CY Cergy Paris Université | **Modélisation**
Master 2 Mathématiques | **2024-2025**

Corrigé de l'aspect théorique du devoir à la maison N°1

1 Le modèle de Leontieff

1.a. Soit $c = (1, \ldots, 1)$. Comme la Z-matrice B est productive, nous savons qu'il existe un unique vecteur $y \in \mathbb{R}^N$ à coefficients positifs tel que

$$By = c.$$

Sachant que le vecteur c est à coefficients strictement positifs, tous les coefficients du vecteur By sont strictement positifs.

b. Soit $1 \leq i \leq N$. L'équation $By = c$ conduit à la formule

$$B_{i,i}\, y_i = c_i - \sum_{j \neq i} B_{i,j}\, y_j.$$

Comme B est une Z-matrice, nous savons que

$$\forall j \neq i,\ B_{i,j} \leq 0,$$

d'où nous déduisons que

$$B_{i,i}\, y_i > 0,$$

puisque c_i est strictement positif et les coefficients y_j sont aussi positifs. Sachant que y_i est aussi positif, nous concluons que

$$y_i > 0,$$

soit que tous les coefficients du vecteur y sont strictement positifs. Notons également que ce raisonnement montre que tous les coefficients diagonaux de la matrice B sont strictement positifs.

2.a. Par définition du produit matriciel et de la matrice diagonale Y, nous calculons

$$\forall 1 \leq i, j \leq N,\ [BY]_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} B_{i,k}\, Y_{k,j} = B_{i,j}\, y_j.$$

Nous reprenons alors les calculs de la question 1.b. Comme B est une Z-matrice et les vecteurs y et $c = By$ sont à coefficients strictement positifs, nous obtenons

$$B_{i,i}\, y_i = c_i - \sum_{j \neq i} B_{i,j}\, y_j > - \sum_{j \neq i} B_{i,j}\, y_j = \sum_{j \neq i} \big| B_{i,j}\, y_j \big| \geq 0.$$

Cette suite d'inégalités assure que le nombre $B_{i,i}\, y_i$ est strictement positif, puis que

$$\big| B_{i,i}\, y_i \big| = B_{i,i}\, y_i > \sum_{j \neq i} \big| B_{i,j}\, y_j \big|.$$

Nous concluons que

$$\big|[BY]_{i,i}\big| > \sum_{j\neq i} \big|[BY]_{i,j}\big|,$$

soit que la matrice B est à diagonale dominante. Notons également que les coefficients diagonaux de la matrice B sont tous strictement positifs.

b. D'après la question 2.a, la matrice BY est à diagonale dominante, donc elle est inversible, et sa matrice inverse $(BY)^{-1}$ est bien définie et satisfait l'identité

$$BY\,(BY)^{-1} = I_N,$$

qui équivaut aux identités

$$\sum_{k=1}^{N} [BY]_{i,k}\,[(BY)^{-1}]_{k,j} = \delta_{i,j},$$

pour tout indice $1 \leq i, j \leq N$.

Rappelons alors que les coefficients diagonaux de la matrice B sont tous strictement positifs, de sorte que

$$[BY]_{i,i} = B_{i,i}\,y_i > 0.$$

Sachant que B est une Z-matrice, nous avons également

$$\forall k \neq i,\ [BY]_{i,k} = B_{i,k}\,y_k \leq 0,$$

et nous arrivons à

$$[(BY)^{-1}]_{i,j} = \frac{1}{[BY]_{i,i}}\Big(\delta_{i,j} + \sum_{k\neq i} \big|[BY]_{i,k}\big|\,[(BY)^{-1}]_{k,j}\Big).$$

Considérons alors deux indices $1 \leq i_*, j_* \leq N$ tels que

$$[(BY)^{-1}]_{i_*,j_*} = \min_{1\leq i,j\leq N} [(BY)^{-1}]_{i,j}.$$

Pour $i = i_*$ et $j = j_*$, nous déduisons de l'égalité précédente que

$$[(BY)^{-1}]_{i_*,j_*} \geq \frac{\delta_{i_*,j_*}}{[BY]_{i_*,i_*}} + \sigma_{i_*}\,[(BY)^{-1}]_{i_*,j_*},$$

où nous avons noté

$$\sigma_{i_*} = \frac{1}{[BY]_{i_*,i_*}} \sum_{k\neq i_*} \big|[BY]_{i_*,k}\big|.$$

