CY Cergy Paris Université **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques **2023-2024**

Devoir à la maison N°2

Exercice 1. *Principe d'entrelacement de Sturm.*

Étant donnée une fonction $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérons l'équation différentielle linéaire

$$x''(t) + q(t)\, x(t) = 0,$$

et notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de cette équation.

1.a. Vérifier que $\mathcal{S}$ est un sous-espace de dimension deux de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b. Montrer que les zéros d'une solution $x \in \mathcal{S}$ non nulle sont simples et isolés dans $\mathbb{R}$.

c. Considérons une solution $x \in \mathcal{S}$ qui s'annule en deux nombres $t_1 < t_2$, et qui est strictement positive sur $]t_1, t_2[$. Montrer que

$$x'(t_1) > 0, \quad \text{et} \quad x'(t_2) < 0.$$

2. Supposons qu'une solution $x \in \mathcal{S}$ non nulle s'annule en deux nombres réels $t_1 < t_2$.

a. Vérifier qu'il existe un nombre $t_1 < t_3 \leq t_2$ tel que t_3 est un zéro de la solution x, et tel que cette solution ne s'annule pas sur $]t_1, t_3[$.

b. Soit $\tilde{q} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{q}(t) \geq q(t).$$

Montrer que toute solution $\tilde{x} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$\tilde{x}''(t) + \tilde{q}(t)\, \tilde{x}(t) = 0,$$

possède au moins un zéro dans le segment $[t_1, t_2]$.

c. En déduire que toute solution $y \in \mathcal{S}$ non proportionnelle à la solution x possède un zéro dans l'intervalle $]t_1, t_2[$.

3. Soit $T > 0$. Nous supposons dans cette question que la fonction q est T-périodique.

a. Montrer que, soit toute solution non nulle $x \in \mathcal{S}$ a au plus un zéro réel, soit toute solution non nulle a une infinité de zéros réels.

b. Supposons que la fonction q est négative. Vérifier que toute solution $x \in \mathcal{S}$ non nulle a au plus un zéro réel.

c. Supposons que la fonction q est non nulle et positive.

(i) Montrer qu'il existe une solution $x \in \mathcal{S}$ qui possède au moins deux zéros distincts.

(ii) En déduire que toute solution $x \in \mathcal{S}$ a une infinité de zéros réels.

Exercice 2.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, $T > 0$, et $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction non nulle et T-périodique.

1.a. Considérons une solution $x_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$x_\varepsilon''(t) + a\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\, x_\varepsilon(t) = 0, \tag{1}$$

et posons

$$\forall t \in \mathbb{R},\, Y_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(\varepsilon t) \\ x'_\varepsilon(\varepsilon t) \end{pmatrix}.$$

Vérifier que Y_ε est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est solution d'une équation différentielle de la forme

$$Y'_\varepsilon(t) = \varepsilon\, A(t)\, Y_\varepsilon(t), \tag{2}$$

où $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ est une fonction T-périodique à déterminer.

b. Considérons une solution $Y_\varepsilon = (y_\varepsilon, z_\varepsilon) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de l'équation différentielle (2), et posons

$$\forall t \in \mathbb{R},\, x_\varepsilon(t) = y_\varepsilon\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big).$$

Vérifier que x_ε est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, qu'elle est solution de l'équation différentielle (1), et qu'elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\, Y_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(\varepsilon t) \\ x'_\varepsilon(\varepsilon t) \end{pmatrix}.$$

c. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''_\varepsilon(t) + a\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\, x_\varepsilon(t) = 0, \\ x_\varepsilon(0) = x_0 \text{ et } x'_\varepsilon(0) = x_1, \end{cases}$$

possède une unique solution $x_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Notons $R_\varepsilon(t, 0)$ la résolvante de l'équation différentielle (2).

a. Vérifier que l'application $\varepsilon \mapsto R_\varepsilon(\cdot, 0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

b. En déduire qu'il existe des fonctions $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$, et une fonction $\mathcal{R} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R})))$ telles que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\, \forall t \in [0, T],\, R_\varepsilon(t, 0) = I_2 + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t) + \mathcal{R}(\varepsilon)(t),$$

et

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{\mathcal{C}^1([0,T],\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))} = \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2).$$

c. Calculer les matrices $Y_1(0)$ et $Y_2(0)$.

d. En déduire les valeurs des fonctions Y_1 et Y_2.

e. En déduire un développement limité au second ordre de la trace de $R_\varepsilon(T, 0)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

3. Supposons que

$$\int_0^T a(t)\, dt > 0.$$

a. Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle (1) sont bornées pour ε assez petit.

b. Vérifier qu'il existe une suite de nombres strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$, convergente de limite nulle, telle que

$$\forall n \geq 0,\, \exists N \geq 1 \text{ tel que } R_{\varepsilon_n}(T, 0)^N = I_2.$$

c. En déduire qu'il existe une infinité de valeurs petites du nombre ε pour lesquelles toutes les solutions de (1) sont périodiques.