CY Cergy Paris Université **Modélisation**
Master 2 Mathématiques **2023-2024**

Corrigé de l'examen

Exercice 1.

1.a. Rappelons qu'une matrice carrée M est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. Le sous-ensemble $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles est donc l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application déterminant

$$\mathcal{GL}_N(\mathbb{R}) = \det^{-1}\big(\mathbb{R}^*\big).$$

Sachant que le déterminant est une application polynomiale sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, elle est continue, et comme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, le sous-ensemble $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b. Par hypothèse, la différentielle $df(x_*)$ est inversible, de sorte que d'après la question 1.a, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$B\big(df(x_*), \delta\big) \subset \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}).$$

Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$, sa différentielle df est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$, de sorte qu'elle est continue en x_*. Il existe donc un nombre $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in B(x_*, \rho),\ df(x) \in B\big(df(x_*), \delta\big),$$

ce qui assure que

$$\forall x \in B(x_*, \rho),\ df(x) \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}).$$

2.a. Par définition de l'ensemble $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$, l'application inverse est bien définie sur $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$. Étant donnée une matrice $M \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ et une matrice $H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, nous calculons de plus

$$M + H = M\big(I_N + M^{-1}H\big).$$

Considérons alors la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^N$ et sa norme subordonnée $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Comme la matrice M^{-1} n'est pas nulle, sa norme $|||M^{-1}|||$ n'est pas non plus nulle. Lorsque la norme $|||H|||$ satisfait l'inégalité

$$|||H||| < \frac{1}{|||M^{-1}|||},$$

nous savons que

$$|||-M^{-1}H||| \leq |||H|||\,|||M^{-1}||| < 1,$$

et la série géométrique $\sum_{n\geq 0} |||-M^{-1}H|||^n$ est convergente. Sachant que

$$\forall n \geq 0,\ |||(-M^{-1}H)^n||| \leq |||-M^{-1}H|||^n,$$

la série $\sum_{n\geq 0}(-M^{-1}H)^n$ est absolument convergente, donc convergente. En particulier, nous savons que

$$(-M^{-1}H)^{m+1} \underset{m\to+\infty}{\to} 0.$$

Comme

$$\forall m \geq 0,\ \big(I_N + M^{-1}H\big)\sum_{n=0}^{m}(-M^{-1}H)^n = I_N + (-M^{-1}H)^{m+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{m}(-M^{-1}H)^n\big(I_N + M^{-1}H\big),$$

nous obtenons à la limite $m \to +\infty$

$$\big(I_N + M^{-1}H\big)\sum_{n=0}^{+\infty}(-M^{-1}H)^n = I_N = \sum_{n=0}^{+\infty}(-M^{-1}H)^n\big(I_N + M^{-1}H\big).$$

La matrice $I_N + M^{-1}H$ est donc inversible, d'inverse égal à

$$\big(I_N + M^{-1}H\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-M^{-1}H)^n,$$

et nous concluons que la matrice $M + H$ est inversible d'inverse

$$\mathcal{I}(M+H) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-M^{-1}H)^n M^{-1}.$$

En particulier, il vient

$$\mathcal{I}(M+H) = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-M^{-1}H)^n.$$

Nous vérifions alors que

$$\Big|\Big|\Big|\sum_{n=2}^{+\infty}(-M^{-1}H)^n\Big|\Big|\Big| \leq \sum_{n=2}^{+\infty}|||(M^{-1}H)^n||| \leq \sum_{n=2}^{+\infty}|||M^{-1}|||^n\,|||H|||^n = \frac{|||M^{-1}|||^2\,|||H|||^2}{1 - |||M^{-1}|||\,|||H|||},$$

de sorte que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-M^{-1}H)^n = \underset{|||H|||\to 0}{o}\big(|||H|||\big).$$

L'application inverse $\mathcal{I}$ est donc différentiable en M, et sa différentielle vaut

$$\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ d\mathcal{I}(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}.$$

En particulier, l'application inverse est continue sur $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$.

