

QD n°4: Equations différentielles non linéaires

Temps de vie des solutions

I Soit $y_0 \in \mathbb{R}^2$. Comme f est polynomiale, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$; par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale y du problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(0) = y_0$, et cette solution est de classe C^1 sur son intervalle de définition $I = (0, T_{\max})$, où $T_{\max} > 0$ ou $T_{\max} = +\infty$; soit $\forall t \in I$, $N(t) = \|y(t)\|^2$; par composition, N est de classe C^1 sur I et: $\forall t \in I$, $N'(t) = 2 \langle y(t), y'(t) \rangle = -2y_1(t)^4 + y_2(t)^2 y_1(t) + 2ty_1(t)^2 - y_2(t)^6 + 3ty_1(t)^2 y_2(t)$; soit alors $\forall (t, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, $\Pi(t, y_1, y_2) = -2y_1^4 + y_1^2 y_2 + 2ty_1^2 - y_2^6 + 3ty_1^2 y_2$; comme $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ et $ab \leq \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$, nous avons: $2ty_1^2 \leq t^2 + y_1^4$ et $|3ty_1^2 y_2| \leq 3t^3 + \frac{3}{2}|y_1|^3 |y_2|^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \Pi(t, y_1, y_2) \leq t^2 + 3t^3 - y_1^4 + y_1^2 y_2 - y_2^6 + \frac{3}{2}|y_1|^3 |y_2|^{\frac{3}{2}}$; sachant que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $ab \leq \frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{4}b^{\frac{4}{3}}$, $\frac{1}{2}|y_1|^3 |y_2|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{2}y_1^4 + \frac{1}{6}y_2^6 \Rightarrow \Pi(t, y_1, y_2) \leq t^2 + 3t^3 - \frac{1}{2}y_1^4 - \frac{5}{6}y_2^6 + \frac{1}{2}y_1^4 + \frac{1}{2}y_2^6$; sachant que la fonction $(y_1, y_2) \mapsto -\frac{1}{2}y_1^4 - \frac{5}{6}y_2^6 + \frac{1}{2}y_1^4 + \frac{1}{2}y_2^6$ est majorée sur $\mathbb{R}^2$, il existe $C \geq 0$ tel que: $\forall (t, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, $\Pi(t, y_1, y_2) \leq t^2 + 3t^3 + C \Rightarrow N'(t) \leq t^2 + 3t^3 + C \Rightarrow N(t) \leq N(0) + \frac{t^3}{2} + 3t^4 + Ct$; supposons par l'absurde que $T_{\max} < +\infty$; alors: $\forall t \in I$, $N(t) \leq \|y_0\|^2 + \frac{t^3}{2} + 3t^4 + Ct \Rightarrow y$ est bornée au voisinage de $T_{\max}$, ce qui contredit le principe de sortie de tout compact. $\Rightarrow T_{\max} = +\infty \Rightarrow$ Le problème de Cauchy considéré possède une unique solution y définie sur $[0, +\infty[$.

II Soit $\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, y) = y + e^{-2t}y^2$; par les opérations élémentaires, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy considéré admet une unique solution maximale $y \in C^1((0, T_{\max}), \mathbb{R})$, où $T_{\max} > 0$ ou $T_{\max} = +\infty$; $\forall t \in (0, T_{\max})$, $(y(t)e^{-t})' = (y'(t) - y(t))e^{-t} = e^{-4t}y(t)^2 \geq 0$, et $y(0)e^{-0} = \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \forall t \in (0, T_{\max})$, $y(t)e^{-t} \geq \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{y(t)e^{-t}}\right)' = -\frac{(y(t)e^{-t})'}{(y(t)e^{-t})^2} = -e^{-2t} \Rightarrow \frac{1}{y(t)e^{-t}} - 2 = -\int_0^t e^{-2s} ds = \frac{e^{-2t} - 1}{2} \Rightarrow \frac{1}{y(t)e^{-t}} = \frac{e^{-2t} + 1}{2} \Rightarrow$

$$y(t) = \frac{2e^t}{5+e-2t}; \text{ par maximalité de la solution } y, T_{\max} = +\infty \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

$$y(t) = \frac{2e^t}{5+e-2t} \Rightarrow \text{Le problème de Cauchy admet une unique solution } y \text{ définie sur } (0, +\infty[.$$

