GRAVEJAT Philippe 09/03/22

M1

TD N° 2 : Théorème du point fixe et théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème du point fixe

I Soit $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E ; comme E est un espace de Banach, $\mathcal{L}_c(E)$ (muni de la norme d'opérateurs canonique) est un espace de Banach ; $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\, 0\le r\le k-1$, $\|T^{nk+r}\| \le \|T^k\|^n \|T\|^r$; comme $\|T^k\|<1$, la série $\sum_{n\geq 0} T^{nk+r}$ est absolument convergence, donc convergente $\Rightarrow$ La série $\sum_{m\geq 0} T^m$ est absolument convergente, donc convergente ; soit $S=\sum_{m=0}^{+\infty} T^m$, sa somme : $\forall\, n\geq 0$, $(Id-T)\sum_{m=0}^{n} T^m = \left(\sum_{m=0}^{n} T^m\right)(Id-T) = Id - T^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} Id \Rightarrow (Id-T)S = S(Id-T) = Id \Rightarrow Id-T$ est inversible d'inverse $(Id-T)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} T^m$; de plus, $(Id-T)^{-1} = \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{n\in\mathbb{N}} T^{nk+r} \Rightarrow \|(Id-T)^{-1}\| \le \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T^k\|^n\|T\|^r \le \frac{1}{1-\|T^k\|}\sum_{r=0}^{k-1}\|T\|^r \le \frac{k}{1-\|T^k\|}$ si $\|T\|=1$, $\frac{1-\|T\|^k}{(1-\|T^k\|)(1-\|T\|)}$ sinon.

II (i) Soit $\forall f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\forall\, x\in[0,1]$, $\Phi(f)(x) = 1+\int_0^1 \frac{f(t)\,dt}{100+|x-t|}$; comme l'application $(t,x)\mapsto \frac{f(t)}{100+|x-t|}$ est continue sur $[0,1]^2$, la fonction $\Phi(f)$ est bien définie et continue sur $[0,1] \Rightarrow$ L'application Φ est bien définie de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

(ii) $\forall (f,g)\in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2$, $\forall x\in[0,1]$, $|\Phi(f)(x)-\Phi(g)(x)| \le \int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{100+|x-t|}\,dt \le \frac{1}{100}\|f-g\|_\infty$ $\Rightarrow \|\Phi(f)-\Phi(g)\|_\infty \le \frac{1}{100}\|f-g\|_\infty$; comme $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach, par le théorème du point fixe : $\exists!\, f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $f=\Phi(f) \iff \forall x\in[0,1]$, $f(x) = 1 + \int_0^1 \frac{f(t)\,dt}{100+|t-x|}$.

III 1. Soit $\forall f\in\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\Phi(f)(t) = \frac{1}{100}\left[\sin(2\pi t) - f(t+\sqrt{2})^2 - f(t-\sqrt{2})^2\right]$; comme $\Phi(f)$ est continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$, l'application Φ est bien définie de $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$; soit alors $B=\{f\in\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|f\|_\infty\le 5\}$; comme B est fermé dans $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, B est un espace métrique complet ; $\forall f\in B$, $\|\Phi(f)\|_\infty \le \frac{1}{100}\left[1+2\|f\|_\infty^2\right] \le 5$ $\Rightarrow \Phi$ est une application de B dans B ; $\forall (f,g)\in B^2$, $\|\Phi(f)-\Phi(g)\|_\infty \le \frac{1}{100}\left[2\|f\|_\infty + 2\|g\|_\infty\right] \times \|f-g\|_\infty \le \frac{1}{5}\|f-g\|_\infty$, donc, par le théorème du point fixe, il existe une unique foncbien $f \in B$ telle que $f = \Phi(f) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 200 f(t) = \sin(2\pi t)$