Nous calculons enfin

$$\forall P \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}),\ d\mathcal{I}(P)(H) - d\mathcal{I}(M)(H) = -\big(P^{-1} - M^{-1}\big)HP^{-1} - M^{-1}H\big(P^{-1} - M^{-1}\big),$$

de sorte que

$$\Big|\Big|\Big|d\mathcal{I}(P)(H) - d\mathcal{I}(M)(H)\Big|\Big|\Big| \leq \Big|\Big|\Big|P^{-1} - M^{-1}\Big|\Big|\Big|\Big(\Big|\Big|\Big|M^{-1}\Big|\Big|\Big| + \Big|\Big|\Big|P^{-1}\Big|\Big|\Big|\Big)\Big|\Big|\Big|H\Big|\Big|\Big|.$$

Nous déduisons donc de la continuité de l'application $\mathcal{I}$ que

$$\sup_{H\neq 0}\frac{\Big|\Big|\Big|d\mathcal{I}(P)(H) - d\mathcal{I}(M)(H)\Big|\Big|\Big|}{\Big|\Big|\Big|H\Big|\Big|\Big|} \underset{|||H|||\to 0}{\to} 0,$$

ce qui signifie que la différentielle $d\mathcal{I}$ est continue sur $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$, puis que l'application $\mathcal{I}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$.

b. D'après la question 1.b, la différentielle df est inversible sur la boule $B(x_*, \rho)$, de sorte que la fonction g est bien définie sur cette boule. De plus, elle vaut

$$\forall x \in B(x_*, \rho),\ g(x) = x - \mathcal{I}\big(df(x)\big) f(x).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$, sa différentielle df est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$, et il résulte de la question 2.a et des opérations élémentaires sur les fonctions que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $B(x_*, \rho)$.

c. Par la formule de la différentielle d'une composée, nous déduisons de la question 2.a que

$$\forall x \in B(x_*, \rho),\ d\big(df^{-1}\big)(x) = d\big(\mathcal{I} \circ df\big)(x) = -df(x)^{-1} d^2 f(x)\big(df(x)^{-1} \cdot, \cdot\big),$$

d'où par la formule de la différentielle d'un produit,

$$dg(x) = I_N - d\big(df^{-1}\big)(x) f(x) - df(x)^{-1} df(x) = df(x)^{-1} d^2 f(x)\big(df(x)^{-1} f(x), \cdot).$$

d. Comme le point x_* est une racine de la fonction f, nous savons que

$$g(x_*) = x_* - df(x_*)^{-1} f(x_*) = x_* - df(x_*)^{-1}\big(0\big) = x_*,$$

et x_* est un point fixe de la fonction g. Il résulte de plus de la question 2.c que

$$dg(x_*) = df(x_*)^{-1} d^2 f(x_*)\Big(df(x_*)^{-1} f(x_*), \cdot\Big) = df(x_*)^{-1} d^2 f(x_*)\Big(df(x_*)^{-1}\big(0\big), \cdot\Big) = 0,$$

et x_* est un point fixe superattractif de la fonction g.

Exercice 2.

1.a. Par la formule de Taylor avec reste intégrale, nous savons que

$$F(y) = F(x) + \int_0^1 \big\langle \nabla F(x + t(y - x)), y - x \big\rangle \, dt,$$

de sorte que

$$F(y) - F(x) = \big\langle \nabla F(x), y - x \big\rangle + \int_0^1 \big\langle \nabla F(x + t(y - x)) - \nabla F(x), y - x \big\rangle \, dt.$$

