CY Cergy Paris Université **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques **2024-2025**

Examen

La durée de cet examen est de trois heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Exercice 1. (4 points)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.a. Déterminer le spectre et les espaces propres complexes de la matrice A.

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de la matrice e^{tA}.

2. Considérons le système linéaire

$$X'(t) = AX(t).$$

a. L'origine est-elle asymptotiquement stable pour ce système linéaire ? Est-elle stable ?

b. Esquisser le portrait de phase associé à ce système linéaire.

Exercice 2. (8 points)
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction 2π-périodique

$$\forall t \in \mathbb{R},\, a_\varepsilon(t) = \frac{1}{16}\Big(1 + \varepsilon \sin(t)\Big),$$

et l'équation différentielle linéaire associée

$$x_\varepsilon''(t) + a_\varepsilon(t)\, x_\varepsilon(t) = 0.$$

1.a. Montrer que cette équation équivaut à l'équation différentielle

$$X_\varepsilon'(t) = A_\varepsilon(t)\, X_\varepsilon(t), \tag{1}$$

pour des fonctions $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et $A_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ à préciser.

b. Considérons la résolvante $R_\varepsilon(t, s)$ de l'équation différentielle (1). Vérifier que cette résolvante est bien définie quels que soient $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, et qu'elle vérifie

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2,\, \det\big(R_\varepsilon(t, s)\big) = 1.$$

2.a. Pour $\varepsilon = 0$, vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, R_0(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{4}\right) & 4\sin\left(\frac{t}{4}\right) \\ -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{t}{4}\right) & \cos\left(\frac{t}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

b. En déduire que

$$\mathrm{tr}\big(R_0(2\pi, 0)\big) = 0.$$

3.a. Montrer qu'il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall -\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\, \Big|\mathrm{tr}\big(R_\varepsilon(2\pi, 0)\big)\Big| < 2.$$

b. En déduire que la résolvante $R_\varepsilon(2\pi, 0)$ possède deux valeurs propres complexes conjuguées de module un.

c. Soit $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. L'origine est-elle stable pour l'équation différentielle (1) ? Est-elle asymptotiquement stable ?

Exercice 3. (8 points)

Étant donné un nombre $0 < K < 1$, considérons une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ F(t + 2\pi, x) = F(t, x),$$

et

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ \Big| \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) \Big| \leq \frac{K}{4\pi}.$$

1. Considérons l'espace vectoriel

$$E = \big\{ x \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ t.q. } x \text{ est } 2\pi - \text{périodique} \big\}.$$

et posons

$$\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

a. Montrer que l'application $\| \cdot \|_\infty$ définit une norme sur E.

b. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de l'espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|_\infty)$. Montrer qu'il existe une fonction $x_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_n(t) \underset{n \to +\infty}{\to} x_\infty(t).$$

c. Vérifier que

$$\|x_n - x_\infty\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

d. Conclure que E est un espace de Banach pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

2. Étant donnée une fonction $x \in E$, considérons la fonction $\Phi(x)$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(x)(t) = \int_0^t F\big(s, x(s)\big)\, ds - \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\big(s, x(s)\big)\, ds.$$

a. Vérifier que la fonction $\Phi(x)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que

$$\forall y \in E,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \int_t^{t+2\pi} y(s)\, ds = \int_0^{2\pi} y(s)\, ds.$$

c. En déduire que l'application Φ est bien définie de E dans E.

3.a. Montrer que l'application Φ est K-contractante sur E.

b. En déduire que l'application Φ possède un unique point fixe $y \in E$.

c. Conclure qu'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que l'équation différentielle ordinaire

$$z'(t) = F\big(t, z(t)\big) - m,$$

admet une solution 2π-périodique $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

d. *Application.* Montrer qu'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une fonction 2π-périodique $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{1}{16}\Big(\sin(t)^2 + \ln\big(f(t)^2 + 1\big) \Big) - m.$$