CY Cergy Paris Université **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques **2024-2025**

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage de tout appareil électronique est interdit.

Exercice 1. (6 points)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.a. Déterminer le spectre et les espaces propres de la matrice A.

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de la matrice e^{tA}.

2. Considérons le système linéaire

$$X'(t) = AX(t).$$

a. L'origine est-elle asymptotiquement stable pour ce système linéaire ? Est-elle stable ?

b. Esquisser le portrait de phase associé à ce système linéaire.

3. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ce problème de Cauchy admet-il une solution ? Si oui, déterminer l'ensemble des solutions de ce problème de Cauchy.

Exercice 2. (6 points)

Soit E et F deux espaces de Banach munis des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Étant donnée une application continue $T : E \times F \to E$ et un vecteur $y \in F$, nous notons T_y l'application définie par

$$\forall x \in E,\ T_y(x) = T(x, y),$$

et nous supposons qu'il existe un entier $p \geq 2$ et un nombre $0 \leq K < 1$ tel que, quel que soit le vecteur $y \in F$, l'itéré p fois $T_y^p = T_y \circ \ldots \circ T_y$ de l'application T_y satisfait

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ \big\|T_y^p(x_1) - T_y^p(x_2)\big\|_E \leq K\big\|x_1 - x_2\big\|_E.$$

1.a. Soit $y \in F$ fixé. Vérifier qu'il existe au plus un vecteur $v \in E$ tel que

$$T_y(v) = v.$$

b. Montrer qu'il existe un unique vecteur $u(y) \in E$ tel que

$$T_y^p\big(u(y)\big) = u(y).$$

c. En déduire qu'il existe un unique vecteur $v(y) \in E$ tel que

$$T_y\big(v(y)\big) = v(y).$$

2.a. Soit $y_0 \in F$. Vérifier que

$$\forall y \in F,\ v(y) - v(y_0) = T_y^p\big(v(y)\big) - T_y^p\big(v(y_0)\big) + T_y^p\big(v(y_0)\big) - T_{y_0}^p\big(v(y_0)\big).$$

b. En déduire que

$$\forall y \in F,\ \big\|v(y) - v(y_0)\big\|_E \leq \frac{1}{1-K}\big\|T_y^p\big(v(y_0)\big) - T_{y_0}^p\big(v(y_0)\big)\big\|_E.$$

c. Conclure que l'application $y \mapsto v(y)$ est continue de F dans E.

Exercice 3. (8 points)

Étant donné un nombre réel a, considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) + \sin(x(t)) = 0, \\ x(0) = a. \end{cases}$$

1.a. Montrer que le problème de Cauchy précédent admet une unique solution globale $x_a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b. Déterminer l'expression de cette solution lorsque $a = 0$.

2. Soit $0 < \tau < 1$. Considérons l'application Φ définie par

$$\forall (a,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R}),\ \forall t \in [-\tau,\tau],\ \Phi(a,x)(t) = x(t) - a + \int_0^t \sin\big(x(s)\big)\, ds.$$

a. Vérifier que l'application Φ est bien définie de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

b. Montrer qu'elle est différentiable de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, et que, quels que soient $(a,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$,

$$\forall (h,y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R}),\ \forall t \in [-\tau,\tau],\ d\Phi_{(a,x)}(h,y)(t) = y(t) - h + \int_0^t \cos\big(x(s)\big)\, y(s)\, ds.$$

c. En déduire que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

3.a. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, considérons l'application

$$\forall y \in \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R}),\ \forall t \in [-\tau,\tau],\ \theta(y)(t) = g(t) - \int_0^t y(s)\, ds.$$

Vérifier que l'application θ est une contraction de $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

b. En déduire que la différentielle partielle $d_x\Phi_{(0,0)}$ est inversible de $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

c. Conclure qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ telle que l'application $a \mapsto x_a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-\alpha,\alpha[$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.