CY Cergy Paris Université — **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques — **2023-2024**

TD N°2. Théorème du point fixe et théorème de Cauchy-Lipschitz

Espaces de Banach et théorème du point fixe

Exercice 1.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et T une application linéaire continue de E dans E. Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\|T^k\| < 1$. Montrer que l'application linéaire $Id - T$ est inversible et majorer la norme de l'inverse $(Id - T)^{-1}$ en fonction de celle de T et T^k.

Exercice 2.

Démontrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1 + \int_0^1 \frac{f(t)}{100 + |t-x|}\, dt.$$

Exercice 3.

Soit $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Démontrer que l'équation fonctionnelle

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100 f(t) = \sin(2\pi t),$$

admet une solution $f \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Montrer que les applications $T_\pm$ définies par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ T_\pm f(\cdot) = f(\cdot \pm \sqrt{2})^2,$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3. Démontrer qu'il existe une application $F \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[, \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ telle que, quel que soit $\lambda \in]-1,1[$, la fonction $f = F(\lambda)$ est solution de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100 f(t) = \lambda \sin(2\pi t).$$

Exercice 4.

Soit $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ telle que $T(0) = 0$ et 1 n'est pas valeur propre de la différentielle $DT(0)$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans lequel 0 est l'unique point fixe de T, soit l'unique vecteur $x \in U$ tel que $T(x) = x$.

2. Soit $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Posons

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,\ T_\lambda(x) = T(x) + \lambda S(x).$$

Démontrer l'existence d'un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^N$ et d'un nombre $\lambda_0 > 0$ pour lesquels il existe une fonction $X \in \mathcal{C}^\infty(]-\lambda_0, \lambda_0[, \mathbb{R}^N)$ telle que, quel que soit $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, l'application T_λ possède un unique point fixe $X(\lambda)$ dans V.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 5.

1. Les problèmes de Cauchy suivants admettent-ils une solution unique ?

$$(i)\ \begin{cases} x'(t) = x(t)^2, \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} y'(t) = |y(t)| + |t|^{\frac{1}{2}}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (iii)\ \begin{cases} z'(t) = |z(t)|^{\frac{1}{2}}, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

2. Quels sont ceux qui admettent une solution globale sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.

Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + e^t \sin(x'(t)) + 2e^{-x(t)^2} = e^{t^2}, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = x_1, \end{cases}$$

sont-elles globales sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x > 0,\ f(x) > 0.$$

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(|y(t)|), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1.a. Donner une solution élémentaire de ce problème.

b. Montrer que la condition

$$\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = +\infty,$$

assure l'unicité de cette solution élémentaire.

2. Supposons que cette condition n'est pas satisfaite. Montrer l'existence d'une infinité de solutions locales.

3. *Application.* Supposons que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+,\ f(y) = 3\, y^{\frac{2}{3}}.$$

a. Déterminer toutes les solutions du problème de Cauchy précédent.

b. Quels sont les points $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ par lesquels passent plus d'un graphe d'une solution ?

Exercice 8.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Considérons une solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = f(y(t)),$$

telle que $y(1) = y(0)$. Montrer que la solution y est 1-périodique, soit que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t+1) = y(t).$$

Exercice 9.

1. Soit $a \geq 0$. Montrer qu'il existe une unique solution locale Q_a du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q_a''(x) - Q_a(x) + Q_a(x)^5 = 0, \\ Q_a(0) = a, \\ Q_a'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Soit I_a l'intervalle de définition de la solution Q_a.

a. Considérons la densité d'énergie

$$\forall x \in I_a,\, e_a(x) = \frac{1}{2} Q_a'(x)^2 - \frac{1}{2} Q_a(x)^2 + \frac{1}{6} Q_a(x)^6.$$

Vérifier que la fonction e_a est constante sur l'intervalle I_a.

b. En déduire qu'il existe au plus une solution globale non triviale Q_{a_*} telle que

$$Q_{a_*}(x) \to 0, \quad \text{et} \quad Q_{a_*}'(x) \to 0,$$

lorsque $x \to +\infty$.

c. Montrer que cette solution doit vérifier

$$\forall x \in I_{a_*},\, Q_{a_*}(x) > 0, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I_{a_*} \cap]0, +\infty[,\, Q_{a_*}'(x) < 0.$$

d. À l'aide du changement de variable $y = a_*^2 / Q_{a_*}^2$, en déduire une formule explicite pour la solution Q_{a_*}.

3. Considérons l'équation aux dérivées partielles de Schrödinger non linéaire

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\, i\partial_t u(t, x) + \partial_{xx} u(t, x) + u(t, x)|u(t, x)|^4 = 0,$$

pour une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer que cette équation aux dérivées partielles possède une solution globale périodique en temps.