L'hypothèse d'ellipticité assure alors que

$$\forall t \in]0, 1],\ \big\langle \nabla F(x + t(y - x)) - \nabla F(x), y - x \big\rangle \geq \frac{\Lambda}{t} \big\| t(y - x) \big\|^2 = \Lambda t \big\| y - x \big\|^2,$$

d'où nous déduisons que

$$\int_0^1 \big\langle \nabla F(x + t(y - x)) - \nabla F(x), y - x \big\rangle \, dt \geq \Lambda \big\| y - x \big\|^2 \int_0^1 t \, dt = \frac{\Lambda}{2} \big\| y - x \big\|^2,$$

puis

$$F(y) - F(x) \geq \langle \nabla F(x), y - x \rangle + \frac{\Lambda}{2} \| x - y \|^2.$$

b. Soit $t \in [0, 1]$. D'après la question 1.a, nous savons que

$$F(x) - F(x + t(y - x)) \geq -t \langle \nabla F(x + t(y - x)), y - x \rangle + \frac{\Lambda}{2} t^2 \| x - y \|^2,$$

et

$$F(y) - F(x + t(y - x)) \geq (1 - t)\langle \nabla F(y), y - x\rangle + \frac{\Lambda}{2}(1 - t)^2\|x - y\|^2,$$

d'où l'inégalité

$$\begin{aligned}(1 - t)\big(F(x) - F(x + t(y - x))\big) + t\big(F(y) - F(x + t(y - x))\big)\\ \geq \frac{\Lambda}{2}\big((1 - t)t^2 + t(1 - t)^2\big)\|x - y\|^2,\end{aligned}$$

qui assure que

$$(1 - t)F(x) + tF(y) \geq F((1 - t)x + ty) + \frac{\Lambda}{2}t(1 - t)\|x - y\|^2.$$

Il s'ensuit que

$$(1 - t)F(x) + tF(y) \geq F(x + t(y - x)),$$

soit que la fonctionnelle F est convexe sur $\mathbb{R}^N$. De plus, si $t \neq 0$, $t \neq 1$ et $x \neq y$, alors

$$\frac{\Lambda}{2}t(1 - t)\|x - y\|^2 > 0,$$

de sorte que l'inégalité de convexité est stricte. En conclusion, la fonctionnelle F est strictement convexe sur $\mathbb{R}^N$.

c. Pour $x = 0$, l'inégalité de la question 1.a se réduit à

$$F(y) \geq F(0) + \langle \nabla F(0), y\rangle + \frac{\Lambda}{2}\|y\|^2.$$

Sachant que

$$\big|\langle \nabla F(0), y\rangle\big| \leq \|F(0\| \, \|y\|,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$F(y) \geq F(0) - \|F(0)\| \, \|y\| + \frac{\Lambda}{2}\|y\|^2.$$

Comme Λ est strictement positif, nous savons que

$$F(0) - \|F(0)\| \, t + \frac{\Lambda}{2}t^2 \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty,$$

d'où nous concluons que

$$F(y) \underset{\|y\| \to +\infty}{\to} +\infty.$$

d. La fonctionnelle F est continue sur $\mathbb{R}^N$, et d'après la question 1.c, coercive. Elle possède donc un minimiseur $x_* \in \mathbb{R}^N$. Comme elle est aussi strictement convexe par la question 1.b, ce minimiseur est unique.

e. Par définition, x_* est l'unique minimiseur de la fonctionnelle F sur l'ouvert $\mathbb{R}^N$. Il s'agit donc d'un point critique de cette fonctionnelle, soit d'un point qui satisfait

$$\nabla F(x_*) = 0.$$

Considérons alors un point $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $\nabla F(x) = 0$. Nous déduisons de la question 1.a que

$$\forall y \in \mathbb{R}^N, \; F(y) - F(x) \geq \frac{\Lambda}{2}\|x - y\|^2 \geq 0,$$

ce qui assure que x est un minimiseur de la fonctionnelle F sur $\mathbb{R}^N$. D'après la question 1.d, ce minimiseur est unique et nous concluons que $x = x_*$. Le point x_* est ainsi l'unique point de $\mathbb{R}^N$ tel que

$$\nabla F(x_*) = 0.$$

2.a. Par composition, la fonction f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -\big\langle \nabla F(x - t\nabla F(x)), \nabla F(x) \big\rangle,$$

d'où par l'hypothèse d'ellipticité,

$$\begin{aligned} \big(f'(t) - f'(s)\big)\big(t - s\big) &= \big\langle \nabla F(x - t\nabla F(x)) - \nabla F(x - s\nabla F(x)), (s-t)\nabla F(x) \big\rangle \\ &\geq \Lambda (s-t)^2 \|\nabla F(x)\|^2, \end{aligned}$$

pour tout couple $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Sachant que $x \neq x_*$, nous déduisons de la question 1.e que $\nabla F(x) \neq 0$. Il s'ensuit que $\Lambda \|\nabla F(x)\|^2 > 0$. Par l'inégalité précédente, la fonction f est alors elliptique sur $\mathbb{R}$.

