GRAVEJAT Philippe

M1

16/09/22

TD N°3 : Equations différentielles linéaires

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

I (i) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{4n} = \begin{pmatrix} \omega^{4n} & 0 \\ 0 & \omega^{4n} \end{pmatrix}$, $A^{4n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{4n} \\ -\omega^{4n+2} & 0 \end{pmatrix}$, $A^{4n+2} = \begin{pmatrix} -\omega^{4n+2} & 0 \\ 0 & -\omega^{4n+2} \end{pmatrix}$

et $A^{4n+3} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{4n+2} \\ \omega^{4n+4} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ \omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$, d'où la solution du

problème de Cauchy $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $X'(t) = A\,X(t)$ s'écrit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) x_0 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} y_0 \\ \omega \sin(\omega t) x_0 + \cos(\omega t) y_0 \end{pmatrix}$

(ii) Comme $\chi_B = X^2 - 3X + 1$, $\sigma(B) = \left\{ \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \right\}$; comme $E_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ et

$E_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $BP = P \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$, où $P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; comme $\det(P)$

$= 4\sqrt{5}$, $P^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5}-1 \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tB} = P \begin{pmatrix} e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})\, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} - (1-\sqrt{5})\, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} & 2 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} - 2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \\ 2 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} - 2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} & (\sqrt{5}-1)\, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} + (1+\sqrt{5}) e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \end{pmatrix}$, d'où la solution du problème de

Cauchy $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $X'(t) = B\,X(t)$ s'écrit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ \left[(1+\sqrt{5})x_0 + 2y_0\right] e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} - \left[(1-\sqrt{5})x_0 + 2y_0\right] e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \right\} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ \left(2x_0 + (\sqrt{5}-1)y_0\right) e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} + \left(-2x_0 + (1+\sqrt{5})y_0\right) e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \right\} \end{pmatrix}$

(iii) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C^{2n} = I_3$ et $C^{2n+1} = C \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tC} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & 0 & \mathrm{sh}(t) \\ 0 & e^t & 0 \\ \mathrm{sh}(t) & 0 & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$

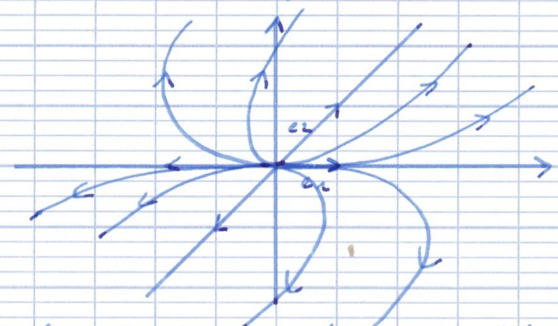
d'où la solution du problème de Cauchy $X(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X'(t) = C\,X(t)$ s'écrit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) =$

$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) x_0 + \mathrm{sh}(t) z_0 \\ e^t y_0 \\ \mathrm{sh}(t) x_0 + \mathrm{ch}(t) z_0 \end{pmatrix}$.

II 1. Comme les racines du polynôme $X^3 - 4X^2 + 5X = 0$ sont 0, $2-i$ et $2+i$, et $t \mapsto \frac{2}{5} t$ est une solution particulière, la forme générale des solutions est : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = A + \frac{2}{5}t + Be^{2t}\cos(t) + Ce^{2t}\sin(t)$, où $(A,B,C) \in \mathbb{R}^3$.

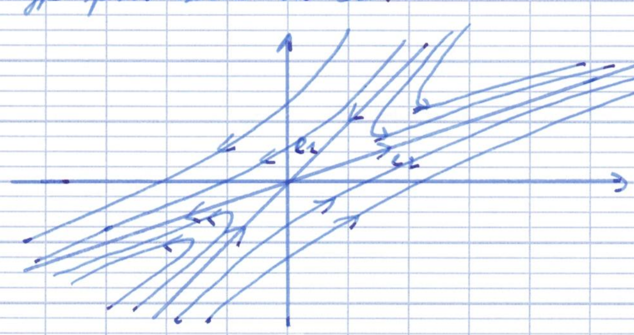
2. D'après la question 1, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = \frac{2}{5} + Be^{2t}(2\cos(t) - \sin(t)) + Ce^{2t}(2\sin(t) + \cos(t)) \Rightarrow x''(t) = Be^{2t}(3\cos(t) - 4\sin(t)) + Ce^{2t}(3\sin(t) + 4\cos(t))$, d'où : $x(0) = A + B$, $x'(0) = \frac{2}{5} + 2B + C$, et $x''(0) = 3B + 4C$; lorsque $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \frac{18}{25} + \frac{2}{5}t + \frac{7}{25}e^{2t}\cos(t) + \frac{1}{25}e^{2t}\sin(t)$.

III (i) Comme $\chi_A = (X-1)(X-2)$, $\sigma(A) = \{1, 2\} \Rightarrow$ L'origine est instable pour le système linéaire associé ; comme $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, si $x = x_1e_1 + x_2e_2$, où $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA}x = x_1e^te_1 + x_2e^{2t}e_2$, d'où le portrait de phase de type noeud instable:

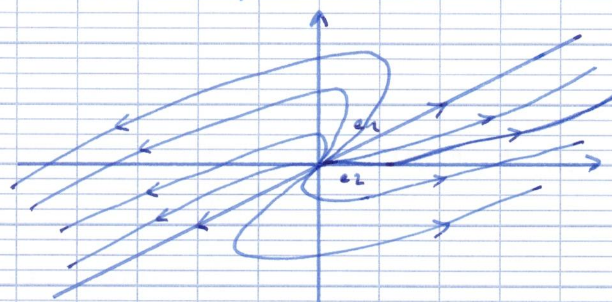


(ii) Comme $\chi_B = (X-1)(X+1)$, $\sigma(B) = \{-1, 1\} \Rightarrow$ L'origine est instable pour le système linéaire associé ; comme $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} (= e_1)$ et $E_1(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} (= e_2)$,

$\forall x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tB}x = x_1e^{-t}e_1 + x_2e^te_2$, d'où le portrait de phase de type point selle ou col :

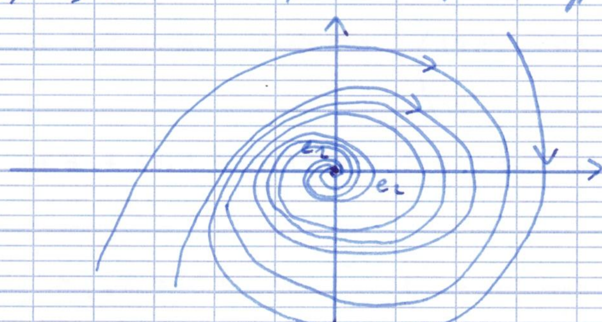


(iii) Comme $\chi_C = (X-1)^2$, $\sigma(C) = \{1\} \Rightarrow$ L'origine est instable pour le système linéaire associé ; comme $E_1(C) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} (= e_1)$ et $C = P\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, pour $e_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\forall x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{tC}x = (e^t x_1 + te^t x_2)e_1 + e^t x_2 e_2$, d'où le portrait de phase de type noeud dégénéré instable :



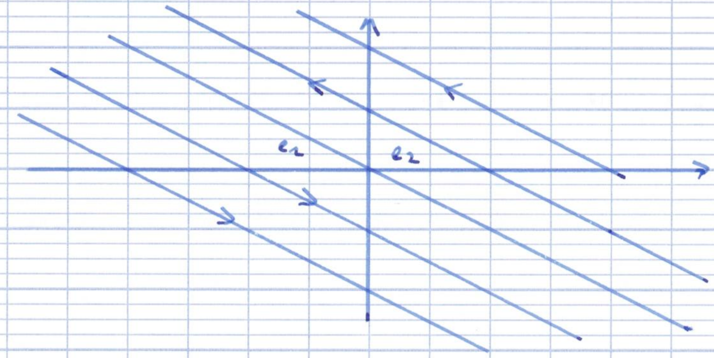
(iv) Comme $\chi_D = X^2+10X+49$, $\sigma(D) = \{-5 \pm 2\sqrt{6}\, i\}$ $\Rightarrow$ l'origine est asymptotiquement stable pour le système linéaire associé ; sachant que $E_{-5+2\sqrt{6}i}(D) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\, i\\1\end{pmatrix}$, les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$ satisfont $D(e_1+ie_2) = (-5+2\sqrt{6}\, i)(e_1+ie_2)$, d'où : $DP = P\begin{pmatrix}-5 & 2\sqrt{6}\\ -2\sqrt{6} & -5\end{pmatrix}$, où $P=\begin{pmatrix}0&\sqrt{6}\\1&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \forall t\in\mathbb{R}$, $e^{tD} = e^{-5t}P\begin{pmatrix}\cos(2\sqrt{6}t) & \sin(2\sqrt{6}t)\\ -\sin(2\sqrt{6}t) & \cos(2\sqrt{6}t)\end{pmatrix}P^{-1}$

