CY Cergy Paris Université **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques **2023-2024**

TD N°3. Équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 1.

Calculer les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre un associées aux matrices suivantes :

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \omega > 0, \quad (ii) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (iii) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. Quelle est la forme générale des solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x'''(t) - 4x''(t) + 5x'(t) - 2 = 0\,?$$

2. Quelle est la solution de cette équation différentielle telle que $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$?

Exercice 3.

Discuter la stabilité de l'origine pour les systèmes linéaires d'ordre un associés aux matrices suivantes, puis esquisser les portraits de phase correspondants :

$$(i)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (ii)\, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (iii)\, C = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$(iv)\, D = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad (v)\, E = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Considérons un système formé par trois particules de même masse dont le mouvement $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R},\ U''(t) = AU(t), \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Décrire les mouvements qui correspondent aux valeurs propres de la matrice A.

2. Discuter la stabilité de l'origine pour ce système linéaire d'ordre un et préciser la limite lorsque $t \to +\infty$ de la solution U de donnée initiale $U(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 5.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Considérons l'équation différentielle affine

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) + x(t) = f(t).$$

1.a. Écrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel du premier ordre.

b. Calculer la résolvante de ce système linéaire.

2. À l'aide de la méthode de variation de la constante, exprimer les fonctions x et x' en fonction de f.

3. Supposons que f est 2π-périodique. Montrer que toute solution x de l'équation différentielle est 2π-périodique si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} f(s)\sin(s)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\cos(s)\,ds = 0.$$

Exercice 6.

Soit $(p_0, \ldots, p_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$. Considérons une solution u de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R},\, u^{(d)}(t) + p_{d-1}u^{(d-1)}(t) + \cdots + p_0 u(t) = 0,$$

telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |u(t)| \leq 1 + \sqrt{|t|}.$$

Montrer que u est bornée sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles linéaires dépendant du temps

Exercice 7.

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, considérons la famille d'équations différentielles

$$\forall t \in \mathbb{R},\, x''(t) + (1 + \varepsilon t)x(t) = 0.$$

1. Soit x_ε la solution de cette équation différentielle pour les conditions initiales $x_\varepsilon(0) = 0$ et $x'_\varepsilon(0) = 1$. Calculer le développement asymptotique à l'ordre 2 de la solution x_ε lorsque $\varepsilon \to 0$.

2.a. Vérifier l'existence d'un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, la fonction x_ε possède un plus petit zéro non nul T_ε.

b. Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 2 du zéro T_ε lorsque $\varepsilon \to 0$.

Exercice 8.

1. Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, posons

$$\forall (U_1, \ldots, U_N) \in (\mathbb{R}^N)^N,\, \Phi_A(U_1, \ldots, U_N) = \sum_{i=1}^N \det\big(U_1, \ldots, A\,U_i, \ldots, U_N\big).$$

Montrer que

$$\forall (U_1, \ldots, U_N) \in (\mathbb{R}^N)^N,\, \Phi_A(U_1, \ldots, U_N) = \operatorname{tr}(A)\, \det(U_1, \ldots, U_N).$$

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(p_0, \ldots, p_{N-1}) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^N$. Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in I,\, u^{(N)}(t) + p_{N-1}(t)\, u^{(N-1)}(t) + \ldots + p_0(t)\, u(t) = 0.$$

a. Soit u_1, …, u_N des solutions de cette équation. Montrer que le wronskien

$$\forall t \in I,\, W(t) = \det\big((u_j^{(i-1)}(t))_{1\leq i,j\leq N}\big),$$

vérifie

$$\forall (t_0, t) \in I^2,\, W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^t p_{N-1}(s)\, ds}.$$

b. Vérifier que les solutions u_1, …, u_N sont linéairement indépendantes si et seulement s'il existe un nombre $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

3. Soit $(u_1, \ldots, u_N) \in \mathcal{C}^N(I, \mathbb{R})^N$. Supposons que le wronskien W de ces fonctions ne s'annule pas sur I. Montrer que les fonctions u_1, …, u_N sont solutions d'une même équation différentielle linéaire de degré N.

Exercice 9.

Pour $N \geq 2$, considérons N fonctions f_1, …, f_N de classe $\mathcal{C}^{N-1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et notons

$$\forall t \in I,\, W(f_1, \ldots, f_N)(t) = \det \begin{pmatrix} f_1(t) & \ldots & f_N(t) \\ f_1'(t) & \ldots & f_N'(t) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(N-1)}(t) & \ldots & f_N^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

1. Supposons qu'il existe des nombres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ non tous nuls tels que

$$\forall t \in I,\, \lambda_1 f_1(t) + \ldots + \lambda_N f_N(t) = 0.$$

Vérifier que

$$\forall t \in I,\, W(f_1, \ldots, f_N)(t) = 0.$$

2. Supposons que

$$\forall t \in I,\, W(f_1, \ldots, f_N)(t) = 0, \quad \text{et} \quad W(f_1, \ldots, f_{N-1})(t) \neq 0.$$

Démontrer qu'il existe des nombres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ pour lesquels

$$\forall t \in I,\, f_N(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i f_i(t).$$

3. Pouvons-nous nous affranchir de la condition

$$\forall t \in I,\, W(f_1, \ldots, f_{N-1})(t) \neq 0,$$

de la question précédente ?

