CY Cergy Paris Université **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques **2023-2024**

TD N°4. Équations différentielles non linéaires

Exercice 1.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^2$. Considérons la fonction f définie par

$$\forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, f(t,y) = \Big(-y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1, -y_2^5 + 3ty_1^2 \Big).$$

Démontrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2.

Démontrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + e^{-3t} y(t)^2, \\ y(0) = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3.

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t)^2, \\ y'(t) = -y(t) + x(t)^2. \end{cases}$$

1. Démontrer que les solutions de ce système différentiel de conditions initiales $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ assez petites sont définies sur $\mathbb{R}_+$.

2. Que pouvons-nous dire de la stabilité de la solution constante $(0, 0)$?

Exercice 4.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}_+)$. Supposons qu'il existe des fonctions $(f, g) \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}_+)^2$ telles que

$$\forall t \in [0,T],\ \varphi(t) \leq f(t) + \int_0^t g(s)\varphi(s)\, ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0,T],\ \varphi(t) \leq f(t) + \int_0^t e^{\int_s^t g(u)\, du} g(s) f(s)\, ds.$$

2. Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ et $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ telles que

$$\int_0^{+\infty} \big(\|A(t)\| + \|p(t)\| \big)\, dt < +\infty.$$

Montrer que toute solution x de l'équation différentielle

$$\forall t \geq 0, x'(t) = A(t)x(t) + p(t),$$

est bornée.

Exercice 5.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, une fonction localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Supposons qu'il existe deux fonctions $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)^2$ telles que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \ \langle f(t,x), x \rangle \leq \alpha(t) + \beta(t)\|x\|^2.$$

Montrer qu'une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.

1. Quel est le temps de vie des solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) = \big(1 + x(t)^2\big) \cos(\pi x(t))\,?$$

2. Le temps de vie des solutions de l'équation différentielle

$$y'(t) = 1 + t^2 + y(t)^2,$$

est-il fini ?

3. Le temps de vie des solutions de l'équation différentielle

$$z'(t) = 1 - t^2 + z(t)^2,$$

est-il fini ?

Exercice 7.

Considérons l'équation différentielle

$$x''(t) + x(t) = \varepsilon\Big((1 + \cos(t)) \sin(x(t)) + \cos(2t)\Big),$$

où ε est un paramètre réel. Nous cherchons à démontrer que pour les petites valeurs de ε cette équation admet des solutions 2π-périodiques. Dans ce but, nous écrivons cette équation sous la forme

$$X'(t) = AX(t) + \varepsilon\, F(t, X(t)),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\forall \Big(t, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \ F(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + \cos(t)) \sin(x_1) + \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

1. Pour $\varepsilon = 0$, calculer la solution $X_{0,v}$ du système différentiel précédent pour la condition initiale $X_{0,v}(0) = v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'unique solution $X_{\varepsilon,v}$ du système différentiel précédent telle que $X_{\varepsilon,v}(0) = v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Pour $\varepsilon \neq 0$, montrer que $X_{\varepsilon,v}$ est 2π-périodique si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} F\big(s, X_{\varepsilon,v}(s)\big)\, ds = 0.$$

4. Soit

$$\forall (\varepsilon, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,\ H(\varepsilon, v) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} F\big(s, X_{\varepsilon,v}(s)\big)\, ds.$$

a. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

b. Montrer que

$$H(0, v) = \begin{pmatrix} -\int_0^{2\pi} \Big((1 + \cos(s)) \sin(v_1 \cos(s) + v_2 \sin(s)) + \cos(2s)\Big) \sin(s)\, ds \\ \int_0^{2\pi} \Big((1 + \cos(s)) \sin(v_1 \cos(s) + v_2 \sin(s)) + \cos(2s)\Big) \cos(s)\, ds \end{pmatrix}.$$

c. Vérifier que $H\big(0, (0, 0)\big) = (0, 0)$.

d. Calculer la matrice jacobienne $J_v H(0, (0, 0))$.

5.a. En déduire qu'il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et une fonction $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^\infty(] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\forall \varepsilon \in] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[,\ H\big(\varepsilon, \mathcal{V}(\varepsilon)\big) = (0, 0).$$

b. Que pouvons-nous en conclure ?

Exercice 8.

Considérons le champ de vecteurs

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ X(x, y) = \big(x^2 + y^2 - 1, x\big),$$

et le système différentiel associé $(\mathcal{S})$.

1. Déterminer les points d'équilibre du champ de vecteurs X.

2.a. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R},\ s(t) = (0, -1).$$

Calculer le système linéarisé au voisinage de la solution constante s.

b. Déterminer les orbites de ce système linéarisé.

3.a. Vérifier que le champ X est antisymétrique par rapport à la réflexion par rapport à l'axe des y.

b. En déduire que les orbites du système différentiel $(\mathcal{S})$ au voisinage de la solution constante s sont fermées.

Exercice 9.

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = \big(1 - x(t)^2 - y(t)^2\big) y(t) - x(t). \end{cases}$$

1. Déterminer une solution non constante et périodique $X_{\text{per}} = (x_{\text{per}}, y_{\text{per}})$ pour la condition initiale $X_{\text{per}}(0) = (0, 1)$.

2.a. Calculer le système linéarisé au voisinage de la solution périodique X_{per}.

b. Vérifier que le vecteur tangent à l'orbite périodique est solution du système linéarisé.

c. Appliquer la méthode de la variation de la constante pour évaluer la résolvante du système linéarisé en la période T de la solution périodique.

3.a. Démontrer que l'application de premier retour de Poincaré définie au voisinage de $(0, 1)$ est contractante.

b. En déduire le comportement asymptotique des solutions voisines de l'orbite périodique.