GRAVEJAT Philippe

M1

02/03/22

TD N° 1 : Rappels d'analyse et d'algèbre linéaire

Equations différentielles élémentaires

I 1. (i) $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = x_0 e^{2t}$, où $x_0 \in \mathbb{R}$; (ii) $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = -\frac{1}{2} + y_0 e^{2t}$, où $y_0 \in \mathbb{R}$.

2. (i) $x_0 = 0$; (ii) $y_0 = 0$.

II 1. Si $a < 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \alpha e^{\sqrt{-a}\,t} + \beta e^{-\sqrt{-a}\,t}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; si $a = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \alpha t + \beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; si $a > 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \alpha \cos(\sqrt{a}\,t) + \beta \sin(\sqrt{a}\,t)$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

2. $a > 0$.

III (i) Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $x(t_0) = x_0$; si $x_0 = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 0$; si $x_0 > 0$, alors : $\forall t < t_0 + \frac{1}{x_0}$, $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$; si $x_0 < 0$, alors : $\forall t > t_0 + \frac{1}{x_0}$, $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$.

(ii) Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $y(t_0) = y_0$; $\forall t \in \left] t_0 - \arctan(y_0) - \frac{\pi}{2}, t_0 - \arctan(y_0) + \frac{\pi}{2} \right[$, $y(t) = \tan(\arctan(y_0) + t - t_0)$.

(iii) Soit $(t_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $z(t_0) = z_0$; afin que l'équation ait un sens, il est nécessaire que $-1 \leq z_0 \leq 1$; si $z_0 \neq \pm 1$, alors : $\forall t \leq t_0 - \arcsin(z_0) - \frac{\pi}{2}$, $z(t) = -1$, $\forall t_0 - \arcsin(z_0) - \frac{\pi}{2} \leq t \leq t_0 - \arcsin(z_0) + \frac{\pi}{2}$, $z(t) = \sin(\arcsin(z_0) + t - t_0)$, $\forall t \geq t_0 - \arcsin(z_0) + \frac{\pi}{2}$, $z(t) = 1$; si $z_0 = \overset{(-)}{+}1$, alors, soit il existe $(t_1, z_1) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$ t.q. $z(t_1) = z_1$ et z est une solution de la forme précédente, soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = \overset{(-)}{+}1$.

IV 1.a. Par composition, E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E'(t) = m\, x'(t) . x''(t) + DV(x(t)) . x'(t) = x'(t) . \big(DV(x(t)) - DV(x(t)) \big) = 0 \Rightarrow E(t) = E(0)$.

b. Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $e(t) = \frac{1}{2} x'(t)^2 - \cos(x(t))$; e est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e'(t) = x'(t)\big(x''(t) + \sin(x(t))\big) = 0 \Rightarrow e(t) = e(0) \Rightarrow x'(t)^2 = 2\left[e(0) + \cos(x(t))\right] \Rightarrow |x'(t)| \leq \sqrt{2(e(0) + 1)}$.

2. Par produit, σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sigma'(t) = m\, x''(t) \times x(t) + m\, x'(t) \times x'(t) = f(|x(t)|) \frac{x(t)}{|x(t)|} \times x(t) = 0 \Rightarrow m(t) = m(0)$.

Topologie

V Supposons par l'absurde qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs, donc connexe, $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \mathbb{R} \setminus \{f(0,0)\}$ est connexe, ce qui est absurde ! $\Rightarrow$ Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

VI 1. Comme f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$, il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f([0,1]) = [m,M] \Rightarrow \Gamma \subset [0,1] \times [m,M]$ est borné ; si $(x_n, f(x_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$, alors, par continuité de f, $y = f(x) \Rightarrow$ Γ est fermé, donc compact.

2. Soit $((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))) \in \Gamma^2$ et $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) = (x_1(1-t) + x_2 t, f(x_1(1-t) + x_2 t))$; γ est continue sur $[0,1]$, à valeurs dans Γ, et telle que $\gamma(0) = (x_1, f(x_1))$ et $\gamma(1) = (x_2, f(x_2))$ $\Rightarrow$ Γ est connexe par arcs, donc connexe.