III.1. Soit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (-x + y^2, -y + x^2)$; comme F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, quel que soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un nombre $T_{\max} > 0$ ou $T_{\max} = +\infty$ tel qu'il existe une unique solution maximale $(x, y) \in \mathcal{C}^2([0, T_{\max}[, \mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy $\forall t \in [0, T_{\max}[, (x'(t), y'(t)) = F(x(t), y(t))$ et $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$; $\forall t \in [0, T_{\max}[, (x^2(t) + y^2(t))' = 2x(t)(-x(t) + y(t)^2) + 2y(t)(-y(t) + x(t)^2) = -2(x(t)^2 + y(t)^2) + 2x(t)y(t)(x(t) + y(t))$; si $\forall t \in [0, T_{\max}[, z(t) = x^2(t) + y^2(t)$, alors, z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T_{\max}[$, et $\forall t \in [0, T_{\max}[, z'(t) \leq -2z(t) + 2z(t)^{\frac{3}{2}}$, puisque $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leq a^2 + b^2$ et $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$; supposons alors que $(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et notons $\mathcal{C} = \sup \{ t \in [0, T_{\max}[\mid \forall 0 \leq s \leq t, (x^2(s) + y^2(s))^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \}$; par continuité, $\mathcal{C} > 0$, et par définition, $\forall 0 \leq t \leq \mathcal{C}, z(t)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z'(t) \leq -z(t) \Rightarrow z(t) \leq z(0)e^{-t}$; si $\mathcal{C} < T_{\max}$, alors, par continuité $t \mapsto z(t)$, $z(\mathcal{C}) \leq z(0)e^{-\mathcal{C}} < \frac{1}{2}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{C}$ par continuité $\Rightarrow \mathcal{C} = T_{\max}$ et $\forall 0 \leq t \leq T_{\max}, z(t) \leq z(0)e^{-t} \Rightarrow$ Par le principe de sauto-contraction, $T_{\max} = +\infty$ et $\forall t \geq 0, x^2(t) + y^2(t) \leq (x(0)^2 + y(0)^2)e^{-t}$.

2. D'après la question 1, il existe $\rho = \frac{1}{2} > 0$ tel que, si $(x_0, y_0) \in B((0, 0), \rho)$, alors, la solution maximale associée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et satisfait: $x^2(t) + y^2(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$
 $\Rightarrow (x(t), y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (0, 0) \Rightarrow$ La solution constante $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

IV.1. Soit $\forall t \in [0, T], \Phi(t) = \int_0^t g(s) \varphi(s) ds$; Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, T]$ et $\forall t \in [0, T], \Phi'(t) = g(t) \varphi(t) \leq \beta(t) g(t) + g(t) \Phi(t) \Rightarrow (\Phi(t) e^{-\int_0^t \beta(s) ds})' \leq g(t) e^{-\int_0^t \beta(s) ds}$
 $\Rightarrow \Phi(t) \leq \int_0^t \beta(s) g(s) e^{\int_0^s \beta(u) du} ds \Rightarrow \varphi(t) \leq \beta(t) + \Phi(t) \leq \beta(t) + \int_0^t \beta(s) g(s) e^{\int_0^s \beta(u) du} ds$

2. Comme $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, M_p(\mathbb{R}))$ et $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$, toute solution maximale x de l'équation différentielle $x'(t) = A(t)x(t) + p(t)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$; soit alors $\forall \varepsilon > 0, \forall t \geq 0, y_\varepsilon(t) = (\|x(t)\| + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$; y_ε est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et satisfait: $\forall t \geq 0, y_\varepsilon'(t) = \frac{\langle x(t), x'(t) \rangle}{y_\varepsilon(t)} = \frac{1}{y_\varepsilon(t)} \langle Ax(t) + p(t), x(t) \rangle$
 $\leq \|A(t)\| y_\varepsilon(t) + \|p(t)\| \Rightarrow (y_\varepsilon(t) e^{-\int_0^t \|A(s)\| ds})' \leq \|p(t)\| e^{-\int_0^t \|A(s)\| ds}$
 $\Rightarrow y_\varepsilon(t) \leq y_\varepsilon(0) e^{\int_0^t \|A(s)\| ds} + \int_0^t \|p(s)\| e^{\int_0^s \|A(u)\| du} ds \leq (y_\varepsilon(0) + \int_0^t \|p(s)\| ds)$

