Devoir à la maison N°2

Exercice 1. *Portrait de phase d'un système linéaire.*

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres complexes λ_1 et λ_2 de la matrice A.

b. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que
$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$
et calculer son inverse.

c. Soit $t \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de la matrice e^{tA}.

2. Considérons le système linéaire
$$X'(t) = AX(t). \tag{1}$$

a. L'origine est-elle asymptotiquement stable pour ce système linéaire ? Est-elle stable ?

b. Soit $a = \mathrm{Re}(\lambda_1)$ et $b = |\mathrm{Im}(\lambda_2)|$. Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$A = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

c. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ formée par les vecteurs colonnes de la matrice Q, et $X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2$ une donnée initiale dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'expression des coordonnées $(x(t), y(t))$ de la solution associée X du système linéaire (1) en fonction des nombres x_0 et y_0.

d. En déduire le portrait de phase du système linéaire (1).

Exercice 2. *Résolution d'équations matricielles.*

Soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ une matrice telle que
$$\forall \lambda \in \sigma(M),\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0.$$

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Vérifier qu'il existe des nombres strictement positifs C et ν tels que
$$\forall t \geq 0,\ \left\| e^{tM} \right\| \leq C\, e^{-\nu t}.$$

2.a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})^2$. Vérifier que le problème de Cauchy
$$\begin{cases} M'(t) = A\, M(t) + M(t)\, B, \\ M(0) = M_0, \end{cases}$$

possède une unique solution $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{C}))$ quelle que soit la donnée initiale $M_0 \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

b. Déterminer la valeur explicite de la solution $M(t)$ au temps t en fonction des matrices A, B et M_0.

3. Supposons que

$$\forall \lambda \in \sigma(A) \cup \sigma(B),\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0.$$

a. Vérifier qu'il existe des nombres $K \geq 0$ et $\tau > 0$ tels que

$$\forall t \geq 0,\ \big\|M(t)\big\| \leq K\, e^{-\tau t}.$$

b. Soit $C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Vérifier qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que

$$A\, M + M\, B = C, \tag{2}$$

et déterminer la valeur de la solution M en fonction des matrices A, B et C.

c. Montrer que la matrice M ainsi déterminée est l'unique solution de l'équation (2).

Exercice 3. *Comportement asymptotique d'un système non linéaire.*

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}\, x(t)\, y(t) - x(t), \\ y'(t) = -\frac{1}{2}\, x(t)\, y(t) + 1 - y(t), \\ x(0) = x_0, \quad \text{ et } \quad y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

1.a. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier qu'il existe un unique temps maximal $T \in [0, +\infty]$ et une unique solution maximale $(x, y) \in \mathcal{C}^1([0, T[, \mathbb{R}^2)$ de ce système différentiel pour la donnée initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

b. Déterminer la solution maximale (x, y) du problème de Cauchy (3) lorsque $x_0 = 0$.

2. Dans toute la suite de cet exercice, nous supposons que la donnée initiale (x_0, y_0) satisfait

$$x_0 > 0, \quad \text{ et } \quad y_0 = 1.$$

a. Montrer que la solution maximale (x, y) associée à cette donnée initiale satisfait

$$\forall 0 \leq t < T,\ x(t) > 0, \quad \text{ et } \quad y(t) > 0.$$

b. Vérifier que

$$\forall 0 \leq t < T,\ x(t) + y(t) = 1 + x_0 e^{-t}.$$

c. En déduire que la solution maximale est globale, soit qu'elle est définie sur $[0, +\infty[$.

3.a. Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ y(t) \leq 1.$$

b. En déduire que la fonction x est décroissante sur $[0, +\infty[$.

c. Conclure que

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0, \quad \text{ et } \quad y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 1.$$