2 (i) Soit $\forall f \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $C(f) = f^2$; l'application C est bien définie ; comme $\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$, $\|C(f) - C(g)\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$, C est continue sur $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$; comme $\forall (f,h) \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$; $C(f+h) = C(f) + 2fh + h^2$, C est différentiable sur $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec : $\forall (f,h) \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$; $dC(f)(h) = 2fh$; sachant que $\|dC(f) - dC(g)\| \leq 2\|f-g\|_\infty$, C est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$; de plus, $\forall f \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall (h_1,h_2) \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $d^2C(f)(h_1,h_2) = 2h_1h_2 \Rightarrow$ La différentielle seconde de C est une application constante, de sorte que toutes les différentielles d'ordre supérieur sont nulles $\Rightarrow$ C est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(ii) Soit $\forall f \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\tau_\pm f = f(\cdot \pm \sqrt{2})$; les applications $\tau_\pm$ sont linéaires continues sur $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$; par composition, les applications $T_\pm$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. Soit $\forall (\lambda,f) \in]-1,1[\times \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi(\lambda,f)(t) = \frac{\lambda \sin(2\pi t)}{200} - \frac{1}{200}\left(f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2\right)$; comme à la question 1, l'application Φ est bien définie de $]-1,1[\times \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$; d'après la question 2, Φ est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[\times \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et comme à la question 1, $\forall \lambda \in]-1,1[$, Φ est bien définie et contractante de B sur B ; enfin, $\forall (\lambda,f) \in]-1,1[\times \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall h \in \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $d_f\Phi(\lambda,f)(h) = -\frac{1}{50}\left[f(\cdot+\sqrt{2})\, h(\cdot+\sqrt{2}) + f(\cdot-\sqrt{2})\, h(\cdot-\sqrt{2})\right] \Rightarrow \|d_f\Phi(\lambda,f)\| \leq \frac{1}{25}\|f\|$, donc si $\|f\| < 10$, alors, $\|d_f\Phi(\lambda,f)\| \leq \frac{2}{5} < 1$; par le théorème du point fixe à paramètres, il existe donc une application $F \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[, \mathcal{C}^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ telle que $\forall \lambda \in]-1,1[$, $\Phi(\lambda, F(\lambda)) = F(\lambda) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ F(\lambda)(t+\sqrt{2})^2 + F(\lambda)(t-\sqrt{2})^2 + 200 F(\lambda)(t) = \lambda \sin(2\pi t)$.

IV 1. Soit $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = T(x) - x$; φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $d\varphi(x) = dT(x) - Id$; comme $1 \notin \sigma(dT(0))$, $dT(0) - Id$ est inversible ; par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de 0 tel que φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$; comme $\varphi(0) = 0$, 0 est l'unique zéro de φ dans U, ce qui équivaut au fait que 0 est l'unique point fixe de T dans U.

2. Soit $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi(\lambda,x) = T(x) - \lambda S(x) - x$; Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, avec $\Phi(0,0) = T(0) - 0 = 0$ et $d\Phi_x(0,0) = dT(0) - Id$; comme $dT(0) - Id$ est inversible, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de $0 \in \mathbb{R}^N$, et un nombre

$\lambda_0 > 0$ tels qu'il existe une fonction $X \in \mathcal{C}^\infty(]-\lambda_0, \lambda_0[, \mathbb{R}^N)$ telle que : $\forall (\lambda, x) \in]-\lambda_0, \lambda_0[\times V$, $\Phi(\lambda, x) = 0 \iff x = X(\lambda)$; cette propriété équivaut au fait que : $\forall \lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, T_λ a un unique point fixe $X(\lambda)$ dans V.

<u>Théorème de Cauchy-Lipschitz</u>

V 1.(i) Soit $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F(t, x) = x^2$. Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy admet une unique solution.

(ii) Soit $\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F(t, y) = |y| + |t|$. Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $|G(t, y_1) - G(t, y_2)| = \big||y_1| - |y_2|\big| \leq |y_1 - y_2|$, le problème de Cauchy admet une unique solution.

(iii) Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $z_1(t) = 0$ et $z_2(t) = 0$ si $t \leq 0$, $\frac{t^2}{4}$ si $t > 0$; les fonctions z_1 et z_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et sont deux solutions différentes du problème de Cauchy, qui n'admet donc pas une unique solution.

2.(i) Soit $\forall t \in]-\infty, 1[$, $x(t) = \frac{1}{1-t}$; x est l'unique solution du problème de Cauchy, qui n'admet donc pas de solution globale sur $\mathbb{R}$.

(ii) Comme $\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|G(t, y)| \leq |y| + |t|$, l'unique solution du problème de Cauchy est globale sur $\mathbb{R}$.

(iii) Les solutions z_1 et z_2 sont globales sur $\mathbb{R}$.