$e^{\int_0^t \|A(s)\| ds}$; comme $\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq y(t), \forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq \left(\|x(0)\|^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|A(s)\| ds$ $e^{\int_0^t \|A(s)\| ds} \Rightarrow x$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

V Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe un nombre $T_{\max} > 0$ ou $T_{\max} = +\infty$ tel qu'il existe une unique solution maximale $x \in \mathcal{C}^1([0, T_{\max}[, \mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy $\forall t \in [0, T_{\max}[, x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(0) = x_0$; soit alors $\forall 0 \leq t < T_{\max}, y(t) = \|x(t)\|^2$; y est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T_{\max}[$, et: $\forall 0 \leq t < T_{\max}, y'(t) = 2 \langle f(t, x(t)), x(t) \rangle \leq 2x(t) + 2\beta(t)y(t) \Rightarrow (y(t)e^{-2\int_0^t \beta(s) ds})' \leq 2x(t)e^{-2\int_0^t \beta(s) ds} \Rightarrow y(t) \leq y(0)e^{2\int_0^t \beta(s) ds} + 2\int_0^t x(s)e^{2\int_s^t \beta(u) du} ds$; si $T_{\max} < +\infty$, alors, x et β étant continues sur $[0, T_{\max}]$, il existe $M \geq 0$ tel que $\forall 0 \leq t < T_{\max}, y(t) \leq M \Rightarrow \|x(t)\| \leq \sqrt{M}$, ce qui contredit le principe de sortie de tout compact $\Rightarrow T_{\max} = +\infty$, et la solution x est définie sur $\mathbb{R}_+$.

VI 1. (i) Soit $k \in \mathbb{Z}$; si $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \frac{k\pi}{2}$, alors, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, x est l'unique solution globale de l'équation $x'(t) = (1+x(t)^2) \cos(\pi x(t))$ pour les données initiales $x(t_0) = \frac{k\pi}{2}$, où $t_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in]\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}[$; considérons l'unique solution maximale $x \in \mathcal{C}^1([T_-, T_+[, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle pour la condition initiale $x(t_0) = x_0$; d'après (i), par l'absurde, $\forall T_- < t < T_+, \frac{k\pi}{2} < x(t) < \frac{(k+1)\pi}{2}$, donc d'après le principe de sortie de tout compact, $T_- = -\infty$ et $T_+ = +\infty \Rightarrow$ toutes les solutions de l'équation différentielle sont globalement définies sur $\mathbb{R}$.

2. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, considérons l'unique solution maximale $y \in \mathcal{C}^1([T_-, T_+[, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle pour la condition initiale $y(t_0) = y_0$ où $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; $\forall t \in]T_-, T_+[$, $(\arctan(y(t)))' = \frac{y'(t)}{1+y(t)^2} \geq 1 \Rightarrow \arctan(y(t)) \geq \arctan(y_0) + t - t_0$; si $T_+ \geq \arctan(y_0) + t_0 + \frac{\pi}{2}$, alors $\forall \arctan(y_0) + t_0 + \frac{\pi}{2} \leq t < T_+, \arctan(y(t)) \geq \frac{\pi}{2}$, ce qui est absurde! $\Rightarrow$ Le temps de vie de toutes les solutions de l'équation différentielle est fini.

3. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, considérons l'unique solution maximale $z \in \mathcal{C}^1([T_-, T_+[, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle pour la condition initiale $z(t_0) = z_0$ où $(t_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$; soit $\forall t \in]T_-, T_+[$, $x(t) = z(t) - t$; x est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]T_-, T_+[$.

avec : $\forall t \in]T_-, T_+[$, $x'(t) = 1 - t^2 + (x(t) + t)^2 - 1 = x(t)^2 + 2t$; supposons alors que $T_+ = +\infty$; $\forall t \in]\frac{1}{2}, T_+[$, $+ \infty[$, $x(t) \geq x(t)^2 + 1 \Rightarrow (\arctan(x(t)))' \geq 2 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall t \in]\frac{1}{2}, T_+[$, $+ \infty[$, $\arctan(x(t)) \geq t + \alpha$, ce qui est absurde comme à la question 2! $\Rightarrow$ Le temps de vie de toutes les solutions de l'équation différentielle est fini.