Exercice 10.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$.

1.a. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée de l'application $t \mapsto A(t)^k$.

b. En déduire que la fonction S définie par

$$\forall t \in I,\, S(t) = e^{A(t)},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et satisfait

$$\forall t \in I,\ S'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \bigg(\sum_{i=0}^{k-1} A(t)^i \, A'(t) \, A(t)^{k-i-1} \bigg).$$

2. Supposons que la fonction A est commutative, soit que

$$\forall (s,t) \in I^2,\ A(t)A(s) = A(s)A(t).$$

Montrer que la résolvante du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$ est égale à

$$\forall (t_0, t) \in I^2,\ R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s)\, ds}.$$

3. *Applications.* (i) Soit $(a, b) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$. Calculer la résolvante associée à la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

(ii) Calculer la résolvante associée à la fonction

$$\forall t > 0,\ A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La formule de la question 2. est-elle valable ?

Exercice 11.
Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$. Considérons le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A(t)X(t).$$

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Les résolvantes $R(t, s)$ de l'équation sont des isométries.

(ii) Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A(t)$ est antisymétrique.

Exercice 12. *Méthode de tir.*
Soit $p \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 1],\ -u''(t) + p(t)\, u(t) = f(t), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1. Pouvons-nous directement appliquer les théorèmes du cours à ce problème de Dirichlet ?

2. Afin de résoudre ce problème, considérons les problèmes

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 1],\ -v''(t) + p(t)\, v(t) = 0, \\ v(0) = 0 \text{ et } v'(0) = 1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 1],\ -w''(t) + p(t)\, w(t) = f(t), \\ w(0) = w'(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que chacun de ces problèmes possède une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

3. Montrer que u est solution du problème de Dirichlet si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = w + \lambda v$ et $w(1) = -\lambda v(1)$.

4. Supposons que le problème homogène

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -y''(t) + p(t)\, y(t) = 0, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

possède pour unique solution $y = 0$. Montrer que le problème de Dirichlet possède une solution unique.

5. Supposons que

$$\forall t \in [0,1],\ p(t) \geq 0.$$

Montrer que le problème de Dirichlet possède une unique solution.

Équations différentielles linéaires périodiques

Exercice 13.

Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ une application T-périodique. Démontrer que $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ est une solution T-périodique du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A(t)\, X(t),$$

si et seulement si $X(0)$ appartient au sous-espace propre $E_1(R(T,0))$ de la résolvante $R(T,0)$ pour la valeur propre 1.

Exercice 14.

Soit $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Notons $R_0(t,s)$ la résolvante du système différentiel linéaire d'ordre 1 associé à l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) + a(t)\, x(t) = 0,$$

et supposons que $R_0(T,0)$ est elliptique.

1. Soit $\gamma > 0$. Considérons l'équation différentielle amortie

$$\forall t \in \mathbb{R}, x''(t) + \gamma x'(t) + a(t)\, x(t) = 0.$$

Montrer que le déterminant de la résolvante $R_\gamma(T,0)$ associée à cette équation différentielle amortie est strictement inférieur à 1.

2. Que pouvons-nous en déduire quant à la stabilité de cette équation différentielle amortie lorsque γ est assez petit ?

Exercice 15.

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction 1-périodique. Notons $R(t,s)$ la résolvante du système différentiel linéaire d'ordre 1 naturellement associé à l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) + a(t)\, x(t) = 0.$$

1. Démontrer que $R(t,s)$ est à valeurs dans $\mathcal{SL}_2(\mathbb{R})$.

2. Supposons qu'il existe des nombres $\varepsilon \geq 0$ et $0 < \omega < \pi$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a(t) = \omega^2 + \varepsilon \cos(2\pi t).$$

Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle sont bornées sur $\mathbb{R}$ lorsque le nombre ε est assez petit.

Exercice 16.

Soit $(\varepsilon, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, x''(t) + \gamma\, x'(t) + \big(1 + \varepsilon\, \cos(2t)\big)x(t) = 0.$$

Discuter la stabilité du point d'équilibre $x_* = 0$ lorsque :

$$(i)\ \gamma = 0 \text{ et } 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (ii)\ 0 < \gamma \ll \varepsilon \ll 1.$$