VI Pour $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, le problème de Cauchy considéré équivaut au problème de Cauchy :
$X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ et $X'(t) = F(t, X(t))$ où : $\forall (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $F(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ e^{t^2} - e^t \sin(x_1) x_1^{\frac{1}{x}} \end{pmatrix}$.
Comme $\forall (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $\|F(t, x_1, x_2)\| \leq |x_2| + e^t + e^{t^2} + 2 \leq \|(x_1, x_2)\| + e^{t^2} + e^t + 2$, et comme la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, ce problème de Cauchy admet une unique solution globale sur $\mathbb{R}$.

VII 1.a. La fonction nulle est solution de ce problème de Cauchy.

b. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution $y \in \mathcal{C}^1(]-T_-, T_+[, \mathbb{R})$ non nulle ; dans ce cas, il existe $\tau \in]-T_-, T_+[$, $\tau \neq 0$, tel que $y(\tau) \neq 0$; comme $\forall t \in]-T_-, T_+[$, $y'(t) = f(y(t)) \geq 0$, $y(\tau) > 0$ si $\tau > 0$, et $y(\tau) < 0$ si $\tau < 0$; supposons d'abord que $\tau > 0$ et $y(\tau) > 0$; considérons l'ensemble $I = \{ t \in]0, \tau] \text{ t.q. } \forall s \in [t, \tau], y(s) > 0 \}$; comme $y(\tau) > 0$,

$I \neq \emptyset$; soit $\tau_* = \inf(I)$; $0 \leq \tau_* < \tau$ et $\forall\, \tau_* < t \leq \tau$, $y(t) > 0 \Rightarrow$ $f(y(t)) > 0 \Rightarrow \frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1 \Rightarrow \int_{y(t)}^{y(\tau)} \frac{dx}{f(x)} = \tau - t$; par l'absurde, $y(\tau_*) = 0$, d'où à la limite $t \to \tau_*$, $\int_0^{y(\tau)} \frac{dx}{f(x)} = \tau - \tau_* < +\infty$; par le même argument, si $\tau < 0$, alors, $\int_0^{|y(\tau)|} \frac{dx}{f(x)} < +\infty$; comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nous concluons que : $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = +\infty$.

2.(i) Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_0^x \frac{dy}{f(y)}$; comme $\int_0^1 \frac{dy}{f(y)} < +\infty$, F est bien définie ; par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$ et stricte positivité sur $\mathbb{R}_+^*$, F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec : $\forall x > 0$, $F'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0 \Rightarrow F$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, \ell[$, où $\ell = \lim_{x \to +\infty} F(x)$, et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, \ell[$.

(ii) Soit $\tau \geq 0$ et : $\forall t \in]-\infty, \tau+\ell[$, $x(t) = 0$ si $t \leq \tau$, $F^{-1}(t-\tau)$ si $t > \tau$; x est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, \tau[$ et $]\tau, \tau+\ell[$, avec : $\forall t < \tau$, $x'(t) = 0 = f(|x(t)|)$ et $\forall t > \tau$, $x'(t) = f(F^{-1}(t-\tau)) = f(x(t)) = f(|x(t)|) \Rightarrow$ $x'(t) \xrightarrow[t \to \tau]{} 0 \Rightarrow x$ se prolonge en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall t \in]-\infty, \tau+\ell[$, $x'(t) = f(|x(t)|)$, d'où le fait que le problème de Cauchy a une infinité de solutions.

3.a(i) Dans ce cas : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_0^x \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{3}}$; d'après la question 2, les fonctions x_τ définies pour $\tau \geq 0$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_\tau(t) = 0$ si $t \leq \tau$, $(t-\tau)^3$ si $t > \tau$ sont solutions ; de même, les fonctions x_τ définies pour $\tau < 0$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_\tau(t) = (t-\tau)^3$ si $t < \tau$, 0 si $t \geq \tau$ sont solutions, et la fonction nulle est aussi solution ; enfin, si $\tau_- \leq 0 \leq \tau_+$, alors les fonctions x_{τ_-, τ_+} définies par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_{\tau_-, \tau_+}(t) = (t-\tau_-)^3$ si $t < \tau_-$, 0 si $\tau_- \leq t \leq \tau_+$, et $(t-\tau_+)^3$ si $t > \tau_+$ sont également solutions.