$\Rightarrow \forall x = x_1e_1+x_2e_2\in\mathbb{R}^2$, $e^{tD}x = e^{-5t}\{[\cos(2\sqrt{6}t)x_1 + \sin(2\sqrt{6}t)x_2]e_1 + [-\sin(2\sqrt{6}t)x_1 + \cos(2\sqrt{6}t)x_2]e_2\}$, d'où le portrait de phase de type foyer stable :



(v) Comme $\chi_E = X^2$, $\sigma(E)=\{0\}$; sachant que $E_0(E) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}(=e_1)$, l'origine est instable pour le système linéaire associé ; pour $e_2 = \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}-2&0\\1&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $E = P\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$

$\Rightarrow \forall x = x_1e_1+x_2e_2\in\mathbb{R}^2$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{tE}x = (x_1+tx_2)e_1 + x_2e_2$, d'où le portrait de phase dégénéré :



IV 1. $0 \in \sigma(A)$ et $E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} (= e_1) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} e_1 = e_1 \Rightarrow$ Le mouvement associé à la valeur propre 0 est stationnaire ; $-3 \in \sigma(A)$ et $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} (= e_2),\ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} (= e_3)\right) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x = x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3,\ e^{tx} = e^{-3t} x$

2. Comme $\sigma(A) = \{0, -3\}$, l'origine est stable pour le système linéaire associé ; plus précisément, le centre de gravité $x(t) + y(t) + z(t)$ des particules est conservé, et l'origine est asymptotiquement stable dans le plan d'équation $x + y + z = 0$; dans la limite $t \to +\infty$, la solution $U(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ vérifie : $U(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

V 1.a. Pour $X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\x'(t)\end{pmatrix}$, cette équation différentielle équivaut au système différentiel du premier ordre : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A X(t) + F(t)$, où $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \begin{pmatrix}0\\f(t)\end{pmatrix}$.

b. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{4n} = I_2$, $A^{4n+1} = A$, $A^{4n+2} = -I_2$ et $A^{4n+3} = -A \Rightarrow$
$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{4n}}{(4n)!} - \frac{t^{4n+2}}{(4n+2)!}\right] I_2 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{t^{4n+3}}{(4n+3)!}\right] A = \cos(t) I_2 + \sin(t) A$
$= \begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\-\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix} \Rightarrow \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ R(t,s) = e^{(t-s)A} = \begin{pmatrix}\cos(t-s) & \sin(t-s)\\-\sin(t-s) & \cos(t-s)\end{pmatrix}$.

2. $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} F(s)\,ds$, donc si $x(0) = x_0$ et $x'(0) = x_1$, alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \cos(t) x_0 + \sin(t) x_1 + \int_0^t f(s) \sin(t-s)\,ds$ et $x'(t) = -\sin(t) x_0 + \cos(t) x_1 + \int_0^t f(s) \cos(t-s)\,ds$.

3. $\Rightarrow$ Comme x est 2π-périodique, $x(2\pi) = x(0)$ et $x'(2\pi) = x'(0)$; sachant que $x(2\pi) = x(0) - \int_0^{2\pi} f(s)\sin(s)\,ds$ et $x'(2\pi) = x'(0) + \int_0^{2\pi} f(s)\cos(s)\,ds$, $\int_0^{2\pi} f(s)\sin(s)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\cos(s)\,ds = 0$.

$\Leftarrow$ Toute solution x vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t+2\pi) = x(t) + \int_t^{t+2\pi} f(s)\sin(t-s)\,ds = x(t) + \sin(t)\int_t^{t+2\pi}\cos(s) f(s)\,ds - \cos(t)\int_t^{t+2\pi}\sin(s) f(s)\,ds$; comme f est 2π-périodique, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\int_t^{t+2\pi}\cos(s) f(s)\,ds = \int_0^{2\pi}\cos(s) f(s)\,ds = 0$ et $\int_t^{t+2\pi}\sin(s) f(s)\,ds = \int_0^{2\pi}\sin(s) f(s)\,ds = 0 \Rightarrow x(t+2\pi) = x(t) \Rightarrow x$ est 2π-périodique.

II (i) Considérons le polynôme $P_d = X^d + p_{d-1}X^{d-1} + \dots + p_0$ et ses racines complexes $(a_j + i b_j)_{1\le j\le r}$; nous savons qu'il existe des entiers positifs ou nuls $(d_j)_{1\le j\le r}$, et des coefficients réels $(\alpha_{j,k})_{\substack{1\le j\le r\\ 0\le k\le d_j}}$ et $(\beta_{j,k})_{\substack{1\le j\le r\\ 0\le k\le d_j}}$ tels que : $\forall t\in\mathbb{R}$, $u(t) = \sum_{j=1}^{r} e^{a_j t}\sum_{k=0}^{d_j}(\alpha_{j,k}\cos(b_j t) + \beta_{j,k}\sin(b_j t))\,t^k$; comme $P_d \in \mathbb{R}[X]$, nous pouvons limiter cette somme aux racines telles que $b_j \ge 0$.

(ii) Soit $a_+ = \max\{a_j,\ 1\le j\le r$ t.q. $\exists\, 0\le k\le d_j$ t.q. $\alpha_{j,k}\neq 0$ ou $\beta_{j,k}\neq 0\}$ et $k_+ = \max\{k\ge 0$ t.q. $\exists\, 1\le j\le r$ t.q. $a_j = a_+$, et $\alpha_{j,k}\neq 0$ ou $\beta_{j,k}\neq 0\}$; supposons que $a_+ > 0$; dans ce cas, $\frac{u(t)}{t^{k_+}e^{a_+ t}} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t}\right)$, tandis que : $\forall 1\le j\le r$, $\forall 0\le k\le d_j$, $\frac{e^{a_j t}(\alpha_{j,k}\cos(b_j t) + \beta_{j,k}\sin(b_j t))\,t^k}{t^{k_+}e^{a_+ t}} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t}\right)$, si $a_j \neq a_+$, ou si $a_j = a_+$ et $k \neq k_+$; en particulier, si $j_1, \dots,$ et j_L sont les entiers $1\le j\le r$ tels que $a_{j_l} = a_+$ et $\alpha_{j_l,k_+}\neq 0$ ou $\beta_{j_l,k_+}\neq 0$, alors $\sum_{l=1}^{L}\left[\alpha_{j_l,k_+}\cos(b_{j_l}t) + \beta_{j_l,k_+}\sin(b_{j_l}t)\right] \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow \left|\sum_{l=1}^{L}\left[\alpha_{j_l,k_+}\cos(b_{j_l}t) + \beta_{j_l,k_+}\sin(b_{j_l}t)\right]\right|^2 \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow$ $\int_n^{2n}\left|\sum_{l=1}^{L}\left[\alpha_{j_l,k_+}\cos(b_{j_l}t) + \beta_{j_l,k_+}\sin(b_{j_l}t)\right]\right|^2 dt \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$.