D'après la question 2.a, la matrice BY est à diagonale dominante, ce qui signifie que

$$\sigma_{i_*} < 1,$$

puis implique que

$$[(BY)^{-1}]_{i_*,j_*} \geq \frac{\delta_{i_*,j_*}}{(1-\sigma_{i_*})\,[BY]_{i_*,i_*}} \geq 0.$$

Par définition des indices i_* et j_*, nous concluons que tous les coefficients de la matrice inverse $(BY)^{-1}$ sont positifs.

c. Rappelons que tous les coefficients du vecteur y sont strictement positifs, de sorte que la matrice diagonale Y est inversible. Nous écrivons alors

$$B = (BY)\, Y^{-1}.$$

Sachant que la matrice BY est inversible d'après la question 2.b, la matrice B est également inversible, et son inverse vaut

$$B^{-1} = Y\,(BY)^{-1}.$$

En particulier, nous calculons

$$\forall 1 \leq i, j \leq N,\ [B^{-1}]_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} Y_{i,k}\,[(BY)^{-1}]_{k,j} = y_i\,[(BY)^{-1}]_{i,j},$$

et tous les coefficients de la matrice inverse B^{-1} sont bien positifs d'après la question 2.b.

d. Étant donnée une Z-matrice B, considérons les assertions

(i) La matrice B est productive.

(ii) Il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^N$ à coefficients strictement positifs tel que tous les coefficients du vecteur By sont strictement positifs.

(iii) La matrice B est inversible d'inverse à coefficients positifs.

Les questions 1.a et 1.b montrent que l'assertion (i) implique l'assertion (ii), tandis que les questions 2.a, 2.b et 2.c prouvent que l'assertion (ii) implique l'assertion (iii). Afin d'établir l'équivalence de ces trois assertions, il reste donc à vérifier que l'assertion (iii) implique l'assertion (i).

Supposons donc que la matrice B est inversible d'inverse à coefficients positifs. Étant donné un vecteur c à coefficients positifs, nous savons qu'il existe un unique vecteur $y = B^{-1}c \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$By = c.$$

Nous calculons alors

$$\forall 1 \leq i \leq N,\ y_i = \sum_{k=1}^{N} [B^{-1}]_{i,k}\, c_k \geq 0,$$

puisque la matrice B^{-1} et le vecteur c sont à coefficients positifs. La matrice B est donc productive, et nous concluons que les trois assertions précédentes sont équivalentes.

3.a. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, nous savons qu'il existe une norme d'algèbre $\| \cdot \|_A$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que

$$\|A\|_A \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Nous choisissons alors le nombre ε, de sorte que

$$\|A\|_A < 1,$$

ce qui assure que la série géométrique $\sum_{k \geq 0} \|A\|_A^k$ est convergente. Comme $\| \cdot \|_A$ est une norme d'algèbre, nous vérifions ensuite que

$$\forall k \geq 1,\ \|A^k\|_A \leq \|A\|_A^k,$$

ce qui suffit à établir que la série $\sum_{k \geq 0} A^k$ est absolument convergente, donc convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Considérons alors sa somme

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

Nous calculons

$$\big(I_N - A\big)\, S = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(A^k - A^{k+1}\big) = A^0 = I_N,$$

et de même,

$$S\,\big(I_N - A\big) = I_N.$$

La matrice $I_N - A$ est donc inversible d'inverse égal à

$$\big(I_n - A\big)^{-1} = S = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

b. Étant données deux matrices $(M, P) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$ à coefficients positifs, nous vérifions que

$$\forall 1 \leq i, j \leq N,\ [MP]_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} M_{i,k}\, P_{k,j} \geq 0.$$

La matrice MP est donc à coefficients positifs. Par récurrence sur $k \geq 1$, nous déduisons de cette propriété que toute puissance M^k d'une matrice M à coefficients positifs reste à coefficients positifs. En particulier, toutes les matrices A^k sont à coefficients positifs, et il en est donc de même pour la somme de la série géométrique $\sum_{k\geq 0} A^k$. D'après la question 3.a, nous concluons que la Z-matrice $I_N - A$ est inversible d'inverse à coefficients positifs. L'équivalence de la question 2.d certifie alors que la Z-matrice $I_N - A$ est productive.