VII.1. Pour $\varepsilon > 0$, l'équation différentielle se réduit au système linéaire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) =$

$$A x(t) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \underset{0, v}{x}(t) = e^{tA} \underset{0, v}{x}_{\varepsilon, v}(0) = e^{tA} v = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) v_1 + \sin(t) v_2 \\ -\sin(t) v_1 + \cos(t) v_2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\forall (\varepsilon, t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $G(\varepsilon, t, x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 + \varepsilon((2 + \cos(t)) \sin(x_2) + \cos(2t)) \end{pmatrix}$; G

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, avec : $\forall (\varepsilon, t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $\|G(\varepsilon, t, x)\| \leq \|x\| + 3\varepsilon$; par le théorème de Cauchy-Lipschitz, et le critère d'existence globale, le problème de Cauchy $x'(t) = G(\varepsilon, t, x(t))$ et $x(0) = v \in \mathbb{R}^2$ admet une unique solution globale $x_{\varepsilon, v} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

3. $\Rightarrow$ Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $(e^{-tA} \underset{0, v}{x}(t))' = e^{-tA} (x'_{\varepsilon, v}(t) - A x_{\varepsilon, v}(t)) = \varepsilon e^{-tA} E(t, x_{\varepsilon, v}(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_{\varepsilon, v}(t) = e^{tA} \left(v + \varepsilon \int_0^t e^{-sA} E(s, x_{\varepsilon, v}(s)) ds \right)$; si $x_{\varepsilon, v}$ est 2π -périodique, alors, $x_{\varepsilon, v}(2\pi) = x_{\varepsilon, v}(0) \Rightarrow e^{2\pi A} \left(v + \varepsilon \int_0^{2\pi} e^{-sA} E(s, x_{\varepsilon, v}(s)) ds \right) = v$; comme $e^{2\pi A} = I_2$, et $\varepsilon \neq 0$, $\int_0^{2\pi} e^{-sA} E(s, x_{\varepsilon, v}(s)) ds = 0$, ce qui équivaut à $\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} E(s, x_{\varepsilon, v}(s)) ds = 0$.

$\Leftarrow$ De même, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_{\varepsilon, v}(t) = e^{tA} \left(v + \varepsilon \int_0^t e^{-sA} E(s, x_{\varepsilon, v}(s)) ds \right) \Rightarrow x_{\varepsilon, v}(2\pi) = v + \varepsilon \int_0^{2\pi} e^{-sA} E(s, x_{\varepsilon, v}(s)) ds = v$; soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = x_{\varepsilon, v}(t + 2\pi)$; y est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $y(0) = v$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = A y(t) + \varepsilon E(t, y(t))$, d'où par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_{\varepsilon, v}(t) = y(t) = x_{\varepsilon, v}(t + 2\pi) \Rightarrow x_{\varepsilon, v}$ est 2π -périodique.

4. a. Par le théorème de dépendance différentielle, l'application $(\varepsilon, v) \mapsto x_{\varepsilon, v}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$; par composition, l'application

$(\varepsilon, r) \mapsto e^{-\varepsilon A} F(\cdot, X_{\varepsilon, r}(\cdot))$ est de classe C^∞ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dans $C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$; d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, H est donc bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

b. Soit $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$; d'après la question 1, $\forall t \in \mathbb{R}, X_{0, r}(t) = e^{tA} r$, d'où par définition,

$$H(0, r) = \int_0^{2\pi} e^{-0A} F(0, e^{0A} r) ds = \begin{pmatrix} - \int_0^{2\pi} ((1+\cos(s)) \min(r_1 \cos(s) + r_2 \sin(s)) + \cos(2s)) \sin(s) ds \\ \int_0^{2\pi} ((1+\cos(s)) \min(r_1 \cos(s) + r_2 \sin(s)) + \cos(2s)) \cos(s) ds \end{pmatrix}$$

c. D'après la question 4.b, $H(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} - \int_0^{2\pi} \cos(2s) \sin(s) ds \\ \int_0^{2\pi} \cos(2s) \cos(s) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(s) - \sin(3s)) ds \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(3s) + \cos(s)) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, $dv_r H(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} - \int_0^{2\pi} ((1+\cos(s)) \cos(s) + \cos(2s)) \sin(s) ds \\ \int_0^{2\pi} ((1+\cos(s)) \cos(s) + \cos(2s)) \cos(s) ds \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \text{ et } dv_r H(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} - \int_0^{2\pi} ((1+\cos(s)) \sin(s) + \cos(2s)) \sin(s) ds \\ \int_0^{2\pi} ((1+\cos(s)) \sin(s) + \cos(2s)) \cos(s) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow dH(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