VII 1.a. Supposons par l'absurde que Γ est connexe par arcs et considérons $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], \Gamma)$ telle que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin(1))$; par le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists t_n \in [0,1]$ tel que : $\gamma(t_n) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, 1\right)$; par compacité, $\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ telle que il existe $t_* \in [0,1]$ tel que $t_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_* \Rightarrow \gamma(t_*) = (0,1)$; par le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists s_n \in [t_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n+1)}]$ tel que : $\gamma(s_n) = \left(\frac{1}{\pi + 2\varphi(n)\pi}, \sin(\pi + 2\varphi(n)\pi)\right) = \left(\frac{1}{\pi + 2\varphi(n)\pi}, 0\right)$; comme $t_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_*$, $s_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_*$ $\Rightarrow \gamma(s_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (0,1)$, ce qui est absurde ! $\Rightarrow$ Γ n'est pas connexe par arcs.

b. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma, \{0,1\})$; comme Γ_1 et Γ_2 sont connexes par arcs, f est constante sur Γ_1 et sur Γ_2 ; sachant que $\left(\frac{1}{2\pi n}, \sin(2\pi n)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, $f\left(\frac{1}{2\pi n}, \sin(2\pi n)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(0,0)$, ce qui suffit à établir que les valeurs constantes de f sur Γ_1 et sur Γ_2 sont identiques $\Rightarrow$ f est constante $\Rightarrow$ Γ est connexe.

2. Comme $\forall y \in [0,1]$, $|\sin(y)| \leq 1$, $\Gamma \subset [0,1] \times [-1,1] \Rightarrow \Gamma$ est borné ; soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n, y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (x,y) \in \mathbb{R}^2$; comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n| \leq 1$, $y \in [-1,1]$; si $x = 0$, alors $(x,y) \in \Gamma$; sinon, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$, $x_n > 0 \Rightarrow y_n = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\Rightarrow (x,y) \in \Gamma \Rightarrow \Gamma$ est fermé, donc compact.

VIII 1.a. Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$, posons : $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) = tf$; γ est bien définie de

$[0,1]$ dans $\mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$, avec $\gamma(0)=0$ et $\gamma(1)=f$; comme $\forall (s,t)\in[0,1]^2$, $\|\gamma(s)-\gamma(t)\|_\infty \leq |s-t|\,\|f\|_\infty$, γ est continue $\Rightarrow E$ est étoilé par rapport à 0, donc connexe (par arcs).

b. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E ; $\forall x\in[0,1]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Rightarrow \exists f(x)\in\mathbb{R}$ t.q. $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$; comme $0\leq f_n(x)\leq 1$, $0\leq f(x)\leq 1 \Rightarrow f$ est bien définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$; $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n,p\geq N$, $\forall x\in[0,1]$, $|f_n(x)-f_p(x)|\leq\varepsilon \underset{p\to+\infty}{\Rightarrow} |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \|f_n-f\|_\infty\leq\varepsilon \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, d'où la continuité de f sur $[0,1] \Rightarrow (E, d_\infty)$ est complet.

c. Soit $\forall n\geq 1$, $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=0$ si $0\leq x\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$, $n\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$ si $\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\leq x\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$, et 1 sinon ; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E telle que $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $0\leq x<\frac{1}{2}$, 1 si $\frac{1}{2}<x\leq 1$; s'il existe $\varphi:\mathbb{N}\nearrow\mathbb{N}$ telle qu'il existe $g\in E$ telle que $\|f_{\varphi(n)}-g\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ alors : $\forall x\in[0,\frac{1}{2}[$, $g(x)=0$ et $\forall x\in]\frac{1}{2},1]$, $g(x)=1$, ce qui contredit la continuité de g $\Rightarrow (E, d_\infty)$ n'est pas compact.