b. D'après la question 2.a, la fonction f est elliptique sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc lui appliquer le résultat de la question 1.d qui assure qu'elle possède un unique minimiseur $\tau_x \in \mathbb{R}$.

3.a. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$. Au rang $n = 0$, le point x_0 est bien défini. Supposons que les points $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont bien définis. Au rang $n + 1$, le point x_{n+1} est bien défini par $x_{n+1} = x_*$ lorsque $x_n = x_*$. Sinon, nous déduisons de la question 1.b l'existence d'un unique nombre réel τ_{x_n} tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(x_n - t\nabla F(x_n)) \geq F(x_n - \tau_{x_n} \nabla F(x_n)),$$

et le point x_{n+1} est alors bien défini par la formule $x_{n+1} = x_n - \tau_{x_n} \nabla F(x_n)$. Par récurrence, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est donc bien définie.

b. Par définition de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, deux cas se présentent. Si $x_n = x_*$, alors $x_{n+1} = x_*$, d'où l'égalité

$$F(x_n) = F(x_{n+1}).$$

Sinon, nous savons d'après la question 3.a que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(x_n - t\nabla F(x_n)) \geq F(x_n - \tau_{x_n} \nabla F(x_n)) = F(x_{n+1}).$$

Pour $t = 0$, nous obtenons

$$F(x_n) \geq F(x_{n+1}),$$

ce qui garantit la décroissance de la suite $(F(x_n))_{n \geq 0}$.

c. D'après la question 1.d, la fonctionnelle F est minorée par son minimum $F(x_*)$. La suite $(F(x_n))_{n \geq 0}$ est donc aussi minorée. Comme elle est décroissante par la question 3.b, nous pouvons conclure qu'elle est convergente.

4.a. Deux cas se présentent. Si $x_n = x_*$, alors $x_{n+1} = x_*$, et

$$\big\langle \nabla F(x_{n+1}), \nabla F(x_n) \big\rangle = \big\langle \nabla F(x_*), \nabla F(x_*) \big\rangle = 0,$$

puisque $\nabla F(x_*) = 0$ par la question 1.e. Sinon, nous avons observé à la question 3.a que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(x_n - t\nabla F(x_n)) \geq F(x_n - \tau_{x_n} \nabla F(x_n)),$$

ce qui assure que la fonction f_n définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = F(x_n - t\nabla F(x_n)),$$

possède un minimiseur τ_{x_n} sur l'ouvert $\mathbb{R}$. Sachant que la fonctionnelle F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et nous pouvons donc écrire

$$f_n'(\tau_{x_n}) = 0,$$

ce qui équivaut à

$$-\big\langle \nabla F(x_n - \tau_{x_n} \nabla F(x_n)), \nabla F(x_n) \big\rangle = 0,$$

soit par définition de x_{n+1},

$$\big\langle \nabla F(x_{n+1}), \nabla F(x_n) \big\rangle = 0.$$

b. Lorsque $x_n = x_*$, nous savons que $x_{n+1} = x_*$, d'où l'identité

$$\big\langle \nabla F(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n \big\rangle = \big\langle \nabla F(x_*), x_* - x_* \big\rangle = 0.$$