(iii) Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}_+^2$; $\int_n^{2n}\cos(\lambda t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_n^{2n}\left[1+\cos(2\lambda t)\right]dt = n$ si $\lambda = 0$, $\frac{n}{2} + \underset{n\to+\infty}{O}(1)$ si $\lambda\neq 0$; de même, $\int_n^{2n}\sin(\lambda t)^2\,dt = 0$ si $\lambda = 0$, $\frac{n}{2} + \underset{n\to+\infty}{O}(1)$ sinon, et $\int_n^{2n} dt\,\sin(\lambda t)\cos(\lambda t) = \frac{1}{2}\int_n^{2n}\sin(2\lambda)\,dt = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$; de même, $\int_n^{2n}\cos(\lambda t)\cos(\mu t)\,dt = \frac{1}{2}\int_n^{2n}\left[\cos((\lambda+\mu)t) + \cos((\lambda-\mu)t)\right]dt = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$ si $\mu\neq\lambda$, puis $\int_n^{2n}\sin(\lambda t)\cos(\mu t)\,dt = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$ et $\int_n^{2n}\cos(\lambda t)\sin(\mu t)\,dt = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$ si $\mu\neq\lambda \Rightarrow \int_n^{2n}\left|\sum_{l=1}^{L}\left[\alpha_{j_l,k_+}\cos(b_{j_l}t) + \beta_{j_l,k_+}\sin(b_{j_l}t)\right]\right|^2 dt$ $= \frac{n}{2}\sum_{l=1}^{L}\left[\alpha_{j_l,k_+}^2(1+\delta_{b_{j_l},0}) + \beta_{j_l,k_+}^2\right] + \underset{n\to+\infty}{O}(1) \Rightarrow \sum_{l=1}^{L}\left[\alpha_{j_l,k_+}^2(1+\delta_{b_{j_l},0}) + \beta_{j_l,k_+}^2\right] = 0$; comme $\forall 1\le l\le L$, $\alpha_{j_l,k_+}\neq 0$ ou $\beta_{j_l,k_+}\neq 0$, ceci est absurde ! $\Rightarrow a_+\le 0$.

(iv) Par la même preuve lorsque $t\to-\infty$, $a_- = \min\{a_j,\ 1\le j\le r$ t.q. $\exists\, 0\le k\le d_j$ t.q. $\alpha_{j,k}\neq 0$ ou $\beta_{j,k}\neq 0\}\ge 0 \Rightarrow \forall 1\le j\le r$, $a_j = 0$ ou $\forall 0\le k\le d_j$, $\alpha_{j,k} = \beta_{j,k} = 0 \Rightarrow$ La fonction u s'écrit sous la forme : $\forall t\in\mathbb{R}$, $u(t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{d_m} t^k(\alpha_{m,k}\cos(b_m t) + \beta_{m,k}\sin(b_m t))$; si $k_+ = \max\{k$ t.q. $\exists\, 1\le m\le M$ t.q. $\alpha_{m,k}\neq 0$ ou

$\beta_{m,k} \neq 0\} > 0$, alors, $\frac{u(t)}{t^{k_+}} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, et si $k < k_+$, alors, $\frac{t^k}{t^{k_+}}(\alpha_{m,k}$ $\cos(b_m t) + \beta_{m,k}\sin(b_m t)) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$, donc si $m_1, \dots, m_L$ sont les entiers $1 \leq m \leq N$ tels que $\alpha_{m,k_+} \neq 0$ ou $\beta_{m,k_+} \neq 0$, alors $\sum_{\ell=1}^{L}[\alpha_{m_\ell,k_+}\cos(b_{m_\ell}t) + \beta_{m_\ell,k_+}\sin(b_{m_\ell}t)] = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \Rightarrow \int_n^{2n} dt \left|\sum_{\ell=1}^{L}(\alpha_{m_\ell,k_+}\cos(b_{m_\ell}t) + \beta_{m_\ell,k_+}\sin(b_{m_\ell}t))\right|^2 = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$, ce qui est absurde par le même argument que pour établir que $a_+ \leq 0$ et $a_- \geq 0 \Rightarrow$ La fonction u s'écrit sous la forme : $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \sum_{m=1}^{N}[\alpha_{m,0}\cos(b_m t) + \beta_{m,0}\sin(b_m t)] \Rightarrow u$ est bornée.

VI 1.(i) Par le théorème de dépendance différentiable, les applications $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^2([-T,T],\mathbb{R})$ pour tout nombre $T>0$; si nous développons x_ε sous la forme $x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^2)$, alors $x''_\varepsilon(t) = x''_0(t) + \varepsilon x''_1(t) + \varepsilon^2 x''_2(t) + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^2) \Rightarrow 0 = x''_\varepsilon(t) + (1+\varepsilon t)x_\varepsilon(t) = x''_0(t) + x_0(t) + \varepsilon(x''_1(t) + x_1(t) + t x_0(t)) + \varepsilon^2(x''_2(t) + x_2(t) + t x_1(t)) + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^2) \Rightarrow x''_0(t) + x_0(t) = 0$, $x''_1(t) + x_1(t) = -t x_0(t)$ et $x''_2(t) + x_2(t) = -t x_1(t)$; de plus, $x_0(0) = x_1(0) = x_2(0) = 0$, et $x'_0(0) = 1$, $x'_1(0) = 0$ et $x'_2(0) = 0$.

(ii) Comme les fonctions cos et sin sont deux solutions indépendantes de l'équation $x''+x=0$, la résolvante associée à cette équation vaut : $R(t,s) = \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}$; sachant que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_0(t) = \sin(t)$, par le théorème de variation de la constante, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = -\int_0^t s\sin(t-s)\sin(s)\,ds = -\frac{1}{2}\int_0^t s(\cos(t-2s) - \cos(t))\,ds = -\frac{t}{4}[\sin(t) - t\cos(t)]$ $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $x_2(t) = \frac{1}{4}\int_0^t \sin(t-s)\,s^2(\sin(s) - s\cos(s))\,ds = \cos(t)\left[-\frac{5}{48}t^3 + \frac{5}{32}t\right] + \sin(t)\left[-\frac{t^4}{32} + \frac{5}{32}t^2 - \frac{5}{32}\right]$, d'où le développement : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_\varepsilon(t) = \sin(t) - \frac{\varepsilon}{4}t[\sin(t) - t\cos(t)] + \varepsilon^2\left\{\cos(t)\left[-\frac{5}{48}t^3 + \frac{5}{32}t\right] + \sin(t)\left[-\frac{t^4}{32} + \frac{5}{32}t^2 - \frac{5}{32}\right]\right\} + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^2)$

2.a. Par le théorème de dépendance différentiable, l'application $(\varepsilon,t) \mapsto x_\varepsilon(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[\times]-2\pi,2\pi[$ avec $x_0(0) = x_0(\pi) = 0$, et $\partial_t x_0(0) = 1 = -\partial_t x_0(\pi)$; par le théorème des fonctions implicites, il existe des nombres $\varepsilon_0 > 0$ et $t_0 > 0$ et deux fonctions $\tau_0 \in \mathcal{C}^2(]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[,\mathbb{R})$ et $\tau_1 \in \mathcal{C}^2(]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[,\mathbb{R})$ telles que : $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$, $\forall t \in]-t_0,t_0[$, $x_\varepsilon(t) = 0 \Leftrightarrow t = \tau_0(\varepsilon)$, et $\forall t \in]-t_0+\pi, t_0+\pi[$, $x_\varepsilon(t) = 0 \Leftrightarrow t = \tau_1(\varepsilon)$; comme $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$, $x_\varepsilon(0) = 0$, $\tau_0(\varepsilon) = 0$; comme sin est continue sur $[t_0, \pi - t_0]$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, \pi - t_0]$, $\sin(t) \geq \delta_0$; sachant que

$\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ est continue de $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ dans $\mathcal{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$ et que $\forall t \in [0,\pi]$, $x_0(t) = \sin(t)$, quitte à réduire ε_0, $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $\forall t \in [t_0, \pi - t_0]$, $x_\varepsilon(t) \geq \frac{\delta_0}{2} \Rightarrow \forall t \in]0, \pi + t_0[$, $x_\varepsilon(t) = 0$ $\Leftrightarrow t = \varphi_1(\varepsilon) \Rightarrow x_\varepsilon$ possède un plus petit zéro T_ε non nul qui est égal à $\varphi_1(\varepsilon)$.

b. D'après la question 2.a, l'application $\varepsilon \mapsto T_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, avec $T_0 = \pi$ $\Rightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $T_\varepsilon = \pi + \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2)$; sachant que $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $x_\varepsilon(T_\varepsilon) = 0$ et que $x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2)$ dans $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, nous savons que :
$x_0(T_\varepsilon) + \varepsilon x_1(T_\varepsilon) + \varepsilon^2 x_2(T_\varepsilon) = \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2)$; comme $x_0(T_\varepsilon) = \sin(\pi + \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2)) = -\alpha\varepsilon - \beta\varepsilon^2 + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2)$, $x_1(T_\varepsilon) = -\frac{T_\varepsilon}{4}[\sin(T_\varepsilon) - T_\varepsilon \cos(T_\varepsilon)] = -\frac{\pi^2}{4} - \frac{\alpha\pi}{4}\varepsilon + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon)$ et $x_2(T_\varepsilon) = \frac{5}{48}\pi^3 - \frac{5}{32}\pi + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(1)$, $\left(\alpha - \frac{\pi^2}{4}\right)\varepsilon + \left(\beta - \frac{\alpha\pi}{4} + \frac{5}{48}\pi^3 - \frac{5}{32}\pi\right)\varepsilon^2 = \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2) \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi^2}{4}$ et $\beta = \frac{\pi^3}{6} + \frac{5}{32}\pi$, d'où le développement : $T_\varepsilon = \pi + \frac{\pi^2}{4}\varepsilon + \left(\frac{5}{32}\pi + \frac{\pi^3}{6}\right)\varepsilon^2 + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2)$.

