.$$

b. Vérifier qu'il existe un unique couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que le polynôme $Q_i(X) = (a_i X + b_i)\, P_i(X)$ satisfait

$$Q_i(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad Q_i'(x_i) = f'(x_i).$$

c. En déduire qu'il existe un unique polynôme $H_f(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\ H_f(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad H_f'(x_i) = f'(x_i).$$

d. Vérifier que

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\big(1 - 2\ell_i'(x_i)(X - x_i)\big)\ell_i(X)^2 + \sum_{i=0}^{N} f'(x_i)\big(X - x_i\big)\ell_i(X)^2.$$

3.a. Montrer qu'il existe deux familles réelles uniques $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq N}$ et $(\beta_i)_{0 \leq i \leq N}$, et une famille unique de polynômes $(R_i(X))_{0 \leq i \leq N+1}$ telles que

$$R_0(X) = H_f(X), \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq N,\ R_i(X) = \alpha_i + \beta_i(X - x_i) + (X - x_i)^2 R_{i+1}(X).$$

b. Vérifier que

$$R_{N+1}(X) = 0.$$

c. En déduire que

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} \big(\alpha_i + \beta_i(X - x_i)\big) \prod_{j=0}^{i-1} (X - x_j)^2.$$

4.a. Vérifier que

$$\alpha_0 = f(x_0), \quad \text{et} \quad \beta_0 = f'(x_0).$$

b. Notons $f_0 = f$, et considérons les fonctions $(f_i)_{1\le i\le N}$ définies par

$$\forall 0 \le i \le N-1,\ f_{i+1}(x) = \frac{f_i(x) - f_i(x_i) - f_i'(x_i)(x - x_i)}{(x - x_i)^2}.$$

Vérifier que les fonctions $(f_i)_{1\le i\le N}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_i, … et x_N.

c. Soit $1 \le i \le N$. Montrer que

$$\alpha_i = f_i(x_i), \quad \text{et} \quad \beta_i = f_i'(x_i),$$

et que le polynôme $R_i(X)$ est le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f_i aux points x_i, …, x_N.

2.2 Aspect numérique

1.a. Définir une fonction *Base* qui prend en entrée un entier $0 \le i \le N$, une liste de coefficients $X = [x_0, \dots, x_N]$ et un nombre réel x, et renvoie la valeur au point x du polynôme $\ell_i(X)$.

b. Définir une fonction *DerivBase* qui prend en entrée un entier $0 \le i \le N$ et une liste de coefficients $X = [x_0, \dots, x_N]$, et renvoie la valeur au point x_i du polynôme dérivée ℓ_i'.

c. Utiliser les fonctions *Base* et *DerivBase* pour définir une fonction *Hermite1* qui prend en entrée une fonction de la variable réelle f, sa dérivée g, une liste de coefficients $X = [x_0, \dots, x_N]$ et un nombre réel x, et renvoie la valeur au point x du polynôme d'interpolation de Hermite $H_f(X)$ aux points x_0, …, et x_N.

2.a. Définir une fonction *CoeffHermite* qui prend en entrée une fonction de la variable réelle f, sa dérivée g et une liste de coefficients $X = [x_0, \dots, x_N]$, et renvoie les deux listes des coefficients $(\alpha_i)_{0\le i\le N}$ et $(\beta_i)_{0\le i\le N}$ du polynôme d'interpolation de Hermite $H_f(X)$ aux points x_0, …, x_N.

b. Utiliser la fonction *CoeffHermite* pour définir une fonction *Hermite2* qui prend en entrée une fonction de la variable réelle f, sa dérivée g, une liste de coefficients $X = [x_0, \dots, x_N]$ et un nombre réel x, et renvoie la valeur au point x du polynôme d'interpolation de Hermite $H_f(X)$ aux points x_0, …, et x_N.

3. Utiliser la définition des polynômes $(R_i)_{0\le i\le N}$ pour définir une fonctions récursive *Hermite3* qui prend en entrée une fonction de la variable réelle f, sa dérivée g, une liste de coefficients $X = [x_0, \dots, x_N]$ et un nombre réel x, et renvoie la valeur au point x du polynôme d'interpolation de Hermite $H_f(X)$ aux points x_0, …, et x_N.

4. Comparer numériquement la rapidité des algorithmes *Hermite1*, *Hermite2* et *Hermite3*.