Sinon nous savons que

$$x_{n+1} = x_n - \tau_{x_n} \nabla F(x_n),$$

d'où par la question 4.a,

$$\big\langle \nabla F(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n \big\rangle = -\tau_{x_n} \big\langle \nabla F(x_{n+1}), \nabla F(x_n) \big\rangle = 0.$$

c. Nous déduisons de la formule de la question 1.a que

$$F(x_n) - F(x_{n+1}) \geq \big\langle \nabla F(x_{n+1}), x_n - x_{n+1} \big\rangle + \frac{\Lambda}{2} \|x_n - x_{n+1}\|^2,$$

d'où par la question 4.b,

$$F(x_n) - F(x_{n+1}) \geq \frac{\Lambda}{2} \|x_{n+1} - x_n\|^2.$$

d. La question 3.c assure que la suite $(F(x_n))_{n \geq 0}$ est convergente, de sorte que

$$F(x_n) - F(x_{n+1}) \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Comme le nombre Λ est strictement positif, il résulte alors de la question 4.c que

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

soit

$$x_{n+1} - x_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

5.a. La question 1.c assure que la fonctionnelle F est coercive. Étant donné un nombre $M \in \mathbb{R}$, il existe donc un nombre $R > 0$ pour lequel

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } \|x\| \geq R,\ F(x) \geq M.$$

D'après la question 3.c, la suite $(F(x_n))_{n \geq 0}$ est convergente. Si ℓ désigne sa limite, alors il existe un entier $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N,\ F(x_n) < \ell + 1.$$

Pour $M = \ell + 1$, nous pouvons utiliser la coercivité de la fonctionnelle F afin de déterminer un nombre $R > 0$ tel que

$$\forall n \geq N,\ \|x_n\| \leq R.$$

Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

b. D'après la question 5.a, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que

$$\forall n \geq 0,\ \|x_n\| \leq \rho.$$

Comme la fonctionnelle F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$, son gradient est continu sur $\mathbb{R}^N$, donc sur la boule fermée $B_f(0,\rho)$ de centre 0 et de rayon ρ. Cette boule fermée est compacte, et il résulte donc du théorème de Heine que ∇F est équicontinue sur cette boule. Autrement dit, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in B_f(0,\rho)^2 \text{ t.q. } \|x-y\| \leq \delta,\ \|\nabla F(x) - \nabla F(y)\| \leq \varepsilon.$$

Sachant que

$$x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

par la question 4.d, nous pouvons trouver un entier $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N,\ \|x_{n+1} - x_n\| \leq \delta.$$

Puisque les points x_n appartiennent à la boule $B_f(0,\rho)$, nous concluons que

$$\forall n \geq N,\ \|\nabla F(x_{n+1}) - \nabla F(x_n)\| \leq \varepsilon,$$

ce qui équivaut à

$$\nabla F(x_{n+1}) - \nabla F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

c. Nous déduisons de la question 4.a que

$$\forall n \geq 0,\ \|\nabla F(x_n)\|^2 = \langle \nabla F(x_n), \nabla F(x_n)\rangle = \langle \nabla F(x_n), \nabla F(x_n) - \nabla F(x_{n+1})\rangle,$$

d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\nabla F(x_n)\|^2 \leq \|\nabla F(x_n)\|\,\|\nabla F(x_n) - \nabla F(x_{n+1})\|.$$

Il vient alors

$$\|\nabla F(x_n)\| \leq \|\nabla F(x_n) - \nabla F(x_{n+1})\|,$$

et il suffit d'invoquer la question 5.b pour conclure que

$$\nabla F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

6.a. Nous utilisons l'ellipticité de la fonctionnelle F pour affirmer que

$$\forall n \geq 0,\ \Lambda \|x_n - x_*\|^2 \leq \langle \nabla F(x_n) - \nabla F(x_*), x_n - x_*\rangle.$$

Sachant que $\nabla F(x_*) = 0$ par la question 1.e, nous concluons que

$$\Lambda \|x_n - x_*\|^2 \leq \langle \nabla F(x_n), x_n - x_*\rangle.$$

b. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au résultat de la question 6.a pour obtenir

$$\Lambda \|x_n - x_*\|^2 \leq \|\nabla F(x_n)\|\,\|x_n - x_*\|,$$

puis

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{1}{\Lambda}\|\nabla F(x_n)\|.$$

Il résulte alors de la question 6.a que

$$\|x_n - x_*\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

et nous concluons que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_*.$$