III 1. L'application Φ_A est bien définie et N-linéaire sur $(\mathbb{R}^N)^N$; comme $\forall 1 \leq i \neq j \leq N$, $\forall (V_1, \dots, V_N) \in (\mathbb{R}^N)^N$, $\Phi_A(V_1, \dots, V_j, \dots, V_i, \dots, V_N) = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{N} \det(\dots, V_i, \dots, AV_k, \dots, V_j, \dots) - \det(\dots, AV_i, \dots, V_j, \dots) - \det(\dots, V_i, \dots, AV_j, \dots) = -\Phi_A(V_1, \dots, V_i, \dots, V_j, \dots, V_N)$, elle est aussi alternée $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall (V_1, \dots, V_N) \in (\mathbb{R}^N)^N$, $\Phi_A(V_1, \dots, V_N) = \lambda \det(V_1, \dots, V_N)$; si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$, alors, $\det(e_1, \dots, e_N) = 1$ et $\Phi_A(e_1, \dots, e_N) = \sum_{i=1}^{N} a_{ii} = \operatorname{tr}(A) \Rightarrow \lambda = \operatorname{tr}(A) \Rightarrow \forall (V_1, \dots, V_N) \in (\mathbb{R}^N)^N$, $\Phi_A(V_1, \dots, V_N) = \operatorname{tr}(A) \det(V_1, \dots, V_N)$.

2.a. Soit $\forall 1 \leq j \leq N$, $\forall t \in I$, $V_j(t) = \begin{pmatrix} u_j(t) \\ \vdots \\ u_j^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}$; par définition, $\forall t \in I$, $W(t) = \det(V_1(t), \dots, V_N(t))$; comme les solutions $u_1, \dots, u_N$ sont de classe $\mathcal{C}^N$ sur I, les fonctions $V_1, \dots, V_N$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ; sachant que l'application déterminant est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, la fonction W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ; comme l'application déterminant est de plus N-linéaire, $\forall t \in I$, $W'(t) = \sum_{i=1}^{N} \det(V_1(t), \dots, V_i'(t), \dots, V_N(t))$ comme $\forall t \in I$, $V_i'(t) = A(t) V_i(t)$, où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -p_0(t) & \dots & & -p_{N-1}(t) \end{pmatrix}$, $\forall t \in I$, $W'(t) = \Phi_{A(t)}(V_1(t), \dots, V_N(t)) = \operatorname{tr}(A(t)) \det(V_1(t), \dots, V_N(t)) = -p_{N-1}(t) W(t) \Rightarrow \forall (t_0, t) \in I$, $W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} p_{N-1}(s) ds}$.

b. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle et $t_0 \in I$; par le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'application $\Phi_{t_0} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^N$, $u \mapsto U(t_0) = \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \vdots \\ u^{(N-1)}(t_0) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme ;

en particulier, $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension finie N ; les solutions $u_1, \dots, u_N$ sont donc linéairement indépendantes ssi elles forment une base de $\mathcal{S}$ ssi $(\Phi_{t_0}(u_1), \dots, \Phi_{t_0}(u_N))$ est une base de $\mathbb{R}^N$ ssi $W(t_0) = \det(\Phi_{t_0}(u_1), \dots, \Phi_{t_0}(u_N)) \neq 0$.

3. Soit $\forall t \in I$, $P(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_1'(t) \dots & u_1^{(N-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N(t) & u_N'(t) \dots & u_N^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}$; comme les fonctions $u_1, \dots, u_N$ sont de classe $\mathcal{C}^N$ sur I, l'application P est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ; de plus, $\forall t \in I$, $\det(P(t)) = W(t) \neq 0 \Rightarrow P(t) \in \mathcal{G}\ell_N(\mathbb{R})$, et par la formule de la comatrice, l'application $t \mapsto P(t)^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ; soit alors $\forall t \in I$, $\begin{pmatrix} p_0(t) \\ \vdots \\ p_{N-1}(t) \end{pmatrix} = -P(t)^{-1} \begin{pmatrix} u_1^{(N)}(t) \\ \vdots \\ u_N^{(N)}(t) \end{pmatrix}$

par produit, les fonctions $p_0, \dots,$ et p_{N-1} sont bien définies et continues sur I, avec : $\forall t \in I$, $\begin{pmatrix} u_1^{(N)}(t) \\ \vdots \\ u_N^{(N)}(t) \end{pmatrix} = -P(t) \begin{pmatrix} p_0(t) \\ \vdots \\ p_{N-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_0(t)u_1(t) - \dots - p_{N-1}(t)u_1^{(N-1)}(t) \\ \dots \\ -p_0(t)u_N(t) - \dots - p_{N-1}(t)u_N^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ les fonctions $u_1, \dots, u_N$ sont solutions d'une même équation différentielle linéaire de degré N.

IX 1. Soit $\forall 1 \leq i \leq N$, $\forall t \in I$, $F_i(t) = \begin{pmatrix} f_i(t) \\ \vdots \\ f_i^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}$; les fonctions $F_1, \dots,$ et F_N sont bien définies et continues sur I, et satisfont : $\forall t \in I$, $W(f_1, \dots, f_N)(t) = \det(F_1(t), \dots, F_N(t))$; comme $\forall t \in I$, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(t)$, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i F_i(t) = 0$; sachant que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont non tous nuls, la famille $(F_1(t), \dots, F_N(t))$ est liée $\Rightarrow W(f_1, \dots, f_N)(t) = 0$.

2. Soit $\forall t \in I$, $P(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \dots & f_{N-1}(t) \\ \vdots & \vdots \\ f_1^{(N-2)}(t) \dots & f_{N-1}^{(N-2)}(t) \end{pmatrix}$; comme $\forall t \in I$, $\det(P(t)) = W(f_1, \dots f_{N-1})(t) \neq 0$, $P(t) \in \mathcal{G}\ell_{N-1}(\mathbb{R})$; sachant que les fonctions $f_1, \dots, f_{N-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^{N-1}$ sur I, l'application P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et par la formule de la comatrice, l'application $t \mapsto P^{-1}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ; soit alors $\forall t \in I$, $\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}(t) \end{pmatrix} = P^{-1}(t) \begin{pmatrix} f_N(t) \\ \vdots \\ f_N^{(N-2)}(t) \end{pmatrix}$; par produit, les fonctions $\lambda_1, \dots,$ et λ_{N-1} sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et elles satisfont : $\forall 1 \leq j \leq N-2$, $\forall t \in I$, $\lambda_1(t) f_1^{(j)}(t) + \dots + \lambda_{N-1}(t) f_{N-1}^{(j)}(t) = f_N^{(j)}(t)$; en dérivant cette expression pour $1 \leq j \leq N-3$, nous obtenons $\lambda_1'(t) f_1^{(j)}(t) + \dots + \lambda_{N-1}'(t) f_{N-1}^{(j)}(t) = f_N^{(j+1)}(t) - \lambda_1(t) f_1^{(j+1)}(t) \dots = 0$; en particulier, nous arrivons à

$\forall t\in I,\ W(f_1,\dots,f_n)(t)=\det\begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & \lambda_1(t)f_1(t)+\dots+\lambda_{n-1}(t)f_{n-1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & \lambda_1(t)f_1^{(n-1)}(t)+\dots+\lambda_{n-1}f_{n-1}(t)+\lambda_1'(t)f_1^{(n-2)}(t)+\dots+\lambda_{n-1}'(t)f_{n-1}^{(n-2)}(t)\end{pmatrix}$

$=W(f_1,\dots,f_{n-1})(t)\left(\lambda_1'(t)f_1^{(n-2)}(t)+\dots+\lambda_{n-1}'f_{n-1}^{(n-2)}(t)\right)\Rightarrow \lambda_1'(t)f_1^{(n-2)}(t)+\dots+\lambda_{n-1}'f_{n-1}^{(n-2)}(t)=0$

$\Rightarrow P(t)\begin{pmatrix}\lambda_1'(t)\\ \vdots \\ \lambda_{n-1}'(t)\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \forall t\in I,\ \lambda_1'(t)=\dots=\lambda_{n-1}'(t)=0\Rightarrow \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$ t.q.

