CY Cergy Paris Université | **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques | **2024-2025**

Devoir à la maison N°1

Exercice 1. *Connexité de groupes linéaires classiques.*

1.a. Soit $(A, B) \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C})^2$. Vérifier que l'application δ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \delta(z) = \det\big(zA + (1-z)B\big),$$

s'annule en un nombre fini de points de $\mathbb{C}$.

b. En déduire qu'il existe une application $z \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ telle que

$$z(0) = 0, \quad z(1) = 1, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq t \leq 1,\ \delta(z(t)) \neq 0.$$

c. Conclure que le groupe linéaire $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

2. Considérons le groupe spécial linéaire $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{SL}_N(\mathbb{C}) = \big\{ M \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \det(M) = 1 \big\}.$$

a. Vérifier que l'application ϕ définie par

$$\forall (M, \lambda) \in \mathcal{SL}_N(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*,\ \phi(M, \lambda) = M \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix},$$

est un homéomorphisme de $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$.

b. En déduire que $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

3. Dans cette question, nous munissons l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$ de son produit hermitien canonique donné par l'expression

$$\forall (X, Y) \in \big(\mathbb{C}^N\big)^2,\ \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N X_i \overline{Y_i},$$

et considérons une matrice unitaire U, soit qui appartient au groupe unitaire $\mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{U}_N(\mathbb{C}) = \big\{ M \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C}) \text{ t.q. } M^{-1} = {}^t\overline{M} \big\}.$$

a. Soit λ une valeur propre de la matrice U. Vérifier que

$$|\lambda| = 1.$$

b. Soit V un sous-espace de $\mathbb{C}^N$ stable par la matrice U. Montrer que le sous-espace orthogonal $V^\perp$ est aussi stable par la matrice U.

c. En déduire qu'il existe une matrice unitaire $P \in \mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ et des nombres réels θ_1, θ_2, ..., et θ_N tels que

$$U = P \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_N} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

d. Conclure que le groupe unitaire $\mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 2. *Lemme de Morse.*

Dans cet exercice, nous identifions tout vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ avec le vecteur colonne associé. Rappelons qu'avec cette convention, la forme bilinéaire symétrique $\mathcal{B}$ associée à une matrice symétrique $B \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ s'écrit

$$\forall (x, y) \in \big(\mathbb{R}^N\big)^2, \ \mathcal{B}(x, y) = {}^t x \, B \, y.$$

1. Étant donnée une matrice symétrique inversible $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$, considérons l'application F définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \ F(M) = {}^t M \, A \, M.$$

a. Vérifier que l'application F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'espace $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille N dans le sous-espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

b. Déterminer la différentielle $dF(I_N)$ de l'application F en la matrice identité I_N.

c. Montrer que cette différentielle est surjective et déterminer son noyau.

d. Considérons le sous-espace

$$E = \big\{ M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A \, M = {}^t M \, A \big\}.$$

Vérifier qu'il existe un voisinage ouvert $\omega \subset E \cap \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ de la matrice identité I_N dans le sous-espace E tel que la fonction F est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de ω sur son image $F(\omega)$.

e. En déduire qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de la matrice A dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et une application $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}))$ tels que

$$\forall M \in \mathcal{V}, \ M = {}^t G(M) \, A \, G(M).$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telle que

$$df(0) = 0, \quad \text{et} \quad A_0 = \frac{1}{2} \, d^2 f(0) \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}).$$

a. Vérifier qu'il existe une application $B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{S}_N(\mathbb{R}))$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \ f(x) = f(0) + {}^t x \, B(x) \, x.$$

b. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^N$ et une applications $X \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\forall y \in U, \ f(y) = f(0) + {}^t X(y) \, A_0 \, X(y).$$

c. Vérifier qu'il existe un entier $0 \leq r \leq N$ et une matrice inversible $Q \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \ {}^t(Qx) \, A_0 \, (Qx) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{i=r+1}^N x_i^2.$$

d. Conclure qu'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme Y d'un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^N$ sur un voisinage ouvert $W \subset U$ de 0 dans $\mathbb{R}^N$ tels que

$$\forall x \in V, \ f\big(Y(x)\big) = f(0) + \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{i=r+1}^N x_i^2.$$