5.a. Comme H est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, avec $H(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $dH(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$,

par le théorème des fonctions implicites, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel qu'il existe $V \in C^\infty]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, H(\varepsilon, V(\varepsilon)) = (0, 0)$.

b. D'après les questions 3 et 5.a, l'équation différentielle considérée possède une solution 2π -périodique lorsque $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\setminus \{0\}$ (comme pour $\varepsilon = 0$).

VIII 1. Le champ de vecteurs X est bien défini et de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, X(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ et $X = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 1)$ ou $(0, -1)$.

2.a. Comme $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, dX(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $dX(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ l'équation linéaire

visée s'écrit: $\forall t \in \mathbb{R}, \varepsilon'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon(t)$, ce qui équivaut pour $\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix}$ au

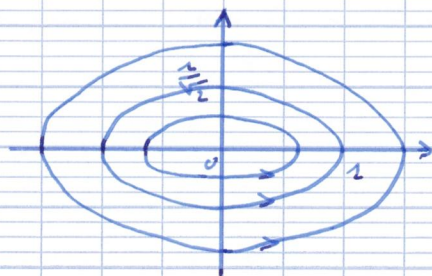
système linéarisé: $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varepsilon_1'(t) = -2\varepsilon_2(t) \\ \varepsilon_2'(t) = \varepsilon_1(t) \end{cases}$.

b. Conditions du problème de Cauchy $\forall t \in \mathbb{R}, \varepsilon'(t) = A \varepsilon(t)$ et $\varepsilon(0) = r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$,

où $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\forall t \in \mathbb{R}, \varepsilon(t) = e^{tA} r = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & -\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} =$

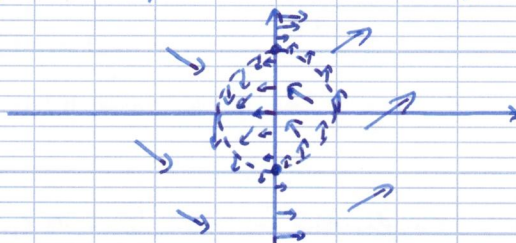
$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) r_1 - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) r_2 \\ \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} r_1 + \cos(\sqrt{2}t) r_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_1(t)^2 + 2\varepsilon_2(t)^2 = r_1^2 + 2r_2^2 \Rightarrow \text{Les orbites}$$

du système linéarisé sont des ellipses centrées en $(0,0)$:



3a. Soit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y) = (-x,y)$; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\pi \circ X(x,y) = (-x^2 - y^2 + 1, -y)$ et $X \circ \pi(x,y) = (x^2 + y^2 - 1, -y) = -\pi \circ X(x,y) \Rightarrow X$ est antisymétrique par rapport à la réflexion orthogonale π par rapport à l'axe des y .

b. Considérons le portrait de phase associé au champ de vecteurs X :



(i) Soit $b \in]-1,1[$. Considérons l'unique solution maximale $Z_b \in \mathcal{C}^1([-T_-, T_+], \mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy $\forall t \in]-T_-, T_+[$, $Z_b'(t) = X(Z_b(t))$ et $Z_b(0) = (0,b)$; soit $O_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } x < 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\}$; comme $Z_b'(0) = (b^2 - 1, 0)$, $a = \sup \{0 \leq t < T_+ \text{ s.t. } \forall 0 \leq s \leq t, Z_b(s) \in O_-\}$ est bien défini et strictement positif; comme $\forall 0 \leq t < a$, $(Z_b)_x'(t) < 0$ et $(Z_b)_y'(t) < 0$, et de par le principe de sortie de tout compact, $a < T_+$, et $Z_b(a) = (\cos(\theta_b), \sin(\theta_b))$, avec $\theta_b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$; comme $Z_b'(a) = (0, \cos(\theta_b))$, $\theta_b \in (\pi, \frac{3\pi}{2}[$.