$\forall t\in I,\ \lambda_1 f_1(t)+\dots+\lambda_{n-1}f_{n-1}(t)=f_n(t)$.

3. Soit $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_1(t)=t^2$ et $f_2(t)=t^2$ si $t\geq 0$, 0 sinon; f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall t\in\mathbb{R}$, $W(f_1,f_2)(t)=0$, tandis que $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_1(t)\neq 0$ si $t\neq 0$, 0 sinon; par contre, il n'existe aucun nombre $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que: $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_2(t)=\lambda f_1(t)\Rightarrow$ Il n'est pas possible de s'affranchir de la condition : $\forall t\in I$, $W(f_1,\dots,f_{n-1})(t)\neq 0$.

II 1.a. Comme l'application $\ell_k : A\mapsto A^k$ est polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec: $\forall (A,H)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $d\ell_k(A)(H)=\sum_{i=0}^{k-1}A^iHA^{k-1-i}$; par composition, l'application $\mathcal{A}_k : t\mapsto A(t)^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec: $\forall t\in I$, $\mathcal{A}_k'(t)=d\ell_k(A(t))(A'(t))=\sum_{i=0}^{k-1}A(t)^iA'(t)A(t)^{k-1-i}$

b. Soit $[a,b]$ un segment inclus dans I; comme A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, il existe $\Pi_0\geq 0$ et $\Pi_1\geq 0$ t.q. $\forall t\in[a,b]$, $\|A(t)\|\leq\Pi_0$ et $\|A'(t)\|\leq\Pi_1\Rightarrow\forall k\in\mathbb{N}$, $\|\mathcal{A}_k(t)\|\leq\|A(t)\|^k\leq\Pi_0^k$ et $\|\mathcal{A}_k'(t)\|\leq\sum_{i=0}^{k-1}\|A(t)\|^i\|A'(t)\|\|A(t)\|^{k-1-i}\leq k\Pi_0^{k-1}\Pi_1\Rightarrow$ les séries $\sum_{k\geq 0}\frac{\mathcal{A}_k(t)}{k!}$ et $\sum_{k\geq 0}\frac{\mathcal{A}_k'(t)}{k!}$ convergent normalement sur $[a,b]$; comme toutes les fonctions $\mathcal{A}_k$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, la somme définie par: $\forall t\in[a,b]$, $S(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathcal{A}_k(t)}{k!}=e^{A(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec : $\forall t\in[a,b]$, $S'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}A(t)^iA'(t)A(t)^{k-1-i}$; comme $[a,b]$ est quelconque dans I, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et la formule précédente de $S'(t)$ s'étend à $t\in I$.

2. Soit $\forall t\in I$, $\mathcal{A}(t)=\int_{t_0}^{t}A(s)\,ds$; comme A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $\mathcal{A}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec : $\forall t\in I$, $\mathcal{A}'(t)=A(t)$; par la question 1.b, l'application $\mathcal{Y}: t\mapsto e^{\mathcal{A}(t)}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec : $\forall t\in I$, $\mathcal{Y}'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}\mathcal{A}(t)^iA(t)\mathcal{A}(t)^{k-1-i}$; comme A est commutative, $\forall t\in I$, $\mathcal{A}(t)A(t)=\int_{t_0}^{t}A(s)A(t)\,ds=\int_{t_0}^{t}A(t)A(s)\,ds=A(t)\mathcal{A}(t)$ $\Rightarrow\mathcal{Y}'(t)=A(t)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}k\mathcal{A}(t)^{k-1}=A(t)e^{\mathcal{A}(t)}$; comme $\mathcal{Y}(t_0)=e^0=I_n$, la définition de la résolvante assure que: $\forall t\in I$, $\mathcal{Y}(t)=R(t,t_0)\Rightarrow R(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(s)ds}$.

3.(i) Comme $\forall(s,t)\in I^2$, $A(s)A(t)=\begin{pmatrix}a(s)a(t)-b(s)b(t) & -a(s)b(t)-a(t)b(s)\\ a(t)b(s)+a(s)b(t) & a(s)a(t)-b(s)b(t)\end{pmatrix}=A(t)A(s)$, et que l'application A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, d'après la question 2, $\forall (t,t_0)\in\mathbb{R}^2$, $R(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(s)ds}$; soit alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $\alpha(t)=\int_{t_0}^{t}a(s)ds$ et $\beta(t)=\int_{t_0}^{t}b(s)ds$; $\forall t\in\mathbb{R}$, $\int_{t_0}^{t}A(s)ds$ $=\begin{pmatrix}\alpha(t) & -\beta(t)\\ \beta(t) & \alpha(t)\end{pmatrix} = \alpha(t)I_2+\beta(t)J$, où $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow R(t,t_0)=e^{\alpha(t)I_2+\beta(t)J}$ $=e^{\alpha(t)}e^{\beta(t)J}$; comme $\forall k\in\mathbb{N}$, $(\beta(t)J)^{4k}=\beta(t)^{4k}I_2$, $(\beta(t)J)^{4k+1}=(\beta(t))^{4k+1}J$, $(\beta(t)J)^{4k+2}=-(\beta(t))^{4k+2}I_2$ et $(\beta(t)J)^{4k+3}=-(\beta(t))^{4k+3}J$, $e^{\beta(t)J}=\begin{pmatrix}\cos(\beta(t)) & -\sin(\beta(t))\\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t))\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \forall (t,t_0)\in I^2$, $R(t,t_0)=\begin{pmatrix}e^{\alpha(t)}\cos(\beta(t)) & -e^{\alpha(t)}\sin(\beta(t))\\ e^{\alpha(t)}\sin(\beta(t)) & e^{\alpha(t)}\cos(\beta(t))\end{pmatrix}$.

(ii) Comme $\forall s,t>0$, $A(s)A(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{st} & \frac{t}{s}+s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\frac{1}{st} & \frac{s}{t}+t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(t)A(s)$, nous ne pouvons utiliser directement la question 2 ; considérons la solution $X\in\mathcal{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy $X(t_0)=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall t>0$, $X'(t)=A(t)X(t)$; les composantes x et y de la solution X satisfont : $\forall t>0$, $x'(t)=\frac{x(t)}{t}+ty(t)$ et $y'(t)=y(t)\Rightarrow y(t)=y_0e^{t-t_0}$ et $\left(\frac{x(t)}{t}\right)'=\frac{1}{t}\left(x'(t)-\frac{x(t)}{t}\right)=y(t)\Rightarrow\frac{x(t)}{t}=\frac{x_0}{t_0}$ $+y_0(e^{t-t_0}-1)\Rightarrow x(t)=\frac{x_0t}{t_0}+y_0t(e^{(t-t_0)}-1)$, d'où la formule : $\forall (t_0,t)$ $\in\,]0,+\infty[^2$, $R(t,t_0)=\begin{pmatrix}\frac{t}{t_0} & t(e^{t-t_0}-1)\\ 0 & e^{t-t_0}\end{pmatrix}$; soit $\forall(t_0,t)\in\,]0,+\infty[^2$, $\mathcal{A}(t)=\int_{t_0}^{t}A(s)ds$ $=\begin{pmatrix}\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) & \frac{t^2-t_0^2}{2}\\ 0 & e^{t-t_0}\end{pmatrix}$; si $P(t)=\begin{pmatrix}1 & -\frac{t^2-t_0^2}{2(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)-t+t_0)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, alors $\mathcal{A}(t)=P(t)\begin{pmatrix}\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) & 0\\ 0 & e^{t-t_0}\end{pmatrix}P(t)^{-1}\Rightarrow e^{\mathcal{A}(t)}=P(t)\begin{pmatrix}\frac{t}{t_0} & 0\\ 0 & e^{t-t_0}\end{pmatrix}P(t)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{t}{t_0} & \frac{t}{t_0}\left(1-\frac{(t^2-t_0^2)^2}{4(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)-t+t_0)^2}\right)\\ 0 & e^{t-t_0}\end{pmatrix}$ $\neq R(t,t_0)\Rightarrow$ la formule de la question 2 n'est plus vraie.