2.a. Lorsque f est k-lipschitzienne, elle est continue $\Rightarrow E_k$ est un sous-ensemble de E.

b. Lorsque $f\in E_k$, l'application γ de la question 1a est à valeurs dans $E_k \Rightarrow E_k$ est étoilé par rapport à 0, donc connexe.

c. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E_k ; comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, il existe $f\in E$ telle que $\|f_n-f\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$; comme $\forall (x,y)\in[0,1]^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)-f_n(y)| \leq k|x-y| \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)|\leq k|x-y| \Rightarrow f\in E_k \Rightarrow (E_k, d_\infty)$ est complet.

d. (i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_k ; considérons une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dense dans $[0,1]$; par le procédé diagonal de Cantor, il existe $\varphi:\mathbb{N}\nearrow\mathbb{N}$ telle que $\forall m\in\mathbb{N}$, $\exists f(x_m)\in[0,1]$ tel que $f_{\varphi(n)}(x_m)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_m)$.

(ii) Soit $x\in[0,1]$; par densité, il existe $\theta:\mathbb{N}\nearrow\mathbb{N}$ tel que $x_{\theta(m)}\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} x$; comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}(x_{\theta(m)})-f_{\varphi(n)}(x_{\theta(p)})|\leq k|x_{\theta(m)}-x_{\theta(p)}|$, $|f(x_{\theta(m)})-f(x_{\theta(p)})|\leq k|x_{\theta(m)}-x_{\theta(p)}| \Rightarrow (f(x_{\theta(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Rightarrow \exists f(x)\in[0,1]$ telle que $f(x_{\theta(m)})\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$; de plus, cette limite ne dépend pas du choix de la sous-suite $(x_{\theta(m)})_{m\in\mathbb{N}}$.

(iii) Soit $y\in[0,1]$ et par densité, $\nu:\mathbb{N}\nearrow\mathbb{N}$ telle que $x_{\nu(m)}\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} y$; comme ci-dessus, $\forall m\in\mathbb{N}$, $|f(x_{\theta(m)})-f(x_{\nu(m)})|\leq k|x_{\theta(m)}-x_{\nu(m)}| \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq k|x-y| \Rightarrow f\in E_k$.

(iv) Soit $\varepsilon>0$ fixé ; comme $[0,1]$ est compact, il existe $x_{m_1},\dots,x_{m_I}$ tels que $[0,1]\subset\bigcup_{i=1}^{I}\,]x_{m_i}-\varepsilon, x_{m_i}+\varepsilon[$; si $x\in]x_{m_i}-\varepsilon, x_{m_i}+\varepsilon[$, alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}(x)-f(x)| \leq |f_{\varphi(n)}(x)-f_{\varphi(n)}(x_{m_i})| + |f_{\varphi(n)}(x_{m_i})-f(x_{m_i})| + |f(x_{m_i})-f(x)| \leq 2k\varepsilon + |f_{\varphi(n)}(x_{m_i}$

$- f(x_{m_i})| \Rightarrow \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \le 2k\varepsilon + \max_{1 \le i \le I} |f_{\varphi(n)}(x_{m_i}) - f(x_{m_i})| \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \le (2k+1)\varepsilon \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow (E_k, d_\infty)$ est compact.

Algèbre linéaire

II 1. La multiplication matricielle est associative et possède un élément neutre $I_2 \in GL_2(\mathbb{R})$; si $A \in GL_2(\mathbb{R})$, alors, A possède un inverse A^{-1} qui satisfait $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$; sachant que $AB \in GL_2(\mathbb{R})$ lorsque $(A, B) \in GL_2(\mathbb{R})^2$, $GL_2(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.

2. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^2$; posons $\forall (u, v) \in \mathcal{B}$, $\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$; Φ est bien définie de $\mathcal{B}$ dans $GL_2(\mathbb{R})$; comme les vecteurs colonnes d'une matrice de $GL_2(\mathbb{R})$ forment une base de $\mathbb{R}^2$, elle est surjective ; sachant qu'elle est aussi injective, il s'agit d'une bijection entre $\mathcal{B}$ et $GL_2(\mathbb{R})$.

3. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} I_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{n} I_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \notin GL_2(\mathbb{R})$, $GL_2(\mathbb{R})$ n'est pas fermé ; comme l'application det est polynomiale, elle est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; sachant que $GL_2(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, $GL_2(\mathbb{R})$ est ouvert.

4. (i) Soit $GL_2^{\pm}(\mathbb{R}) = \{M \in GL_2(\mathbb{R})$ t.q. $\det(M) \in \mathbb{R}_\pm\}$; comme $GL_2^{\pm}(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_\pm^*)$, ces deux ensembles sont ouverts ; comme $GL_2(\mathbb{R}) = GL_2^+(\mathbb{R}) \cup GL_2^-(\mathbb{R})$, ils sont aussi fermés dans $GL_2(\mathbb{R}) \Rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ contient au moins deux composantes connexes.

(ii) Soit $M \in GL_2^+(\mathbb{R})$; considérons le polynôme caractéristique $\chi_M(\mu) = \det(M - \mu I_2)$ de M ; χ_M est un polynôme de degré 2, de coefficient dominant égal à 1 et tel que $\chi_M(0) = \det(M) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\forall \mu \in \mathbb{R}_+^*$, $\det(M + \mu\varepsilon I_2) > 0 \Rightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\det(\lambda M + \lambda\mu\varepsilon I_2) > 0 \Rightarrow \forall \theta \in]0, 1[$, $\det(\theta M + (1-\theta)\varepsilon I_2) > 0 \Rightarrow$ il existe un arc continu entre M et εI_2 ; soit alors $\forall \theta \in [0, \pi]$, $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$; l'application $\theta \mapsto M_\theta$ est continue sur $[0, \pi]$ avec $M_0 = I_2$ et $M_\pi = -I_2 \Rightarrow$ il existe un arc continu entre I_2 et $-I_2 \Rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

(iii) Comme l'application $M \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M$ est une bijection de $GL_2^-(\mathbb{R})$ sur $GL_2^+(\mathbb{R})$, $GL_2^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs $\Rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes, $GL_2^-(\mathbb{R})$ et $GL_2^+(\mathbb{R})$.

V 1. $SL_2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $GL_2(\mathbb{R})$ qui contient la matrice I_2 ; si $A \in SL_2(\mathbb{R})$ et $B \in SL_2(\mathbb{R})$, alors : $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = 1 \Rightarrow \det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = 1 \Rightarrow SL_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

2.a. Soit χ_U le polynôme caractéristique de U ; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_U(\lambda) = \lambda^2 - Tr(U)\lambda + 1 \Rightarrow \Delta = Tr(U)^2 - 4 > 0 \Rightarrow \chi_U$ a deux racines réelles distinctes $\Rightarrow U$ est semblable à une matrice diagonale réelle de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

b. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_U(\lambda) = \lambda^2 - Tr(U)\lambda + 1 \Rightarrow \Delta = Tr(U)^2 - 4 < 0 \Rightarrow \chi_U$ a deux racines complexes z et $\bar{z}$ non réelles ; comme $\det(U) = 1$, $z\bar{z} = 1 \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ t.q. $z = e^{i\theta}$; il existe alors un vecteur $V = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ tel que $U(V) = e^{i\theta}V \Rightarrow U(\bar{V}) = e^{-i\theta}\bar{V} \Rightarrow B = (V, \bar{V})$ est une base de $\mathbb{C}^2$ qui diagonalise U (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) ; en particulier, $\det(V, \bar{V}) = 2i(cb - ad) \neq 0$, comme $U(V) = e^{i\theta}V$, $U\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $U\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow U\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$; comme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, U est semblable à la matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

c. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_U(\lambda) = \lambda^2 - Tr(U)\lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{Tr(U)}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{Tr(U)}{2} \in \sigma(U) \Rightarrow \exists e_1 \in \mathbb{R}^2$ t.q. $U(e_1) = \frac{Tr(U)}{2} e_1$; soit alors $e_2 \in \mathbb{R}^2$ tel que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$; dans cette base, la matrice de U s'écrit : $\begin{pmatrix} \frac{Tr(U)}{2} & a \\ & b \end{pmatrix}$; comme $\det(U) = 1$, $b = \frac{Tr(U)}{2} \Rightarrow U$ est semblable à une matrice unipotente de la forme $\pm\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $P \in GL_2(\mathbb{R})$; les applications $\lambda \mapsto P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}P^{-1}$, $\theta \mapsto P\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}P^{-1}$ et $a \mapsto \pm P\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$, $[0, 2\pi]$ et $\mathbb{R}$, et réalisent des arcs continues entre toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ et $\pm I_2$, puis avec seulement $I_2 \Rightarrow SL_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, donc connexe.

VI 1. $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}$.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1} \Rightarrow e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.

3.(i) Supposons que A est diagonalisable ; il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ tels qu'il existe $P \in GL_N(\mathbb{C})$ tel que $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}P^{-1} \Rightarrow e^A = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}P^{-1} \Rightarrow \det(e^A) = \prod_{i=1}^{N} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i} = e^{Tr(A)}$.

(ii) Dans le cas général, A est trigonalisable $\Rightarrow \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ et $P \in GL_N(\mathbb{C})$ tels que $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}P^{-1}$. Il existe alors $A_n = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^n \end{pmatrix}P^{-1}$ telle que $\forall 1 \leq i \leq N$, $\lambda_i^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda_i$ et $\forall 1 \leq j \neq i \leq N$, $\lambda_i^n \neq \lambda_j^n$

Comme les valeurs propres des matrices A_n sont deux à deux distinctes, les matrices A_n sont diagonalisables $\Rightarrow \det(\exp(A_n)) = e^{\mathrm{Tr}(A_n)}$; sachant que $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et que les applications $\det$, $\exp$ et Tr sont continues sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, à la limite $n \to +\infty$, $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

4.(i) $e^A = e^{\lambda I_2 + a\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} = e^{\lambda} e^{a\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}$; sachant que $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e^{a\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} = I_2 + \begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix}e^{\lambda}&ae^{\lambda}\\0&e^{\lambda}\end{pmatrix}$.

(ii) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^{4n} = \begin{pmatrix}w^{4n}&0\\0&w^{4n}\end{pmatrix}$, $B^{4n+1} = \begin{pmatrix}0&-w^{4n+1}\\w^{4n+1}&0\end{pmatrix}$, $B^{4n+2} = \begin{pmatrix}-w^{4n+2}&0\\0&-w^{4n+2}\end{pmatrix}$ et $B^{4n+3} = \begin{pmatrix}0&w^{4n+3}\\-w^{4n+3}&0\end{pmatrix} \Rightarrow e^B = \begin{pmatrix}\cos(w)&-\sin(w)\\\sin(w)&\cos(w)\end{pmatrix}$

(iii) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C^{4n} = \begin{pmatrix}w^{4n}&0\\0&w^{4n}\end{pmatrix}$, $C^{4n+1} = \begin{pmatrix}0&w^{4n}\\-w^{4n+2}&0\end{pmatrix}$, $C^{4n+2} = \begin{pmatrix}-w^{4n+2}&0\\0&-w^{4n+2}\end{pmatrix}$ et $C^{4n+3} = \begin{pmatrix}0&-w^{4n+2}\\w^{4n+4}&0\end{pmatrix} \Rightarrow e^C = \begin{pmatrix}\cos(w)&\frac{\sin(w)}{w}\\-w\sin(w)&\cos(w)\end{pmatrix}$

XII 1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+2) \Rightarrow \sigma(A) = \{0,-2,2\}$ et $E_0(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $E_{-2}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; si $P = \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$, alors $AP = P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$; soit $J = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; $J^2 = 3J$ et $P = J - 2I_3 \Rightarrow P(J - I_3) = J^2 - 3J + 2I_3 = 2I_3 \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}(J - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

d'où : $A = P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = J - 2I_3$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}(J - I_3)$.