(ii) Soit $O_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } x < 0, x^2 + y^2 > 1 \text{ et } y \leq 0\}$; comme $Z_b'(a) = (0, \cos(\theta_b))$ avec $\theta_b \in (\pi, \frac{3\pi}{2}[$, $b = \sup \{a \leq t < T_+ \text{ s.t. } \forall a \leq s \leq t, Z_b(s) \in O_-\}$ est bien défini et $b > a$; supposons que $b \geq T_+$; alors $\forall a \leq t < T_+$, $x'(t) > 0$ et $y'(t) \leq 0 \Rightarrow a - x(t) < -\cos(\theta_b)$ et $y(t) < \sin(\theta_b) \Rightarrow \cos(\theta_b) \leq y'(t) \leq 0 \Rightarrow y(t) \geq \sin(\theta_b) + \cos(\theta_b)(t-a)$; d'après le principe de sortie de tout compact, $T_+ = +\infty$; s'il existe alors $t_* > a$ tel que $y(t_*) < -1$, alors $\forall t \geq t_*$, $y(t) < y(t_*) \Rightarrow x'(t) \geq y(t_*)^2 - 1 \Rightarrow x(t) \geq x(t_*) + (y(t_*)^2 - 1)(t - t_*)$, ce qui contredit la définition de $b \Rightarrow b < T_+$; comme $\forall \theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2}[$, $X(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (0, \cos(\theta))$, il existe $\beta < -1$ tel que $Z_b(b) = (0, \beta)$.

(iii) Soit alors $\forall t \in [0, b]$, $\tilde{Z}_b(t) = \pi \circ Z_b(t)$; par composition et d'après la question 3a,

$\forall t \in (0, \epsilon)$, $\tilde{z}_b'(t) = \pi_* z_b'(t) = \pi_* X(z_b(t)) = -X \circ \pi(z_b(t)) = -X(\tilde{z}_b(t))$ et $\tilde{z}_b(0) = (a, b)$;
 par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\forall t \in [-\epsilon, 0]$, $z_b(t) = \tilde{z}_b(-t) = \pi_* z_b(t)$; comme
 $z_b(\epsilon) = (0, \beta)$, $z_b(-\epsilon) = \pi_* z_b(\epsilon) = z_b(\epsilon) \Rightarrow$ La solution z_b est 2ϵ -périodique et
 l'orbite associée est fermée.

(iv) Pour $b=0$, considérons alors l'ouvert U_0 compris entre les courbes paramétrées par $\gamma_1 = \{z_0(t), -\epsilon \leq t \leq \epsilon\}$ et $\gamma_2 = \{z_0(t), \epsilon \leq t \leq \epsilon + 2\epsilon\}$; U_0 est un voisinage de $(0, -1)$, et si une
 condition initiale $v = (v_x, v_y) \in U_0$, alors, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, la
 solution z_v associée de l'équation différentielle $z_v'(t) = X(z_v(t))$ ne peut croiser l'or-
 bite de la solution z_0 ; par le théorème de sortie de tout compact, z_v est donc bien
 définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $(\pi_* z_v(-t))' = X(\pi_* z_v(-t))$, par le
 théorème de Cauchy-Lipschitz, $\forall t \in \mathbb{R}$, $z_v(-t) = \pi_* z_v(t) \Rightarrow$ L'orbite associée à la solu-
 tion z_v est symétrique par rapport à l'axe des $y \Rightarrow$ Il existe un nombre $b_v \in]\beta_0, -1[\cup]-1, 0[$
 tel que $(0, b_v)$ appartient à cette orbite, où $(0, \beta_0)$ appartient à l'orbite
 de la solution z_0 ; si ce nombre n'appartient jamais à l'intervalle $] -1, 0[$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$,
 $(z_v)_y(t) < -1$, et dans ce cas, il existe $t_* \in \mathbb{R}$ tel que $(z_v(t_*))_y < -1$ et $(z_v(t_*))_x > 0$;
 par continuation, $\forall t \geq t_*$, $(z_v(t))_y < -1$, $(z_v(t))_x > 0$, $(z_v'(t))_x > 0$ et $(z_v'(t))_y > 0$;
 par compacité de l'adhérence $\bar{U}_0$, il existe $x_* > 0$ et $y_* \leq 0$ tel que $z_v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_*, y_*)$
 $\Rightarrow z_v'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_*^2 + y_*^2 - 1, x_*) \neq (0, 0)$, ce qui est absurde par rapport à la con-
 vergence de $z_v(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$; par l'absurde, il existe un nombre $b_v \in]-1, 0[$
 tel que $(0, b_v)$ appartient à l'orbite de $z_v \Rightarrow$ Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$,
 $z_v(t) = z_{b_v}(t - t_0) \Rightarrow$ L'orbite de z_v est égale à celle de la solution z_{b_v} , donc
 est fermée.