XI $\Rightarrow$ Soit $\forall A\in GL_n(\mathbb{R})$, $Inv(A)=A^{-1}$; lorsque $\|A^{-1}\|\,\|H\|<1$, $(A+H)^{-1}=(I_n+A^{-1}H)^{-1}$ $A^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^nA^{-1}=A^{-1}-A^{-1}HA^{-1}+\underset{H\to 0}{O}(\|H\|^2)\Rightarrow Inv$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $GL_n(\mathbb{R})$ et : $\forall(A,H)\in GL_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $dInv(A)(H)=-A^{-1}HA^{-1}$; soit (s,t) $\in\mathbb{R}^2$; $R(s,t)\in GL_n(\mathbb{R})$ t.q. $R(s,t)^{-1}=R(t,s)\Rightarrow\forall t\in\mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}(R(s,t))=\frac{d}{dt}($ $R(t,s)^{-1}$ $=-R(t,s)^{-1}A(t)R(t,s)R(t,s)^{-1}=-R(s,t)A(t)$; lorsque les résolvantes $R(t,s)$ sont des isométries, $\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2$, $R(s,t)={}^tR(t,s)\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}-R(s,t)A(t)={}^tR$ (t,s)

${}^tA(t) \Rightarrow {}^tA(t) = -A(t) \Rightarrow$ les matrices $A(t)$ sont antisymétriques.

$\Leftarrow$ $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{d}{dt}\left({}^tR(t,s)\, R(t,s)\right) = {}^tR(t,s)\left({}^tA(t) + A(t)\right) R(t,s) = 0$; comme $R(s,s) = I_N$

$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, ${}^tR(t,s)\, R(t,s) = I_N \Rightarrow R(t,s)^{-1} = {}^tR(t,s) \Rightarrow R(t,s)$ est une isométrie.

XII 1. Posons : $\forall t \in [0,1]$, $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$; le problème de Dirichlet équivaut à : $\forall t \in [0,1]$, $U'(t) =$ $A(t)\, U(t) + E(t)$, où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +p(t) & 0 \end{pmatrix}$ et $E(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix}$, mais aux données au bord $U_1(0) = U_1(1) = 0$, qui ne sont pas les données initiales requises par le théorème de Cauchy-Lipschitz ; ce théorème ne s'applique donc pas directement au problème de Dirichlet.

2.(i) Posons : $\forall t \in [0,1]$, $V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$; le problème considéré équivaut au problème de Cauchy $V(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall t \in [0,1]$, $V'(t) = A(t)\, V(t)$; comme la fonction A est continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le théorème de Cauchy-Lipschitz donne que ce problème admet une unique solution $v \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

(ii) Posons : $\forall t \in [0,1]$, $W(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$; le problème considéré équivaut au problème de Cauchy $W(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall t \in [0,1]$, $W'(t) = A(t)\, W(t) + E(t)$; comme les fonctions A et E sont continues sur $[0,1]$, le théorème de Cauchy-Lipschitz donne que ce problème admet une unique solution $w \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

3. $\Rightarrow$ Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ une solution du problème de Dirichlet et $\lambda = u'(0)$; la fonction $u - \lambda v - w$ satisfait $\forall t \in [0,1]$, $-(u - \lambda v - w)''(t) + p(t)(u - \lambda v - w)(t) = 0$, et $(u - \lambda v - w)(0) = (u - \lambda v - w)'(0) = 0$; par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $u = \lambda v + w$; de plus, $u(1) = 0 \Rightarrow w(1) = -\lambda v(1)$.

$\Leftarrow$ Par définition, $u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, avec $u(0) = w(0) + \lambda v(0) = 0$ et $u(1) = w(1) + \lambda v(1) = 0$, ainsi que : $\forall t \in [0,1]$, $-u''(t) + p(t)\, u(t) = -w''(t) + p(t)\, w(t) = f(t)$.

4. Supposons que le problème de Dirichlet possède deux solutions u et $\tilde{u}$; la fonction $y = \tilde{u} - u$ satisfait $y(0) = y(1) = 0$ et $\forall t \in [0,1]$, $-y''(t) + p(t)\, y(t) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \tilde{u} = u$, d'où l'uni-

cité si existence ; supposons que $v(1)=0$; la solution v satisfait alors $v(0)=v(1)=0$ et $\forall t\in[0,1]$, $-v''(t)+p(t)v(t)=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow v'(0)=0\neq 1$, ce qui est absurde ! $\Rightarrow v(1)\neq 0$; soit alors $\lambda=-\frac{w(1)}{v(1)}$; la fonction $u=w+\lambda v$ satisfait $u(0)=u(1)=0$, et $\forall t\in[0,1]$, $-u''(t)+p(t)u(t)=f(t)$, d'où l'existence d'une solution.

5. Soit $y\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, une solution du problème homogène ; comme $y(0)=0$, $y'(0)=y'(0)\times 1$ et $\forall t\in[0,1]$, $-y''(t)+p(t)y(t)=0$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz et la linéarité de l'équation, $y(t)=y'(0)v(t) \Rightarrow y'(0)v(1)=0$; soit alors $\mathcal{C}=\{0<t\leq 1$ t.q. $\forall s\in]0,t]$, $v(s)>0$ et $v'(s)>0\}$; comme $v(0)=0$ et $v'(0)=1$, $\mathcal{C}$ est non vide et $T=\sup(\mathcal{C})\in]0,1]$; par définition de T, $\forall t\in]0,T[$, $v(t)>0$ et $v'(t)>0 \Rightarrow v$ est croissante sur $]0,T[\Rightarrow v(T)>0 \Rightarrow \forall t\in]0,T]$, $v''(t)\geq 0$ $\Rightarrow v'(T)>0 \Rightarrow T\in\mathcal{C}$; si $T<1$, alors par continuité, il existe $\varepsilon>0$ tel que $T+\varepsilon\in\mathcal{C}$, ce qui est absurde ! $\Rightarrow T=1 \Rightarrow v(1)>0 \Rightarrow y'(0)=0$; par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $y=0$, et d'après la question 4, le problème de Dirichlet possède une unique solution.

Équations différentielles linéaires périodiques

XIII $\Rightarrow$ Si X est une solution T-périodique, alors : $X(T)=X(0)$; comme $X(T)=R(T,0)X(0)$, $R(T,0)X(0)=X(0) \Rightarrow X(0)$ appartient au sous-espace propre $E_1(R(T,0))$.

$\Leftarrow$ Soit $\forall t\in\mathbb{R}$, $S(t)=R(t+T,0)R(T,0)^{-1}$; comme R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall t\in\mathbb{R}$, $S'(t)=A(t+T)R(t+T,0)R(T,0)^{-1}=A(t)S(t)$; comme $S(0)=R(T,0)R(T,0)^{-1}=I_n$, par unicité, $\forall t\in\mathbb{R}$, $S(t)=R(t,0) \Rightarrow R(t+T,0)=R(t,0)R(T,0)$; si $X(0)$ appartient au sous-espace propre $E_1(R(T,0))$, alors : $R(T,0)X(0)=X(0) \Rightarrow \forall t\in\mathbb{R}$, $X(t+T)=R(t+T,0)X(0)=R(t,0)R(T,0)X(0)=X(t) \Rightarrow X$ est T-périodique.

XIV 1. Posons : $\forall t\in\mathbb{R}$, $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t)\end{pmatrix}$; l'équation différentielle considérée équivaut au système différentiel : $\forall t\in\mathbb{R}$, $X'(t)=A_\gamma(t)X(t)$, où : $\forall t\in\mathbb{R}$, $A_\gamma(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -\gamma\end{pmatrix}$; comme les applications A_γ sont dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, le théorème de Liouville assure que $\det(R_\gamma(T,0)) = e^{\int_0^T \mathrm{tr}(A(s))ds} = e^{-\gamma T} < 1$ si $\gamma > 0$.

