TD N°1. Rappels d'analyse et d'algèbre linéaire

Équations différentielles élémentaires

Exercice 1.

1. Déterminer les solutions des équations différentielles ordinaires :

$$(i)\ x'(t) = 2x(t), \quad \text{et} \quad (ii)\ y'(t) = 2y(t) + 1.$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de chacune de ces équations soient bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$x''(t) + ax(t) = 0.$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le nombre a pour que toutes ces solutions soient bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

Déterminer les solutions des équations différentielles ordinaires :

$$(i)\ x'(t) = x(t)^2, \quad (ii)\ y'(t) = 1 + y(t)^2, \quad \text{et} \quad (iii)\ z'(t) = \sqrt{1 - z(t)^2}.$$

Exercice 4. *Conservation de l'énergie et du moment cinétique.*

Considérons une particule de masse m qui se déplace dans $\mathbb{R}^3$ et est soumise à une force F. La position $x(t)$ au temps t de cette particule vérifie la relation fondamentale de la dynamique de Newton

$$m\, x''(t) = F\big(x(t)\big).$$

Dans la suite, nous supposerons que la position x est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Supposons que la force F dérive d'un potentiel U, soit qu'elle est de la forme

$$F(x) = -\nabla U(x),$$

où le potentiel U est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

a. Considérons l'énergie mécanique de la particule au temps t

$$E(t) = \frac{m}{2}\, x'(t)^2 + U\big(x(t)\big).$$

Démontrer que l'énergie E reste constante au cours du temps.

b. Considérons une solution $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle ordinaire

$$x''(t) + \sin(x(t)) = 0.$$

Démontrer que la dérivée x' est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons que la force F est centrale, soit qu'elle est de la forme

$$F(x) = f(|x|)\, \frac{x}{|x|},$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et $|x|$ désigne la norme euclidienne de la position x. Démontrer que le moment cinétique

$$\sigma(t) = m\, x'(t) \times x(t),$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$, est aussi une fonction constante.

Topologie

Exercice 5.

Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont-ils homéomorphes ?

Exercice 6.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Considérons le graphe de la fonction f

$$\Gamma = \big\{ (x, f(x)) \text{ t.q. } x \in [0,1] \big\}.$$

1. L'ensemble Γ est-il compact ?

2. L'ensemble Γ est-il connexe ?

Exercice 7. *Un ensemble connexe mais pas connexe par arcs.*

Soit

$$\Gamma_1 = \Big\{ \Big(x, \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) \Big) \text{ t.q. } x \in]0,1] \Big\}, \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 = \{0\} \times [-1,1].$$

1.a. L'ensemble $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est-t-il connexe par arcs ?

b. Démontrer que l'ensemble Γ est connexe.

2. L'ensemble Γ est-il compact ?

Exercice 8.

Considérons la norme $\|\cdot\|_\infty$ et la distance d_∞ définies par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \qquad \text{et} \qquad d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty,$$

pour deux fonctions f et g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

a. L'espace métrique (E, d_∞) est-il connexe ?

b. L'espace métrique (E, d_∞) est-il complet ?

c. L'espace métrique (E, d_∞) est-il compact ?

2. Soit $k \geq 0$. Considérons l'ensemble F_k des fonctions k-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $[0,1]$, soit qui vérifient

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|.$$

a. L'ensemble F_k est-il un sous-ensemble de E ?

b. L'espace métrique (F_k, d_∞) est-il connexe ?

c. L'espace métrique (F_k, d_∞) est-il complet ?

d. L'espace métrique (F_k, d_∞) est-il compact ?

Algèbre linéaire

Exercice 9.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels, et $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.

2. Démontrer que $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ est en bijection avec l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^2$.

3. L'ensemble $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ est-il fermé, ouvert ?

4. Déterminer les composantes connexes de cet ensemble.

Exercice 10. *Structure du groupe spécial linéaire $\mathcal{SL}_2(\mathbb{R})$.*

Soit $\mathcal{SL}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

1. Démontrer que $\mathcal{SL}_2(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ pour la multiplication matricielle.

2.a. Soit $U \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{R})$. Lorsque $|\mathrm{tr}(U)| > 2$, démontrer que la matrice U est semblable à une matrice diagonale réelle.

b. Lorsque $|\mathrm{tr}(U)| < 2$, démontrer que la matrice U est semblable à une matrice de rotation de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

c. Lorsque $|\mathrm{tr}(U)| = 2$, vérifier que la matrice U est semblable à une matrice unipotente de la forme

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{SL}_2(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 11.