Ex 1. Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_{pu}(t) = \sin(t)$ et $y_{pu}(t) = \cos(t)$; les fonctions x_{pu} et y_{pu} sont bien définies,
 2π -périodiques et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $x_{pu}(0) = 0$, $y_{pu}(0) = 1$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_{pu}'(t) =$
 $\cos(t) = y_{pu}(t)$ et $y_{pu}'(t) = -\sin(t) = -(1 - x_{pu}(t)^2 - y_{pu}(t)^2) y_{pu}(t) - x_{pu}(t)$; comme $x_{pu} =$
 (x_{pu}, y_{pu}) n'est pas une fonction constante, par le théorème de Cauchy-Lipschitz,
 il s'agit de l'unique solution recherchée.

2.a. Soit $\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(X) = (y, (1 - x^2 - y^2)y - x)$; comme F est polynomiale,
 F est bien définie et de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, avec: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $dF(x, y)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2xy-1 & 2x^2-3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, dF(x_{per}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\sin(2t) & 1-\cos(2t) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Lac}$$

système linéarisé au voisinage de la solution périodique x_{per} s'écrit : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varepsilon_1'(t) = \varepsilon_1(t) \text{ et } \varepsilon_2'(t) = -(1+\sin(2t)) \varepsilon_1(t) - (1+\cos(2t)) \varepsilon_2(t)$$

b. Par définition, le vecteur tangent à l'orbite périodique est égal à : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = x_{per}'(t) = (\cos(t), -\sin(t))$; sachant que $\forall t \in \mathbb{R}, x_{per}'(t) = F(x_{per}(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = dF(x_{per}(t))(\varphi(t)) \Rightarrow \varphi$ est solution du système linéarisé de la question 2.a.

c.(i) Lorsque $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est solution du système linéarisé, la fonction ε_1 satisfait :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varepsilon_1''(t) + (1+\cos(2t)) \varepsilon_1'(t) + (1+\sin(2t)) \varepsilon_2(t) = 0; \text{ d'après la méthode de variation de la constante, posons : } \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \varepsilon_1(t) = \lambda(t) \cos(t) \Rightarrow \varepsilon_1'(t) = \lambda'(t)$$

$$\cos(t) - \lambda(t) \sin(t) \Rightarrow \varepsilon_1''(t) = \lambda''(t) \cos(t) - \lambda'(t) \sin(t) - \lambda(t) \cos(t), \text{ d'où l'équation :}$$

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \lambda''(t) \cos(t) - \lambda'(t) \sin(t) + (1+\cos(2t)) \cos(t) \lambda'(t) = 0 \Rightarrow (\lambda'(t) \cos(t))^' =$$

$$-(1+\cos(2t)) (\cos(t) \lambda'(t)) \Rightarrow \lambda'(t) \cos(t)^2 = \lambda'(0) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} \Rightarrow \lambda(t) = \lambda(0) + \lambda'(0) \int_0^t$$

$$e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds = \lambda(0) + \lambda'(0) \tan(t) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} + \lambda'(0) \int_0^t \tan(s) (1+\cos(2s)) e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds$$

$$- \frac{\sin(2s)}{2} ds = \lambda(0) + \lambda'(0) \tan(t) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} + \lambda'(0) \int_0^t \sin(2s) e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds, \text{ d'où :}$$