2. D'après la question 1., $\det(R_0(T,0)) = 1$; comme $R_0(T,0)$ est elliptique, nous savons aussi que $|\mathrm{tr}(R_0(T,0))| < 2 \Rightarrow \Delta_0(T,0) = \mathrm{tr}(R_0(T,0))^2 - 4\det(R_0(T,0)) < 0$; comme l'application $\mathcal{A} : (\gamma, t) \mapsto \mathcal{A}(\gamma, t) = A_\gamma(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par le théorème de dépendance différentiable, l'application $\gamma \mapsto R_\gamma(T,0)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; par continuité de la trace et du déterminant, $\mathrm{tr}(R_\gamma(T,0)) \underset{\gamma \to 0}{\to} \mathrm{tr}(R_0(T,0))$ et $\det(R_\gamma(T,0)) \underset{\gamma \to 0}{\to} \det(R_0(T,0))$; considérons alors les polynômes caractéristiques χ_γ des résolvantes $R_\gamma(T,0)$; par définition, $\chi_\gamma = X^2 - \mathrm{tr}(R_\gamma(T,0))X + \det(R_\gamma(T,0))$; comme $\Delta_\gamma(T,0) = \mathrm{tr}(R_\gamma(T,0))^2 - 4\det(R_\gamma(T,0)) \underset{\gamma \to 0}{\to} \Delta_0(T,0) < 0$, il existe $\gamma_0 > 0$ t.q. $\forall\, 0 \leq \gamma \leq \gamma_0$, $\Delta_\gamma(T,0) < 0 \Rightarrow R_\gamma(T,0)$ possède deux ~~valeurs propres~~ complexes conjuguées $\lambda_\gamma(T,0)$ et $\overline{\lambda_\gamma(T,0)}$; sachant que $|\lambda_\gamma(T,0)|^2 = \lambda_\gamma(T,0)\overline{\lambda_\gamma(T,0)} = \det(R_\gamma(T,0)) < 1$, $|\lambda_\gamma(T,0)| < 1 \Rightarrow 0$ est asymptotiquement stable pour $0 < \gamma < \gamma_0$, ce qui équivaut à la propriété que l'équation différentielle considérée soit asymptotiquement stable pour $0 < \gamma < \gamma_0$.

XI 1. Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$; l'équation différentielle considérée équivaut au système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A(t)X(t)$, où : $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$; comme l'application A appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, le théorème de Liouville assure que : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\det(R(t,s)) = e^{\int_s^t \mathrm{tr}(A(u))du} = 1 \Rightarrow R(t,s) \in S\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

2.(i) Dans ce cas, $\forall t \in \mathbb{R}$, $A_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \varepsilon\cos(2\pi t) & 0 \end{pmatrix}$, et A_ε est une application 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; soit $R_\varepsilon(t,s)$ la résolvante du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A_\varepsilon(t)X(t)$; pour $\varepsilon = 0$, A_ε est l'application constante égale à la matrice $B_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $R_0(t,s) = e^{(t-s)B_\omega} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow R_0(1,0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \frac{\sin(\omega)}{\omega} \\ -\omega\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{tr}(R_0(1,0)) = 2\cos(\omega) \in]-2,2[$, puisque $0 < \omega < \pi$.

(ii) Comme l'application $\mathcal{A} : (\varepsilon, t) \mapsto \mathcal{A}(\varepsilon, t) = A_\varepsilon(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

par le théorème de dépendance différentiable, l'application $\varepsilon \mapsto R_\varepsilon(1,0)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; par continuité de la trace, $\mathrm{tr}(R_\varepsilon(1,0)) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{tr}(R_0(1,0)) \Rightarrow$ il existe un nombre $\varepsilon_\omega > 0$ tel que $\forall\, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\omega$, $|\mathrm{tr}(R_\varepsilon(1,0))| < 2$; d'après la question 1., $\forall\, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\omega$, $\det(R_\varepsilon(1,0)) = 1$, donc le discriminant du polynôme caractéristique de $R_\varepsilon(1,0)$ est strictement négatif $\Rightarrow R_\varepsilon(1,0)$ a deux valeurs propres complexes conjuguées distinctes λ_ε et $\overline{\lambda_\varepsilon}$; comme $|\lambda_\varepsilon|^2 = \det(R_\varepsilon(1,0)) = 1$, il existe un nombre $\theta_\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tel que $\lambda_\varepsilon = e^{i\theta_\varepsilon} \Rightarrow$ il existe une matrice $P_\varepsilon \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que :
$R_\varepsilon(1,0) = P_\varepsilon \begin{pmatrix} e^{i\theta_\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\varepsilon} \end{pmatrix} P_\varepsilon^{-1}$; soit alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $S_\varepsilon(t) = P_\varepsilon \begin{pmatrix} e^{it\theta_\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-it\theta_\varepsilon} \end{pmatrix} P_\varepsilon^{-1}$

et $U_\varepsilon(t) = R_\varepsilon(t,0)\, S_\varepsilon(-t)$; les applications S_ε et U_ε sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}$, avec : $U_\varepsilon(t+1) = R_\varepsilon(t+1,0)\, S_\varepsilon(-t-1) = R_\varepsilon(t,0)\, R_\varepsilon(1,0)$ $S_\varepsilon(-1)\, S_\varepsilon(-t) = U_\varepsilon(t)$, car $R_\varepsilon(1,0) = S_\varepsilon(1) = S_\varepsilon(-1)^{-1}$; comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $S_\varepsilon(-t) = S_\varepsilon(t)^{-1}$, $R_\varepsilon(t,0) = U_\varepsilon(t)\, S_\varepsilon(t)$; soit enfin $X_0 \in \mathbb{R}^2$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|S_\varepsilon(t)(X_0)\| \leq \|P_\varepsilon\|$ $\|P_\varepsilon^{-1}\|\, \|X_0\| \Rightarrow \|R_\varepsilon(t,0)(X_0)\| \leq \|U_\varepsilon(t)\|\, \|P_\varepsilon\|\, \|P_\varepsilon^{-1}\|\, \|X_0\|$; sachant que U_ε est continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$, il existe $M_\varepsilon \geq 0$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|U_\varepsilon(t)\| \leq M_\varepsilon \Rightarrow$ $\|R_\varepsilon(t,0)(X_0)\| \leq M_\varepsilon\, \|P_\varepsilon\|\, \|P_\varepsilon^{-1}\|\, \|X_0\| \Rightarrow$ toutes les solutions de l'équation différentielle considérée sont bornées sur $\mathbb{R}$ lorsque $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\omega$.