(ii) Supposons ensuite que x est une solution du problème de Cauchy ; comme x est croissante et $x(0) = 0$, $\forall t \leq 0$, $x(t) \leq 0$ et $\forall t \geq 0$, $x(t) \geq 0$; s'il existe $t_+ > 0$ tel que $x(t_+) > 0$, alors comme à la question 2, il existe $0 \leq \tau_+ < t_+$ tel que $x(\tau_+) = 0$ et $\forall t > \tau_+$, $x(t) > 0 \Rightarrow \left((x(t))^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{x'(t)}{3\, x(t)^{\frac{2}{3}}} = 1 \Rightarrow x(t) = (t-\tau_+)^3$; comme x est croissante entre 0 et τ_+, $\forall t \in [0, \tau_+]$, $x(t) = 0$; de même, s'il existe $t_- < 0$ tel que $x(t_-) < 0$, alors, il existe $t_- < \tau_- \leq 0$ tel que : $\forall t \in]-\infty, \tau_-[$, $x(t) = (t-\tau_-)^3$ et $\forall t \in [\tau_-, 0]$, $x(t) = 0$; cet argument suffit à établir que le point (i) catalogue toutes les solutions du problème de Cauchy.

b. Ce sont tous les points de la forme (t_0, y_0), avec $t_0 = y_0 = 0$, $t_0 > 0$ et $0 \leq y_0 \leq t_0^3$, ou $t_0^3 \leq y_0 \leq 0$.

VIII. Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(t+1)$; z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = y'(t+1) = f(y(t+1))$ $= f(z(t))$ et $z(0) = y(1) = y(0)$; comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy $y(0) = y(0)$ et $y'(t) = f(y(t))$ admet une unique solution ; comme y et z sont solutions, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = z(t) = y(t+1) \Rightarrow y$ est 1-périodique.

IX 1. Pour $Y(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{pmatrix}$, le problème de Cauchy considéré équivaut au problème de Cauchy : $Y(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = F(Y(x))$, où $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 - y_1^5 \end{pmatrix}$; comme la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, ce problème de Cauchy admet une unique solution locale φ_a.

2.a. Comme φ_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_a, par composition, φ''_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I_a \Rightarrow$ φ_a est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $I_a \Rightarrow e_a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_a et : $\forall x \in I_a$, $e'_a(x) =$ $\varphi_a(x)\left[\varphi''_a(x) - \varphi_a(x) + \varphi_a(x)^5\right] = 0 \Rightarrow e_a$ est constante sur l'intervalle I_a.

b. Supposons que φ_{a_*} soit une solution globale telle que $\varphi_{a_*}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $\varphi'_{a_*}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$; dans ce cas, $I_{a_*} = \mathbb{R}$, et d'après la question 2.a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e_{a_*}(x) = \frac{a_*^2}{2} - \frac{a_*^6}{6}$; comme $e_{a_*}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, $a_*^2\left(1 - \frac{a_*^4}{3}\right) = 0 \Rightarrow a_* = 0$ ou $a_* = \sqrt[4]{3}$; par le théorème de Cauchy-Lipschitz, la fonction nulle est l'unique solution associée à la condition $a_* = 0$, d'où l'existence d'au plus une solution globale φ_{a_*} (avec $a_* = \sqrt[4]{3}$) non triviale telle que $\varphi_{a_*}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $\varphi'_{a_*}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

c. (i) D'après la question 2.a, $\forall x \in I_{a_*}$, $e_{a_*}(x) = e_{a_*}(0) = \frac{a_*^2}{2}\left(1 - \frac{a_*^4}{3}\right) = 0$; supposons qu'il existe $x \in I_*$ tel que $\varphi_{a_*}(x) = 0$; comme $e_{a_*}(x) = 0$, $\varphi'_{a_*}(x) = 0$, et par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\varphi_{a_*} = 0$, ce qui est absurde ! Comme $\varphi_{a_*}(0) = a_* > 0$, par continuité de φ_{a_*}, $\forall x \in I_{a_*}$, $\varphi_{a_*}(x) > 0$.