2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = P\begin{pmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}P^{-1} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix}e^t \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(2t) & e^{-t}\mathrm{sh}(t)\\ e^t\mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(2t) & -e^{-t}\mathrm{sh}(t)\\ -e^t\mathrm{sh}(t) & -\mathrm{sh}(2t) & e^{-t}\mathrm{ch}(t)\end{pmatrix}$.

3. $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $e^{tA}v = \begin{pmatrix}e^t\mathrm{ch}(t)v_1 + \mathrm{sh}(2t)v_2 + e^{-t}\mathrm{sh}(t)v_3\\ e^t\mathrm{sh}(t)v_1 + \mathrm{ch}(2t)v_2 - e^{-t}\mathrm{sh}(t)v_3\\ -e^t\mathrm{sh}(t)v_1 - \mathrm{sh}(2t)v_2 - e^{-t}\mathrm{ch}(t)v_3\end{pmatrix}$; comme $\mathrm{ch}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{sh}(t)$, si $e^{tA}v \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors : $v_1 + v_2 = 0$; sachant que $e^t\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(2t) \underset{t\to+\infty}{\sim} +\frac{1}{2}$ et $e^{-t}\mathrm{sh}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$, $v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v = (v_1, -v_1, v_1) \in E_{-2}(A)$; réciproquement, si $v \in E_{-2}(A)$, alors : $A(v) = -2v \Rightarrow e^{tA}v = e^{-2t}v \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow E_s = E_{-2}(A)$ est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

4.(i) De même, si $v \in E_u$, alors, $v_1 + v_3 = v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v = v_3(-1,-1,1) \in E_2(A)$, et si $v \in E_2(A)$ alors : $A(v) = 2v \Rightarrow e^{tA}v = e^{2t}v \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow E_u = E_2(A)$ est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Alors $E_c = E_0(A)$; E_c est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\mathbb{R}^3 = E_s \oplus E_c \oplus E_u$, et $\forall v \in E_c$, $A(v) = 0 \Rightarrow e^{tA}v = v \Rightarrow t \mapsto e^{tA}$ est bornée sur E_c.

XIII 1. a. Comme A est diagonalisable, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ et $P \in GL_N(\mathbb{C})$ tels que

$A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\end{pmatrix}P^{-1}$; comme A est inversible, $\forall 1 \le i \le N$, $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \exists \mu_i \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda_i = e^{\mu_i}$; soit alors $B = P\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_N\end{pmatrix}P^{-1} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$; $e^B = P\begin{pmatrix}e^{\mu_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\mu_N}\end{pmatrix}P^{-1} = A$.

b. Sachant que $e^{2i\pi I_N} = e^{2i\pi} I_N = 1$, et $\forall B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, $B(2i\pi I_N) = (2i\pi N)B$, $\forall B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, $e^{B+2i\pi I_N} = e^{2i\pi I_N} e^B = e^B \Rightarrow B$ n'est pas unique.

2.a. Sachant que $\forall k \geq p$, $\mathcal{N}^k = \mathcal{N}^p \mathcal{N}^{k-p} = 0$, la série est une somme finie, donc convergente, et elle vaut : $B = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\mathcal{N}^k}{k} = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{\mathcal{N}^k}{k}$.

b.(i) Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $B(t) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{t^k \mathcal{N}^k}{k}$; B est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $B'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} t^{k-1} \mathcal{N}^k \Rightarrow (I_N + t\mathcal{N}) B'(t) = \mathcal{N} \sum_{k=1}^{p-1} \left((-1)^{k-1} t^{k-1} \mathcal{N}^{k-1} - (-1)^k t^k \mathcal{N}^k\right) = \mathcal{N}$

