CY Cergy Paris Université **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques **2025-2026**

Examen partiel

La durée de cet examen est de une heure et trente minutes. Les quatre exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Exercice 1. (4 points)

1.a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ du système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{4}\sin(x-y) + t - 1. \end{cases}$$

b. Montrer que l'application $t \mapsto (x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.a. Montrer que

$$x(t) = y(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 1.$$

b. En déduire les valeurs des dérivées $x'(1)$ et $y'(1)$.

Exercice 2. (5 points)

Soit $N \geq 1$. Étant donnée une matrice inversible $A \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$, nous considérons l'application Φ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ \Phi(M) = 2\,M - M\,A\,M.$$

1.a. Montrer que l'application Φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b. Calculer la différentielle $d\Phi(M)$ de l'application Φ en une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

2. Considérons une norme d'opérateur $\|\cdot\|$ sur l'espace $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

a. Vérifier qu'il existe un nombre $\rho > 0$ tel que, quelles que soient les matrices M_1 et M_2 telles que

$$\big\|M_1 - A^{-1}\big\| < \rho, \quad \text{et} \quad \big\|M_2 - A^{-1}\big\| < \rho,$$

ces matrices satisfont

$$\big\|\Phi(M_1) - \Phi(M_2)\big\| \leq \frac{1}{2}\big\|M_1 - M_2\big\|.$$

b. Soit $M_0 \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $\|M_0 - A^{-1}\| < \rho$. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ donnée par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0,\ M_{n+1} = \Phi(M_n),$$

est bien définie et satisfait

$$\forall n \geq 0,\ \big\|M_n - A^{-1}\big\| < \rho.$$

c. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3. (5 points)

Nous considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = e^{x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un unique intervalle $I =]\tau_-, \tau_+[$, qui contient 0, tel qu'il existe une unique solution maximale $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ de ce problème de Cauchy.

2.a. Vérifier que

$$\forall t \in I,\, e^{-x(t)} = 1 - t.$$

b. En déduire que

$$\tau_+ \leq 1.$$

c. Montrer que

$$\forall t \in I,\, x(t) = -\ln\big(1 - t\big).$$

3. Déterminer les valeurs de τ_- et τ_+, ainsi que l'expression explicite de la solution x.

Exercice 4. (6 points)

Nous considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t\,\big(x(t) - x(t)^2\big), \\ x(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un unique intervalle J, qui contient 0, tel qu'il existe une unique solution maximale $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ de ce problème de Cauchy.

2.a. Supposons qu'il existe un nombre $\tau \in J$ tel que $x(\tau) = 0$. Montrer que

$$\forall t \in J,\, x(t) = 0.$$

b. En déduire que

$$\forall t \in J,\, x(t) \neq 0.$$

3.a. Soit

$$\forall t \in J,\, y(t) = \frac{1}{x(t)}.$$

Montrer que la fonction y est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, et satisfait

$$\forall t \in J,\, y'(t) = -ty(t) + t.$$

b. En déduire que

$$\forall t \in J,\, x(t) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{t^2}{2}}}.$$

c. Déterminer l'intervalle J.