(ii) Comme $\varphi''_{a_*}(0) = a_*(1 - a_*^4) = -2a_* < 0$ et $\varphi'_{a_*}(0) = 0$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\, 0 < x < \varepsilon$, $\varphi'_{a_*}(x) < 0$; soit alors $x_* = \sup\{x \in I_* \text{ t.q. } \forall\, 0 < y < x,\ \varphi'_{a_*}(y) < 0\}$; x_* est bien défini et $x_* > 0$; si $x_* \in I_{a_*}$, alors, par l'absurde, $\varphi'_{a_*}(x_*) = 0$ $\Rightarrow 0 = e_{a_*}(x_*) = \frac{\varphi_{a_*}(x_*)^2}{2}\left(1 - \frac{\varphi_{a_*}(x_*)^4}{3}\right)$; comme $\varphi_{a_*}(0) = \sqrt[4]{3}$ et φ_{a_*} est strictement décroissante sur $[0, x_*[$, $\varphi_{a_*}(x_*) = 0$; par le théorème de Cauchy-Lipschitz

$Q_{a_*} = 0$, ce qui est absurde ! $\Rightarrow x_* \notin I_{a_*} \Rightarrow \forall x \in I_{a_*} \cap]0, +\infty[$, $Q'_{a_*}(x) < 0$.

2. Comme $\forall x \in I_{a_*}$, $e_{a_*}(x) = 0$, $Q'_{a_*}(x)^2 = Q_{a_*}(x)^2 - \frac{Q_{a_*}(x)^6}{3}$; comme $Q_{a_*}(0) = \sqrt[4]{3}$, et $\forall x \in I_{a_*} \cap]0, +\infty[$, $Q'_{a_*}(x) < 0$, et $Q_{a_*}(x) > 0$, $\forall x \in I_{a_*} \cap]0, +\infty[$, $0 < Q_{a_*}(x) < \sqrt[4]{3} \Rightarrow Q'_{a_*}(x) = -Q_{a_*}(x)\sqrt{1 - \frac{Q_{a_*}(x)^4}{3}}$; par composition, y est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_{a_*}, avec : $\forall x \in I_{a_*} \cap]0, +\infty[$, $y'(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{Q_{a_*}(x)^3} Q'_{a_*}(x) = \frac{2\sqrt{3}}{Q_{a_*}(x)^2}\sqrt{1 - \frac{Q_{a_*}(x)^4}{3}} = 2\sqrt{y(x)^2 - 1} \Rightarrow \forall x_0 \in]0, x[$, $\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{y^2(t) - 1}}\,dt = 2(x - x_0) = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$; comme l'intégrale $\int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$ est convergente, dans la limite $x_0 \to 0$, $\int_1^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = 2x$; par le changement de variable $y = \mathrm{ch}(t)$, $\int_0^{\mathrm{ch}^{-1}(y(x))} dt = 2x \Rightarrow \mathrm{ch}^{-1}(y(x)) = 2x \Rightarrow y(x) = \mathrm{ch}(2x) \Rightarrow Q_{a_*}(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{ch}(2x)}}$; étendons cette formule à $\mathbb{R}$ et vérifions qu'il s'agit bien de la solution recherchée ; par composition, Q_{a_*} est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $Q_{a_*}(0) = \sqrt[4]{3} = a_*$, et $Q_{a_*}(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q'_{a_*}(x) = -\sqrt[4]{3}\,\frac{\mathrm{sh}(2x)}{\mathrm{ch}(2x)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow Q'_{a_*}(0) = 0$ et $Q'_{a_*}(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$; enfin, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q''_{a_*}(x) = -\frac{2\sqrt[4]{3}}{\mathrm{ch}(2x)^{\frac{1}{2}}} + 3\sqrt[4]{3}\,\frac{\mathrm{sh}(2x)^2}{\mathrm{ch}(2x)^{\frac{5}{2}}} = -2Q_{a_*}(x) + 3Q_{a_*}(x) - Q_{a_*}(x)^5 \Rightarrow Q''_{a_*}(x) - Q_{a_*}(x) + Q_{a_*}(x)^5 = 0$.

3. Soit $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $u(t,x) = e^{it} Q_{a_*}(x)$; u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_t u(t,x) = i e^{it} Q_{a_*}(x)$ et $\partial_{xx} u(t,x) = e^{it} Q''_{a_*}(x) = e^{it}[Q_{a_*}(x) - Q_{a_*}(x)^5] \Rightarrow i\partial_t u(t,x) + \partial_{xx} u(t,x) + u(t,x)|u(t,x)|^4 = e^{it}[-Q_{a_*}(x) + Q_{a_*}(x) - Q_{a_*}(x)^5 + Q_{a_*}(x)^5] = 0$, et u est bien une solution globale périodique en temps de l'équation de Schrödinger non linéaire.