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \varepsilon_1(t) = \lambda(0) \cos(t) + \lambda'(0) \left(\sin(t) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} + \cos(t) \int_0^t \sin(2s) e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds \right)$$

$$e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} ds \Rightarrow \varepsilon_2(t) = \varepsilon_1'(t) = -\lambda(0) \sin(t) + \lambda'(0) \left(\cos(t) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} - \sin(t) \int_0^t \sin(2s) e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds \right).$$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = \left(\sin(t) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} + \cos(t) \int_0^t \sin(2s) e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds, \cos(t) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} - \sin(t) \int_0^t \sin(2s) e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds \right)$; v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, v_1'(t) = v_2(t) \text{ et } v_2'(t) = -(1+\sin(2t)) \sin(t) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} - \cos(t) (1+\cos(2t)) e^{-t - \frac{\sin(2t)}{2}} - \cos(t) \int_0^t \sin(2s) e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds = -(1+\sin(2t)) v_1(t) - (1+\cos(2t)) v_2(t)$$

$$\Rightarrow v \text{ est solution du système linéarisé; sachant que } v(0) = (0, 1), \text{ la famille } (\varphi, v)$$

$$\text{forme une base de solutions du système linéarisé; soit alors } \forall t \in \mathbb{R}, S(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & v_1(t) \\ \varphi_2(t) & v_2(t) \end{pmatrix}$$

$$S \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et : } \forall t \in \mathbb{R}, S'(t) = dF(x_{per}(t)) S(t), \text{ et } S(0)$$

$$= I_2, \text{ d'où : } \forall t \in \mathbb{R}, S(t) = R(t, 0) \Rightarrow R(2\pi, 0) = S(2\pi) = \begin{pmatrix} \varphi_1(2\pi) & v_1(2\pi) \\ \varphi_2(2\pi) & v_2(2\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \int_0^{2\pi} \sin(2s) e^{-s - \frac{\sin(2s)}{2}} ds \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}.$$

3.a. Considérons l'hyperplan affine $\Sigma = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ qui contient le point $(0, 1)$ et qui est transverse au champ de vecteurs F en $(0, 1)$, puisque $F(0, 1) = (1, 0)$ et $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1, 0) \oplus \mathbb{R}(0, 1)$; notons Φ^t le flot du champ de vecteurs F au temps $t \in \mathbb{R}$; comme la solution X_{per} est exactement 2π -périodique et qu'elle satisfait $X_{\text{per}}(0) = (0, 1)$, le temps t_1 de premier retour de $(0, 1)$ sur $\Sigma \cap V(0, 1)$ est bien défini et il vaut $t_1(0, 1) = 2\pi$; sachant que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, il existe un nombre $\delta > 0$ et une application $\varrho_1 \in \mathcal{C}^\infty(\{0\} \times]1-\delta, 1+\delta[, \mathbb{R})$ telle que $\forall u \in \{0\} \times]1-\delta, 1+\delta[, \varrho_1(u) = \min \{t > 0 \text{ s.t. } \Phi^t(u) \in \{0\} \times]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\}$; considérons l'application de premier retour de Poincaré ℓ définie par $\forall u \in \{0\} \times]1-\delta, 1+\delta[, \ell(u) = \Phi^{\varrho_1(u)}(u)$; ℓ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\{0\} \times]1-\delta, 1+\delta[$, avec $\ell(0, 1) = (0, 1)$; notons enfin $\forall r \in]1-\delta, 1+\delta[, \ell(r, r) = (0, p(r))$; p est également bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1-\delta, 1+\delta[$, avec $R(2\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & p'(1) \end{pmatrix}$;

d'après la question 2.c, $0 \leq p'(1) = e^{-2\pi} < 1$; par continuité et quitte à diminuer le nombre δ , $\forall r \in]1-\delta, 1+\delta[, |p'(r)| < 1 \Rightarrow p$, et par suite, ℓ sont des applications contractantes.

b. D'après la question 3.a, ℓ est une application contractante sur $\{0\} \times]1-\delta, 1+\delta[\Rightarrow \forall u \in \{0\} \times]1-\delta, 1+\delta[, \ell^n(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 1) = \ell(0, 1) \Rightarrow \text{L'orbite } (\Phi^t(0, 1))_{t \in \mathbb{R}} \text{ est attractive} \Rightarrow \forall u \in \{0\} \times]1-\delta, 1+\delta[, d(\{\Phi^s(u), s \geq 0\}, \{\Phi^s(0, 1), s \in \mathbb{R}\}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.