CY Cergy Paris Université — **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques — **2023-2024**

Examen

La durée de cet examen est de trois heures. Les deux exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Exercice 1. (8 points)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.a. Déterminer le spectre et les espaces propres complexes de la matrice A.

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de la matrice e^{tA}.

2. Considérons le système linéaire

$$X'(t) = AX(t).$$

a. L'origine est-elle asymptotiquement stable pour ce système linéaire ? Est-elle stable ?

b. Esquisser le portrait de phase associé à ce système linéaire.

3. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, posons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A_\varepsilon(t) = A + \varepsilon B(t), \quad \text{où} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

a. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X_\varepsilon'(t) = A_\varepsilon(t) X_\varepsilon(t), \\ X_\varepsilon(0) = X_0, \end{cases}$$

possède une unique solution $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

b. Montrer qu'il existe des fonctions $Y_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et $Y_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ telles que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ X_\varepsilon = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon R_\varepsilon,$$

avec

$$\big\| R_\varepsilon \big\|_{\mathcal{C}^1([-\tau,\tau],\mathbb{R}^2)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0,$$

pour tout nombre $\tau > 0$.

4.a. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_0(t) = e^{tA} X_0.$$

b. Montrer que la fonction Y_1 est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y_1'(t) = AY_1(t) + B(t) Y_0(t), \\ Y_1(0) = 0. \end{cases}$$

c. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, Y_1(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\, B(s)\, e^{sA}\, X_0\, ds.$$

Exercice 2. (12 points)

Considérons le produit scalaire complexe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})^2,\, \langle M_1, M_2 \rangle = \mathrm{tr}\big({}^t\overline{M_1} M_2\big),$$

ainsi que la norme hermitienne $\|.\|$ associée, et introduisons une fonction $B \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathcal{M}_N(\mathbb{C}))$ telle que

$$\int_0^{+\infty} \big\|B(t)\big\|\, dt < +\infty.$$

1. Soit $R(t, s)$ la résolvante de l'équation différentielle

$$X'(t) = B(t) X(t).$$

a. Vérifier que

$$\forall t \geq 0,\, R(t, 0) = I_N + \int_0^t B(s)\, R(s, 0)\, ds.$$

b. Soit

$$\forall t \geq 0,\, \Phi(t) = \Big\|I_N + \int_0^t B(s)\, R(s, 0)\, ds\Big\|^2.$$

Vérifier que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle satisfait

$$\forall t \geq 0,\, \Phi'(t) \leq 2\|B(t)\|\, \Phi(t).$$

c. En déduire que

$$\forall t \geq 0,\, \big\|R(t, 0)\big\| \leq \sqrt{N}\, e^{\int_0^t \|B(s)\|\, ds}.$$

d. Conclure que l'application $t \mapsto R(t, 0)$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

2.a. Vérifier qu'il existe un nombre $C \geq 0$ tel que

$$\forall t \geq s \geq 0,\, \big\|R(t, 0) - R(s, 0)\big\| \leq C \int_s^t \|B(u)\|\, du.$$

b. En déduire qu'il existe une matrice $R_\infty \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que

$$R(t, 0) \underset{t \to +\infty}{\to} R_\infty.$$

3. Considérons une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont imaginaires pures, et notons $\mathcal{R}(t, s)$ la résolvante de l'équation différentielle

$$X'(t) = \big(A + B(t)\big) X(t).$$

a. Vérifier que l'application $t \mapsto e^{tA}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soit

$$\forall t \geq 0,\, \mathcal{S}(t) = e^{-tA}\, \mathcal{R}(t, 0).$$

Vérifier que la fonction $\mathcal{S}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec

$$\forall t \geq 0, \mathcal{S}'(t) = e^{-tA}\, B(t)\, e^{tA} \mathcal{S}(t).$$

c. Vérifier que

$$\int_0^{+\infty} \left\| e^{-tA} B(t) e^{tA} \right\| dt < +\infty.$$

d. En déduire qu'il existe une matrice $\mathcal{S}_\infty \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que

$$e^{-tA} \mathcal{R}(t,0) \underset{t \to +\infty}{\to} \mathcal{S}_\infty.$$

4. Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^{+\infty} |q(t)|\, dt < +\infty.$$

Considérons une solution $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$x''(t) + \big(1 + q(t)\big) x(t) = 0.$$

a. Écrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel du premier ordre.

b. En déduire qu'il existe des nombres $\alpha_\infty \in \mathbb{R}$ et $\beta_\infty \in \mathbb{R}$ tels que la solution x satisfait

$$x(t) - \alpha_\infty \cos(t) - \beta_\infty \sin(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0.$$