4.a. Comme la Z-matrice $I_N - A$ est productive, nous savons qu'il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^N$ à coefficients strictement positifs tels que $(I_N - A)y$ est aussi à coefficients strictement positifs. Pour $t \geq 1$, la matrice $tI_N - A$ demeure une Z-matrice qui satisfait

$$\forall 1 \leq i \leq N,\ [(tI_N - A)y]_i = (t-1)y_i + [(I_N - A)y]_i.$$

Comme les coefficients y_i et $[(I_N - A)y]_i$ sont strictement positifs, le vecteur $(tI_N - A)y$ est aussi à coefficients strictement positifs, et il découle de la question 2.d que la Z-matrice $tI_N - A$ est productive.

b. Les questions 3.a et 3.b démontrent que la Z-matrice $I_N - A$ est productive lorsque $\rho(A) < 1$. Réciproquement, lorsque la matrice $I_N - A$ est productive, la question 4.a garantit que les Z-matrices $tI_N - A$ sont productives, donc inversibles pour $t \geq 1$. Cette propriété signifie que le nombre t n'est pas une valeur propre de la matrice A. Par le théorème de Perron-Frobenius, le rayon spectral $\rho(A)$ est une valeur propre de la matrice A. Comme ce nombre est positif, il appartient nécessairement à l'intervalle $[0, 1[$, d'où l'inégalité

$$\rho(A) < 1,$$

et la preuve de l'équivalence recherchée.

2 La méthode d'interpolation de Hermite

1. Considérons deux polynômes réels $P(X)$ et $Q(X)$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$, et tels que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, P(x_i) = f(x_i) = Q(x_i), \quad \text{et} \quad P'(x_i) = f'(x_i) = Q'(x_i).$$

Chacun des nombres $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ est alors une racine d'ordre au moins égal à 2 du polynôme $Q(X) - P(X)$. Comme les nombres $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ sont deux à deux distincts, ce polynôme possède au moins $2N+2$ racines comptées avec multiplicité. Sachant que ce polynôme est de degré au plus $2N+1$, il ne peut s'agir que du polynôme nul, et nous concluons que $Q(X) = P(X)$, soit qu'il existe au plus un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, P(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad P'(x_i) = f'(x_i).$$

2.a. La formule pour le polynôme de base $\ell_i(X)$ assure que

$$\ell_i(x_i) = 1, \quad \text{et} \quad \forall j \neq i,\, \ell_i(x_j) = 0.$$

Il résulte aussi de cette formule que le polynôme dérivé $\ell_i'(X)$ est égal à

$$\ell_i'(X) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{k \neq i,j} \Big(\frac{X - x_k}{x_i - x_k} \Big).$$

D'où l'expression

$$\ell_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{k \neq i,j} \Big(\frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} \Big) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Sachant que $P_i(X) = \ell_i(X)^2$, nous déduisons d'abord de ces formules que

$$P_i(x_i) = \ell_i(x_i)^2 = 1, \quad \text{et} \quad P_i(x_j) = \ell_i(x_j)^2 = 0,$$

pour $j \neq i$, puis

$$P_i'(x_i) = 2\ell_i'(x_i)\ell_i(x_i) = 2\ell_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}, \quad \text{et} \quad P_i'(x_j) = 2\ell_i'(x_j)\ell_i(x_j) = 0,$$

lorsque $j \neq i$.

b. Sachant que

$$Q_i'(X) = a_i\, P_i(X) + (a_i X + b_i)\, P_i'(X),$$

nous déduisons des formules de la question 2.a que les équations $Q_i(x_i) = f(x_i)$ et $Q_i'(x_i) = f'(x_i)$ sont équivalentes au système