XVI (i) Pour $\gamma = 0$ et $\varepsilon > 0$, l'équation différentielle considérée $\forall t \in \mathbb{R}$, $x''(t) + (1 + \varepsilon \cos(2t))\, x(t) = 0$ équivaut au système différentiel linéaire $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = (A + \varepsilon B(t))\, X(t)$, où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\cos(2t) & 0 \end{pmatrix}$; la résolvante $R(t,s)$ associée à ce système différentiel satisfait $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{d}{dt}(R_\varepsilon(t,s)) = (A + \varepsilon B(t))\, R_\varepsilon(t,s)$ et $R_\varepsilon(s,s) = I_2$; comme l'application $(\varepsilon, t) \mapsto A + \varepsilon B(t)$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, l'application $\varepsilon \mapsto R_\varepsilon(\cdot, 0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^1([2\pi, 2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \Rightarrow$ il existe des applications $R_0 \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, $R_1 \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et $R_2 \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ telles que : $R_\varepsilon(\cdot, 0) = R_0(\cdot) + \varepsilon R_1(\cdot) + \varepsilon^2 R_2(\cdot)$ $+ \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^2)$ dans $\mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$; en introduisant ce développement dans l'équation différentielle satisfaite par R_ε, nous obtenons : $\forall t \in [-2\pi, 2\pi]$, $R_0'(t) = A R_0(t)$, $R_1'(t) = A R_1(t) + B(t) R_0(t)$ et $R_2'(t) = A R_2(t) + B(t) R_1(t)$; de plus, la condition initiale $R_\varepsilon(0,0)=I_2$ devient $R_0(0)=I_2$, $R_1(0)=0$ et $R_2(0)=0$; par la méthode de variation de la constante, $\forall t\in[-2\pi,2\pi]$, $R_0(t)=e^{tA}$, $R_1(t)=e^{tA}\int_0^t e^{-sA}B(s)e^{sA}ds$ et $R_2(t)=e^{tA}\int_0^t e^{-sA}B(s)e^{sA}\left(\int_0^s e^{-uA}B(u)e^{uA}du\right)ds$; comme $\forall t\in[2\pi,2\pi]$, $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$, $e^{-tA}B(t)e^{tA}=\begin{pmatrix}\sin(t)\cos(t)\cos(2t) & \sin^4(t)\cos(2t)\\ -\cos(t)^2\cos(2t) & -\sin(t)\cos(t)\cos(2t)\end{pmatrix}=\frac{1}{4}$ $\begin{pmatrix}2\sin(4t) & -\cos(4t)+2\cos(2t)-1\\ -\cos(4t)-2\cos(2t)-1 & -2\sin(4t)\end{pmatrix}\Rightarrow\int_0^t e^{-sA}B(s)e^{sA}ds=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1-\cos(4t)}{2} & -\frac{\sin(4t)}{4}+\sin(2t)-t\\ -\frac{\sin(4t)}{4}-\sin(2t)-t & \frac{\cos(4t)-1}{2}\end{pmatrix}$, en particulier, $\mathrm{tr}(R_0(\pi))=\mathrm{tr}(e^{\pi A})=-\mathrm{tr}(I_2)=-2$, et $\mathrm{tr}(R_1(\pi))=\mathrm{tr}\left(e^{\pi A}\int_0^\pi e^{-sA}B(s)e^{sA}ds\right)=0$; par contre, $\mathrm{tr}(R_2(\pi))=\mathrm{tr}\left(e^{\pi A}\int_0^\pi e^{-sA}B(s)e^{sA}\left(\int_0^s e^{-uA}B(u)e^{uA}du\right)ds\right)=-\mathrm{tr}\Big(\int_0^\pi e^{-sA}B(s)e^{sA}\left(\int_0^s e^{-uA}B(u)e^{uA}du\right)ds\Big)=-\frac{1}{16}\int_0^\pi\Big\{2\sin(4s)(1-\cos(4s))+(\cos(4s)-2\cos(2s)+1)\left(\frac{\sin(4s)}{4}+\sin(2s)+s\right)+(\cos(4s)+2\cos(2s)+1)\left(\frac{\sin(4s)}{4}-\sin(2s)+s\right)\Big\}ds=-\frac{\pi^2}{16}$; par continuité de l'application trace, $\mathrm{tr}(R_\varepsilon(\pi,0))=\mathrm{tr}(R_0(\pi))+\varepsilon\,\mathrm{tr}(R_1(\pi))+\varepsilon^2\,\mathrm{tr}(R_2(\pi))+\underset{\varepsilon\to0}{o}(\varepsilon^2)=-2-\frac{\pi^2}{16}\varepsilon^2+\underset{\varepsilon\to0}{o}(\varepsilon^2)$; par le théorème de Liouville, $\det(R_\varepsilon(\pi,0))=e^{\int_0^\pi\mathrm{tr}(A+\varepsilon B(s))ds}=1\Rightarrow$ Le discriminant Δ_ε du polynôme caractéristique de la résolvante $R_\varepsilon(\pi,0)$ satisfait $\Delta_\varepsilon=\left(2+\frac{\pi^2}{16}\varepsilon^2+\underset{\varepsilon\to0}{o}(\varepsilon^2)\right)^2-4=\frac{\pi^2}{4}\varepsilon^2+\underset{\varepsilon\to0}{o}(\varepsilon^2)\Rightarrow$ Il existe $\varepsilon_0>0$ tel que, pour tout $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $R_\varepsilon(\pi,0)$ a deux valeurs propres réelles distinctes λ_ε et μ_ε qui satisfont $\lambda_\varepsilon\mu_\varepsilon=\det(R_\varepsilon(\pi,0))=1$ $\Rightarrow$ L'une de ces valeurs propres a une valeur absolue strictement supérieure à 1 ; comme l'équation différentielle est à coefficients π-périodiques, le point d'équilibre $x_0=0$ est instable pour $\gamma=0$ et $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

(ii) Pour $(\gamma,\varepsilon)\in\mathbb{R}^2$, l'équation différentielle considérée $\forall t\in\mathbb{R}$, $x''(t)+\gamma x'(t)+(1+\varepsilon\cos(2t))x(t)=0$ équivaut au système différentiel linéaire $\forall t\in\mathbb{R}$, $X'(t)=(A+\varepsilon B(t)-\gamma C)X(t)$ où $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ x'(t)\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$; la résolvante $R_{\varepsilon,\gamma}(t,0)$ associée à ce système différentiel satisfait $\forall t\in\mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}\left(R_{\varepsilon,\gamma}(t,0)\right)=(A+\varepsilon B(t)-\gamma C)R_{\varepsilon,\gamma}(t,0)$ et $R_{\varepsilon,\gamma}(0,0)=I_2$; comme l'application $(\varepsilon,\gamma,t)\mapsto A+\varepsilon B(t)-\gamma C$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, l'application $(\varepsilon,\gamma)\mapsto R_{\varepsilon,\gamma}(\cdot,0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{C}^1([-2\pi,2\pi],\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))\Rightarrow$ Il existe des applications $(R_0,R_1,R_2,S_1,S_2,T)\in\mathcal{C}^1([-2\pi,2\pi],\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^6$ telles que : $R_{\varepsilon,\gamma}(\cdot,0)=R_0+\varepsilon R_1+\varepsilon^2R_2+\gamma S_1+\gamma^2S_2+\varepsilon\gamma T+\underset{(\varepsilon,\gamma)\to(0,0)}{o}(\varepsilon^2+\gamma^2)$; lorsque $\gamma=\underset{\varepsilon\to0}{o}(\varepsilon)$, $R_{\varepsilon,\gamma}(\cdot,0)=R_0+\varepsilon R_1+\varepsilon^2R_2+\gamma S_1+\underset{(\varepsilon,\gamma)\to(0,0)}{o}(\varepsilon^2)$ (dans $\mathcal{C}^1([-2\pi,2\pi],\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$) ; à l'aide de l'équation différentielle satisfaite par $R_{\varepsilon,\gamma}$, nous vérifions que : $\forall t\in[-2\pi,2\pi]$, $R_0'(t)=AR_0(t)$,

$R'_1(t) = A R_1(t) + B(t) R_0(t)$, $R'_2(t) = A R_2(t) + B(t) R_1(t)$ et $S'_1(t) = A S_1(t) - C R_0(t)$, avec les conditions initiales, $R_0(0) = I_2$, et $R_1(0) = R_2(0) = S_1(0) = 0$; par la méthode de variation de la constante, $\forall t \in \mathbb{R}$, $S_1(t) = -e^{tA} \int_0^t e^{-sA} C e^{sA} \, ds$; comme $e^{sA} = \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$, $e^{-sA} C e^{sA} = \begin{pmatrix} \sin^2(s) & -\sin(s)\cos(s) \\ -\sin(s)\cos(s) & \cos^2(s) \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(S_1(\pi)) = -\operatorname{tr}\left(e^{\pi A} \int_0^\pi \ldots ds\right)$ $= \pi$; d'après la question (i), par continuité de la trace, $\operatorname{tr}(R_{\varepsilon,\gamma}(\pi, 0)) = -2 + \gamma\pi - \frac{\pi^2}{16} \varepsilon^2 \underset{\varepsilon \to 0}{+ o}(\varepsilon^2)$; par le théorème de Liouville, $\det(R_{\varepsilon,\gamma}(\pi, 0)) = e^{\int_0^\pi \operatorname{tr}(A + \varepsilon B(s) - \gamma C)\, ds} = e^{-\gamma\pi}$ $= 1 - \gamma\pi \underset{\varepsilon \to 0}{+ o}(\varepsilon^2)$, lorsque $\gamma \underset{\varepsilon \to 0}{=} o(\varepsilon)$; le discriminant $\Delta_{\varepsilon,\gamma}$ du polynôme caractéristique de la résolvante $R_{\varepsilon,\gamma}(\pi, 0)$ satisfait donc : $\Delta_{\varepsilon,\gamma} = \left(-2 + \gamma\pi - \frac{\pi^2}{16} \varepsilon^2 \underset{\varepsilon \to 0}{+ o}(\varepsilon^2)\right)^2 - 4\left(1 - \gamma\pi \underset{\varepsilon \to 0}{+ o}(\varepsilon^2)\right) = \frac{\pi^2}{4} \varepsilon^2 \underset{\varepsilon \to 0}{+ o}(\varepsilon^2) > 0$; comme à la question (i), le point d'équilibre $x_* = 0$ reste instable pour $\varepsilon = o(1)$ et $\gamma = o(\varepsilon)$.