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots 0 & \lambda_N \end{pmatrix},$$

une matrice diagonale à coefficients complexes. Calculer l'exponentielle $\exp(A)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et $P \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$. Vérifier que

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}.$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Démontrer que

$$\det\big(\exp(A)\big) = \exp\big(\mathrm{tr}(A)\big).$$

4. Supposons que $N = 2$. Calculer l'exponentielle de chacune des matrices suivantes :

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (ii)\ B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

où a, λ et ω sont des nombres réels.

Exercice 12. *Espaces stables et instables.*
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice A.

2. En déduire la valeur de l'exponentielle $\exp(tA)$ pour tout nombre $t \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que l'ensemble

$$E_s = \big\{v \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \lim_{t \to +\infty} e^{tA}v = 0\big\},$$

est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit

$$E_u = \big\{v \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \lim_{t \to -\infty} e^{tA}v = 0\big\}.$$

Démontrer qu'il existe une décomposition de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\mathbb{R}^3 = E_s \oplus E_c \oplus E_u$, où E_c est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout vecteur $v \in E_c$, l'application $t \mapsto e^{tA}v$ est bornée.

Exercice 13.

1.a. Soit $A \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$. Nous supposons dans cette question que A est diagonalisable. Démontrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que

$$\exp(B) = A.$$

b. La matrice B est-elle unique ?

2. Rappelons qu'une matrice M est nilpotente d'ordre $p \geq 1$ si et seulement si $M^{p-1} \neq 0$ et $M^p = 0$. Nous supposons dans cette question que A est unipotente, soit de la forme $A = I_N + M$, où I_N est la matrice identité de taille N et M est une matrice nilpotente d'ordre $p \geq 1$.

a. Vérifier que la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{M^k}{k}$ est convergente, et que sa somme B vaut

$$B = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{M^k}{k}.$$

b. Montrer que
$$\exp(B) = I_N + M = A.$$

3.a. Vérifier que toute matrice $A \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$ se décompose sous la forme $A = S(I_N + M)$, où S est diagonalisable et inversible, M est nilpotente, et S et M commutent.

b. En déduire qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que
$$\exp(B) = A.$$

4. En déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$ telle que
$$C^2 = A.$$

Calcul différentiel

Exercice 14.

1. Soit $p \geq 2$. Calculer la différentielle de l'application puissance $A \mapsto A^p$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
2. Calculer la différentielle de l'application inverse $A \mapsto A^{-1}$ sur $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$.
3. Calculer la différentielle de l'application déterminant $A \mapsto \det(A)$ sur $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$, puis sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
4. Calculer la différentielle de l'application exponentielle $A \mapsto \exp(A)$ en $A = 0$.

Exercice 15.

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace de Banach muni de la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$.

1. Soit
$$\forall f \in E,\, \forall x \in [0,1],\, \Phi_0(f)(x) = \int_0^1 (t+x)^2 f(t)\, dt.$$

a. Démontrer que Φ_0 est une application linéaire continue de E dans E.

b. Quelle est sa différentielle ?

2. Soit
$$\forall f \in E,\, \forall x \in [0,1],\, \Phi_1(f)(x) = \int_0^1 (t+x)^2 \sin(f(t))\, dt.$$

a. Montrer que Φ_1 est une application continue de E dans E.

b. Démontrer que Φ_1 est une application différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 16.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ telle que $f(0) = 0$. Nous supposons que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^N$, la différentielle $df(x)$ est un endomorphisme orthogonal, soit tel que l'endomorphisme adjoint ${}^t df(x)$ vérifie
$${}^t df(x)\, df(x) = I_N.$$

1. Démontrer que
$$\forall (x,y) \in \big(\mathbb{R}^N\big)^2,\, \|f(y) - f(x)\| \leq \|x - y\|.$$

2.a. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe un nombre $r_x > 0$ tel que f est un difféomorphisme de $B(x, r_x)$ sur $f(B(x, r_x))$.

b. Vérifier qu'il existe un nombre $r'_x > 0$ tel que l'image de la boule $B(f(x), r'_x)$ par l'inverse f^{-1} est incluse dans la boule $B(x, r_x)$.

c. En déduire que f est une isométrie locale, soit que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^N$, il existe un nombre $r''_x > 0$ tel que

$$\forall y \in B(x, r''_x),\ \|f(y) - f(x)\| = \|x - y\|.$$

3.a. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_N)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$. Vérifier qu'il existe une isométrie affine R telle que $g = R^{-1} \circ f$ fixe les points x, $x + re_1$, …, $x + re_N$, où r est un nombre strictement positif assez petit.

b. Vérifier que

$$\forall 1 \leq i \leq N,\ \forall y \in B(x, r''_x),\ \langle g(y) - g(x), re_i \rangle = \langle y - x, re_i \rangle.$$

c. En déduire que la différentielle de f est constante sur $B(x, r''_x)$.

4. Conclure que f est un endomorphisme orthogonal.