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i = f(x_i), \\ a_i + (a_i x_i + b_i)\, P_i'(x_i) = f'(x_i), \end{cases}$$

soit aux valeurs

$$\begin{cases} a_i = f'(x_i) - f(x_i) P_i'(x_i), \\ b_i = f(x_i) - x_i \big(f'(x_i) - f(x_i) P_i'(x_i) \big). \end{cases}$$

En particulier, ces valeurs donnent l'expression de l'unique couple (a_i, b_i) pour lequel le polynôme $Q_i(X)$ satisfait aux équations

$$Q_i(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad Q_i'(x_i) = f'(x_i).$$

c. Nous considérons le polynôme

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} (a_i X + b_i)\, P_i(X),$$

où les nombres réels a_i et b_i sont choisis de façon à satisfaire les équations de la question 2.b. Comme les polynômes $P_i(X)$ sont de degré $2N$, les polynômes $Q_i(X) = (a_i X + b_i)\, P_i(X)$ sont de degré $2N + 1$, de sorte que le polynôme $H_f(X)$ est de degré au plus $2N + 1$.

De plus, nous déduisons des questions 2.a et 2.b que

$$H_f(x_i) = \sum_{j=0}^{N} (a_j x_i + b_j)\, P_j(x_i) = (a_i x_i + b_i)\, P_i(x_i) = Q_i(x_i) = f(x_i),$$

et

$$\begin{aligned} H_f'(x_i) &= \sum_{j=0}^{N} \Big(a_j\, P_j(x_i) + (a_j x_i + b_j)\, P_j'(x_i) \Big) \\ &= a_i\, P_i(x_i) + (a_i x_i + b_i)\, P_i'(x_i) = Q_i'(x_i) = f'(x_i), \end{aligned}$$

de sorte que $H_f(X)$ est un polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f aux points $x_0, \ldots, x_N$. Par la question 1., ce polynôme est unique, d'où son existence et son unicité.

d. Les formules des questions 2.b et 2.c assurent que

$$\begin{aligned} H_f(X) &= \sum_{i=0}^{N} (a_i X + b_i)\, P_i(X) \\ &= \sum_{i=0}^{N} \Big(\big(f'(x_i) - f(x_i) P_i'(x_i)\big) X + f(x_i) - x_i \big(f'(x_i) - f(x_i) P_i'(x_i)\big) \Big)\, \ell_i(X)^2. \end{aligned}$$

Comme $P_i'(x_i) = 2\ell_i'(x_i)$ par la question 2.a, nous aboutissons à la formule

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} \Big(\big(f'(x_i) - 2f(x_i)\ell_i'(x_i)\big) X + f(x_i) - x_i \big(f'(x_i) - 2f(x_i)\ell_i'(x_i)\big) \Big)\, \ell_i(X)^2.$$

qui s'écrit aussi

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) \big(1 - 2\ell_i'(x_i)(X - x_i)\big) \ell_i(X)^2 + \sum_{i=0}^{N} f'(x_i) \big(X - x_i\big) \ell_i(X)^2.$$

3.a. La preuve repose sur une récurrence sur l'entier $0 \leq i \leq N$. Au rang $i = 0$, le polynôme $R_0(X) = H_f(X)$ est bien défini. Par le théorème de la division euclidienne, il existe de plus deux polynômes réels $R_1(X)$ et $S_0(X)$ uniques tels que $d^\circ(S_0(X)) < 2$, et

$$R_0(X) = S_0(X) + (X - x_0)^2 R_1(X).$$

Comme le degré du polynôme $S_0(X)$ est inférieur ou égal à 1, il existe alors deux nombres réels α_0 et β_0 uniques tels que $S_0(X) = \alpha_0 + \beta_0(X - x_0)$, d'où la formule

$$R_0(X) = \alpha_0 + \beta_0(X - x_0) + (X - x_0)^2 R_1(X).$$

Réciproquement, si des nombres α_0 et β_0, et un polynôme $R_1(X)$ satisfont cette formule, alors $R_1(X)$ et $S_0(X) = \alpha_0+\beta_0(X-x_0)$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $R_0(X)$ par le polynôme $(X - x_0)^2$, d'où l'unicité des nombres α_0 et β_0, ainsi que du polynôme $R_1(X)$.

