**CY Cergy Paris Université** — **Systèmes dynamiques**
**Master 1 Mathématiques** — **2023-2024**

# Examen de rattrapage

*La durée de cet examen est de une heure et trente minutes. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.*

Soit $\alpha$, $\beta$ et $x_0$ trois nombres strictement positifs. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\big(\alpha\, y(t) - \beta\big), \\ y'(t) = -\alpha\, x(t)\, y(t) + \beta\big(1 - y(t)\big), \end{cases} \tag{1}$$

et intéressons-nous au problème de Cauchy associé aux conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

## I. Existence globale et unicité d'une solution (10 points)

1. Montrer qu'il existe deux nombres uniques $T_-$ et $T_+$ strictement positifs ou égaux à $+\infty$, et une unique solution maximale $(x, y) \in \mathcal{C}^1(]-T_-, T_+[, \mathbb{R}^2)$ de ce problème de Cauchy.

2. Soit
$$T = \sup\big\{t \in [0, T_+[ \text{ tel que } \forall s \in [0, t],\, x(s) > 0\big\}.$$

a. Vérifier que
$$0 < T \leq T_+.$$

b. Supposons par l'absurde que $T < T_+$. Montrer que
$$x(T) = 0.$$

c. Soit
$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1(t) = 0, \\ y_1(t) = 1 + \big(y(T) - 1\big)\, e^{\beta(T-t)}. \end{cases}$$

Montrer que la fonction $(x_1, y_1)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'il s'agit de l'unique solution maximale du système (1) telle que
$$x_1(T) = 0, \quad \text{et} \quad y_1(T) = y(T).$$

d. En déduire que
$$\forall t \in [0, T_+[,\, x(t) > 0.$$

3. Soit
$$S = \sup\big\{t \in [0, T_+[ \text{ tel que } \forall s \in [0, t],\, y(s) > 0\big\}.$$

a. Supposons par l'absurde que $S < T_+$. Montrer que
$$y(S) = 0.$$

b. En déduire qu'il existe un nombre $s \in ]0, S[$ tel que

$$y(s) < 0.$$

c. En déduire que

$$\forall t \in [0, T_+[,\ y(t) > 0.$$

4.a. Vérifier que

$$\forall t \in [0, T_+[,\ x(t) + y(t) = x_0 e^{-\beta t} + 1.$$

b. En déduire que

$$T_+ = +\infty.$$

**II. Comportement asymptotique** (10 points)

Nous supposons désormais que

$$\beta \geq \alpha.$$

1.a. Soit

$$\tau = \sup \big\{ t \geq 0 \text{ tel que } \forall s \in [0, t],\ y(s) \leq 1 \big\}.$$

Vérifier que

$$\tau > 0.$$

b. Supposons que $\tau \neq +\infty$. Vérifier que

$$y(\tau) = 1.$$

c. En déduire que

$$y'(\tau) < 0.$$

d. Conclure que

$$\forall t \geq 0,\ y(t) \leq 1.$$

2.a. Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ x'(t) \leq 0.$$

b. En déduire qu'il existe un nombre $x_\infty \geq 0$ tel que

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} x_\infty.$$

c. Vérifier que

$$y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 1 - x_\infty.$$

3.a. Montrer que

$$y'(t) \underset{t \to +\infty}{\to} x_\infty \big( \beta - \alpha + \alpha\, x_\infty \big).$$

b. Supposons par l'absurde que $x_\infty \neq 0$. Montrer que

$$y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty.$$

c. Conclure que

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0, \quad \text{et} \quad y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 1.$$