CY Cergy Paris Université | **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques | **2023-2024**

Devoir à la maison N°1

Exercice 1. *Théorème de d'Alembert-Gauss.*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. L'objectif de cet exercice est d'établir que le polynôme P possède au moins une racine complexe.

1. Vérifier que l'application polynomiale $P : z \mapsto P(z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, avec
$$\forall (z, h) \in \mathbb{C}^2,\ dP(z)(h) = P'(z)h.$$

2. Soit
$$K = \big\{ P(z) : z \in \mathbb{C} \text{ tel que } dP(z) = 0 \big\}.$$

a. Vérifier que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus K$ est ouvert.

b. Soit
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \nu(z) = \operatorname{card}\big(P^{-1}\{z\}\big).$$
Vérifier que l'application ν est bien définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{N}$.

3.a. Montrer que l'image de l'application polynomiale P est fermée.

b. En déduire que l'ensemble $\nu^{-1}\{0\}$ est ouvert.

4.a. Soit $\xi \in \mathbb{C} \setminus K$ tel que $\nu(\xi) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre $\varrho > 0$ tel que
$$\forall z \in D(\xi, \varrho) = \big\{ \zeta \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\zeta - \xi| < \varrho \big\},\ \nu(z) \geq \nu(\xi).$$

b. En déduire qu'il existe un nombre $0 < \rho < \varrho$ tel que
$$\forall z \in D(\xi, \rho),\ \nu(z) = \nu(\xi).$$

c. Conclure que l'application ν est localement constante sur $\mathbb{C} \setminus K$ c'est-à-dire que, quel que soit $\xi \in \mathbb{C} \setminus K$, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que
$$\forall z \in D(\xi, \rho),\ \nu(z) = \nu(\xi).$$

5.a. Vérifier que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe par arcs.

b. En déduire que l'application polynomiale P est surjective.

c. Conclure que le polynôme P possède au moins une racine complexe.

6. Quelle partie de la démonstration n'est plus valable pour un polynôme réel non constant sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$?

Exercice 2. *Théorème de Cauchy-Peano.*

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^N)$, ainsi qu'un couple $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. L'objectif de cet exercice est d'établir l'existence d'une solution locale X du problème de Cauchy
$$\begin{cases} X'(t) = f\big(t, X(t)\big), \\ X(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Vérifier qu'il existe des nombres $r > 0$ et $M \geq 1$ tels que

$$[t_0 - r, t_0 + r] \subset I, \quad B_f(x_0, r) \subset \Omega,$$

et

$$\forall (t, x) \in [t_0 - r, t_0 + r] \times B_f(x_0, r), \ \big|f(t, x)\big| \leq M,$$

où $B_f(x_0, r)$ désigne la boule fermée de centre x_0 et de rayon r pour la norme euclidienne canonique $\| \cdot \|$ de $\mathbb{R}^N$.

2.a. Soit $T = r/M$. Étant donné un entier $n \geq 1$, posons $h_n = T/n$ et

$$\forall -n \leq i \leq n, \ t_i = t_0 + ih_n.$$

Considérons les vecteurs $(y_i)_{-n \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^N$ définis par

$$y_0 = x_0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq n, \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h_n f\big(t_i, y_i\big), \\ y_{-i-1} = y_{-i} - h_n f\big(t_{-i}, y_{-i}\big), \end{cases}$$

et la fonction affine par morceaux Y_n définie par

$$\forall -n \leq i \leq n-1, \forall t_i \leq t \in t_{i+1}, \ Y_n(t) = \frac{t - t_i}{h_n} y_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t}{h_n} y_i.$$

Vérifier que la fonction Y_n est bien définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, à valeurs dans $B_f(x_0, r)$, et telle que $Y_n(t_0) = x_0$.

b. Montrer que la fonction Y_n est M-lipschitzienne sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

3.a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un nombre $N_\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit $n \geq N_\varepsilon$,

$$\forall 0 \leq i \leq n-1, \begin{cases} \forall t_i \leq t \leq t_{i+1}, \ \Big\| \int_{t_i}^t \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_i, y_i)\big)\, ds \Big\| \leq \varepsilon\big(t - t_i\big), \\ \forall t_{-i-1} \leq t \leq t_{-i}, \ \Big\| \int_t^{t_{-i}} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_{-i}, y_{-i})\big)\, ds \Big\| \leq \varepsilon\big(t_{-i} - t\big). \end{cases}$$

b. En déduire que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \sup_{t_0 - T \leq t \leq t_0 + T} \Big\| Y_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, Y_n(s))\, ds \Big\| \leq \varepsilon T.$$

4.a. Vérifier que $[t_0 - T, t_0 + T]$ contient un sous-ensemble dénombrable dense Q.

b. Montrer qu'il existe une sous-suite $(Y_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ et une fonction $X : Q \mapsto B_f(x_0, r)$ telles que

$$\forall q \in Q, \ Y_{\phi(n)}(q) \underset{n \to +\infty}{\to} X(q).$$

c. Montrer que la fonction X s'étend en une fonction continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, à valeurs dans $B_f(x_0, r)$, et telle que

$$\sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} \big\| Y_{\phi(n)}(t) - X(t) \big\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

5.a. Montrer que

$$\forall t_0 - T \leq t \leq t_0 + T, \ \int_{t_0}^t f(s, Y_{\phi(n)}(s))\, ds \underset{n \to +\infty}{\to} \int_{t_0}^t f(s, X(s))\, ds.$$

b. En déduire que

$$\forall t_0 - T \leq t \leq t_0 + T, \ X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s))\, ds.$$

c. Conclure que la fonction X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, et qu'elle est solution du problème de Cauchy (1).