Supposons alors avoir construit de manière unique les nombres α_j et β_j jusqu'au rang $j = i$, et les polynômes $R_j(X)$ jusqu'au rang $j = i+1$. De façon similaire, nous constatons que des nombres α_{i+1} et β_{i+1}, et un polynôme $R_{i+2}(X)$ tels que

$$R_{i+1}(X) = \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}(X - x_{i+1}) + (X - x_{i+1})^2 R_{i+2}(X),$$

correspondent au quotient $R_{i+2}(X)$ et au reste $S_{i+1}(X) = \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}(X - x_{i+1})$ de la division euclidienne du polynôme $R_{i+1}(X)$ par le polynôme $(X-x_{i+1})^2$. Le théorème de la division euclidienne assure donc à la fois l'existence et l'unicité des nombres α_{i+1} et β_{i+1}, et du polynôme $R_{i+2}(X)$, ce qui permet de conclure la preuve par récurrence sur l'entier i.

b. Par définition du polynôme d'interpolation de Hermite $H_f(X)$, nous savons que

$$d^\circ\big(R_0(X)\big) = d^\circ\big(H_f(X)\big) \leq 2N + 1.$$

Vérifions alors par récurrence sur l'entier $i \geq 0$ que

$$\forall 0 \leq i \leq N + 1,\ d^\circ\big(R_i(X)\big) \leq 2(N - i) + 1.$$

Supposons en effet que cette formule soit vraie jusqu'au rang i. Au rang $i + 1$, soit le polynôme $R_{i+1}(X)$ est nul, auquel cas $d^\circ(R_{i+1}(X)) = -\infty \leq 2(N - i - 1) + 1$, soit nous déduisons de la formule de la question 3.a que

$$d^\circ\big(R_i(X)\big) = 2 + d^\circ\big(R_{i+1}(X)\big),$$

de sorte que par l'hypothèse de récurrence,

$$d^\circ\big(R_{i+1}(X)\big) \leq 2(N - i - 1) + 1.$$

Par récurrence, l'inégalité recherchée est donc bien valable. En particulier, nous obtenons

$$d^\circ\big(R_{N+1}(X)\big) \leq -1,$$

ce qui assure que le polynôme $R_{N+1}(X)$ est identiquement nul.

c. Vérifions par récurrence que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\ H_f(X) = \sum_{j=0}^{i} \big(\alpha_j + \beta_j(X - x_j)\big) \prod_{k=0}^{j-1}(X - x_k)^2 + \prod_{k=0}^{i}(X - x_k)^2 R_{i+1}(X).$$

Au rang $i = 0$, cette formule est vraie, puisque

$$H_f(X) = R_0(X) = \alpha_0 + \beta_0(X - x_0) + (X - x_0)^2 R_1(X).$$

Supposons donc qu'elle soit vraie jusqu'au rang i. Nous déduisons alors de l'hypothèse de récurrence et de la formule de la question 3.a que

$$\begin{aligned} H_f(X) &= \sum_{j=0}^{i} \big(\alpha_j + \beta_j(X - x_j)\big) \prod_{k=0}^{j-1} (X - x_k)^2 + \prod_{k=0}^{i} (X - x_k)^2 R_{i+1}(X) \\ &= \sum_{j=0}^{i} \big(\alpha_j + \beta_j(X - x_j)\big) \prod_{k=0}^{j-1} (X - x_k)^2 + \big(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}(X - x_{i+1})\big) \prod_{k=0}^{i} (X - x_k)^2 \\ &\quad + \prod_{k=0}^{i+1} (X - x_k)^2 R_{i+2}(X), \end{aligned}$$

ce qui assure que la formule recherchée reste valable au rang $i + 1$, puis par récurrence, quel que soit $0 \leq i \leq N$. En particulier, pour $i = N$, nous déduisons du fait que $R_{N+1}(X)$ est identiquement nul que

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} \big(\alpha_i + \beta_i(X - x_i)\big) \prod_{j=0}^{i-1} (X - x_j)^2.$$