(ii) Sachant que $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$, $B(t+s)B(t) = B(t)B(t+s)$, $e^{B(t+s)} - e^{B(t)} = \left(e^{B(t+s)-B(t)} - I_N\right) e^{B(t)}$; comme $\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, $e^H - I_N = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}$, si $|||H||| < 1$, alors $|||e^H - I_N - H||| \leq |||H|||^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|||H|||^k}{k!} \leq e\,|||H|||^2 \Rightarrow |||e^{B(t+s)-B(t)} - I_N - B(t+s) + B(t)||| \leq e\,|||B(t+s) - B(t)|||^2 = \underset{s \to 0}{O}(s^2) \Rightarrow \frac{e^{B(t+s)-B(t)} - I_N}{s} \xrightarrow[s \to 0]{} B'(t) \Rightarrow \frac{e^{B(t+s)} - e^{B(t)}}{s} \xrightarrow[s \to 0]{} B'(t) e^{B(t)}$

$\Rightarrow t \mapsto S(t) = e^{B(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $S'(t) = B'(t) S(t)$; par récurrence S est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $(I_N + t\mathcal{N}) B'(t) = \mathcal{N}$, $(I_N + t\mathcal{N}) S'(t) = \mathcal{N} S(t)$ $\Rightarrow S'(0) = \mathcal{N} S(0) = \mathcal{N}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $(I_N + t\mathcal{N}) S''(t) = 0$; sachant que $\sum_{k=0}^{p-1} (-t\mathcal{N})^k (I_N + t\mathcal{N}) = I_N$, la matrice $I_N + t\mathcal{N}$ est inversible $\Rightarrow S''(t) = 0 \Rightarrow S(t) = S(0) + tS'(0) = I_N + t\mathcal{N} \overset{t=1}{\Rightarrow} e^B = I_N + \mathcal{N}$.

3.a. Par le théorème de réduction de Jordan, il existe des nombres $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$, des matrices triangulaires supérieures strictes $(N_1, \dots, N_r)$ et $P \in GL_N(\mathbb{C})$ tels que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} + N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{d_r} + N_r \end{pmatrix} P^{-1}$ où $d_1 + \dots + d_r = N$. Comme $A \in GL_N(\mathbb{C})$, $\forall 1 \leq i \leq r$, $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow S = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix} P^{-1}$ est inversible et diagonalisable ; si $\mathcal{N} = P \begin{pmatrix} 0 I_{d_1} + \frac{N_1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 I_{d_r} + \frac{N_r}{\lambda_r} \end{pmatrix} P^{-1}$, alors, $\mathcal{N}$ est nilpotente, commute avec S, et vérifie : $A = S(I_N + \mathcal{N})$.

b. D'après la question 3.a, il existe une matrice diagonalisable $S \in GL_N(\mathbb{C})$ et une matrice nilpotente $\mathcal{N}$ telles que $S\mathcal{N} = \mathcal{N}S$ et $A = S(I_N + \mathcal{N})$; d'après la question 1.a, $\exists T \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ t.q. $S = e^T$, et avec les notations de la question 3.a, il existe des nombres $(\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{C}^r$ tels que $T = P \begin{pmatrix} \mu_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r I_{d_r} \end{pmatrix} P^{-1}$; d'après la question 2.b, il existe des matrices $(U_1, \dots, U_r)$ triangulaires supérieures strictes telles que $U = P \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_r \end{pmatrix} P^{-1}$ vérifie $e^U = I_N + \mathcal{N}$; par définition, les matrices U_i et $\mu_i I_{d_i}$ commutent $\Rightarrow T$ et U commutent $\Rightarrow e^{T+U} = e^T e^U = S(I_N + \mathcal{N}) = A$ $\Rightarrow$ La matrice $B = T + U$ convient.