4.a. Par définition du polynôme d'interpolation de Hermite, nous savons que

$$R_0(x_0) = H_f(x_0) = f(x_0), \quad \text{et} \quad R_0'(x_0) = H_f'(x_0) = f'(x_0).$$

D'après les formules de la question 3.a, nous calculons par ailleurs

$$R_0'(X) = \beta_0 + 2(X - x_0)R_1(X) + (X - x_0)^2 R_1'(X),$$

de sorte que

$$R_0(x_0) = \alpha_0, \quad \text{et} \quad R_0'(x_0) = \beta_0,$$

d'où les formules

$$\alpha_0 = f(x_0), \quad \text{et} \quad \beta_0 = f'(x_0).$$

b. La preuve repose sur une récurrence sur l'entier $0 \leq i \leq N$. Rappelons d'abord que la fonction $f_0 = f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_0, … et x_N.

Supposons ensuite que, pour $0 \leq j \leq i$, les fonctions f_j sont de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_j, … et x_N. Au rang $i + 1$, les fonctions $x \mapsto (f_i(x_i) + f_i'(x_i)(x - x_i))/(x - x_i)^2$ et $x \mapsto 1/(x - x_i)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}$. Comme la fonction f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_i, … et x_N par l'hypothèse de récurrence, les opérations élémentaires sur les fonctions assurent que la fonction f_{i+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_{i+1}, … et x_N, d'où la propriété recherchée par récurrence.

c. La preuve repose à nouveau sur une récurrence sur l'entier $0 \leq i \leq N$. Au rang $i = 0$, les définitions du polynôme $R_0(X)$ et de la fonction f_0, ainsi que la question 4.a assurent que ce polynôme est le polynôme d'interpolation de Hermite de cette fonction aux points x_0, …, x_N, et que $\alpha_0 = f_0(x_0)$ et $\beta_0 = f_0'(x_0)$.

Supposons que cette propriété soit vérifiée jusqu'au rang i. Il résulte alors des formules de la question 3.a et de l'hypothèse de récurrence que

$$R_{i+1}(x) = \frac{R_i(x) - f_i(x_i) - f_i'(x_i)(x - x_i)}{(x - x_i)^2},$$

pour $x \neq x_i$, de sorte que

$$R'_{i+1}(x) = \frac{R'_i(x) - f'_i(x_i)}{(x - x_i)^2} - \frac{2\big(R_i(x) - f_i(x_i) - f'_i(x_i)(x - x_i)\big)}{(x - x_i)^3}.$$

Sachant que $R_i(X)$ est le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f_i aux points x_i, ..., x_N, nous obtenons

$$R_{i+1}(x_j) = \frac{f_i(x_j) - f_i(x_i) - f'_i(x_i)(x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2} = f_{i+1}(x_j),$$

pour $i + 1 \leq j \leq N$, et

$$R'_{i+1}(x_j) = \frac{f'_i(x_j) - f'_i(x_i)}{(x_j - x_i)^2} - \frac{2\big(f_i(x_j) - f_i(x_i) - f'_i(x_i)(x_j - x_i)\big)}{(x_j - x_i)^3} = f'_{i+1}(x_j).$$

Par ailleurs, nous avons démontré à la question 3.b que

$$d^\circ\big(R_{i+1}(X)\big) \leq 2(N - i - 1) + 1.$$

Par unicité, le polynôme $R_{i+1}(X)$ est donc le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f_{i+1} aux points x_{i+1}, ..., x_N.

Comme à la question 4.a, nous déduisons alors des formules de la question 3.a que

$$\alpha_{i+1} = R_{i+1}(x_{i+1}), \quad \text{et} \quad \beta_{i+1} = R'_{i+1}(x_{i+1}),$$

de sorte que par définition du polynôme d'interpolation de Hermite,

$$\alpha_{i+1} = f_{i+1}(x_{i+1}), \quad \text{et} \quad \beta_{i+1} = f'_{i+1}(x_{i+1}).$$

Par récurrence, nous concluons que les polynômes R_i sont bien les polynômes d'interpolation de Hermite des fonctions f_i aux points x_i, ..., x_N, et que $\alpha_i = f_i(x_i)$ et $\beta_i = f'_i(x_i)$.