4. Soit $B \in GL_N(\mathbb{C})$ telle que $e^B = A$; comme $\frac{B}{2}$ commute avec elle-même, $e^B = \left(e^{\frac{B}{2}}\right)^2$, et

comme $\det\left(e^{\frac{B}{2}}\right) = e^{\mathrm{Tr}\left(\frac{B}{2}\right)} \neq 0$, $C = e^{\frac{B}{2}} \in GL_N(\mathbb{C})$ et vérifie : $C^2 = A$.

Calcul différentiel

XII 1. Soit $|||\ |||$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Sachant que $\forall (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^n$, $|||B_1 \dots B_n||| \leq \prod_{i=1}^{n} |||B_i|||$, $\forall (A,H) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$, $(A+H)^p = A^p + \sum_{j=0}^{p-1} A^j H A^{p-1-j} + \underset{|||H||| \to 0}{O}(|||H|||^2) \Rightarrow$ La différentielle de l'application $A \mapsto A^p$ en $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est égale à : $\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $\varphi_A(H) = \sum_{j=0}^{p-1} A^j H A^{p-1-j}$.

2. $\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $|||(-HA^{-1})^n||| \leq |||HA^{-1}|||^n$, donc si $|||HA^{-1}||| < 1$, alors, la série $\sum_{n \geq 0} (-HA^{-1})^n$ est absolument convergente, donc convergente, avec : $(I_N + HA^{-1}) \sum_{n=0}^{+\infty} (-HA^{-1})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-HA^{-1})^n (I_N + HA^{-1}) = I_N \Rightarrow (I_N + HA^{-1}) \in GL_N(\mathbb{R})$, avec $(I_N + HA^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-HA^{-1})^n \Rightarrow (A+H)^{-1} = A^{-1}(I_N + HA^{-1})^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} A^{-1}(-HA^{-1})^n$; comme $|||\sum_{n=2}^{+\infty} A^{-1}(-HA^{-1})^n||| \leq |||A^{-1}|||\, |||HA^{-1}|||^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |||(HA^{-1})^n||| \leq \frac{|||A^{-1}|||^3}{1 - |||HA^{-1}|||} |||H|||^2 = \underset{|||H||| \to 0}{O}(|||H|||^2)$, $(A+H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \underset{|||H||| \to 0}{O}(|||H|||^2) \Rightarrow$ La différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ en $A \in GL_N(\mathbb{R})$ est égale à : $\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $\varphi_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$.

3. (i) Supposons que $A \in GL_N(\mathbb{R})$; $\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $\det(A+H) = \det(A)\det(I_N + HA^{-1})$; notons $\forall 1 \leq i, j \leq N$, $\tilde{h}_{ij} = (HA^{-1})_{ij}$ et $\tilde{h}_j = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{1j} \\ \vdots \\ \tilde{h}_{Nj} \end{pmatrix}$; $\det(I_N + HA^{-1}) = \det(e_1 + \tilde{h}_1, \dots, e_N + \tilde{h}_N) = \det(e_1, \dots, e_N) + \sum_{i=1}^{N} \det(e_1, \dots, \tilde{h}_i, \dots, e_N) + \dots + \det(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_N)$; comme l'application $\det$ est polynomiale, $\det(I_N + HA^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{N} \tilde{h}_{ii} + \underset{|||HA^{-1}||| \to 0}{O}(|||HA^{-1}|||)^2 = 1 + \mathrm{Tr}(HA^{-1}) + \underset{|||H||| \to 0}{O}(|||H|||^2) \Rightarrow \det(A+H) = \det(A) + \mathrm{Tr}(H\, {}^t\mathrm{Com}(A)) + \underset{|||H||| \to 0}{O}(|||H|||^2)$
$\Rightarrow$ L'application $\det$ est différentiable sur $GL_N(\mathbb{R})$ de différentielle : $\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $\varphi_A(H) = \mathrm{Tr}(H\, {}^t\mathrm{Com}(A))$.

(ii) Supposons $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ non inversible ; comme $\sigma(A)$ est discret, il existe une suite $\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A - \lambda_n I_N \in GL_N(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $d[\det]_{A - \lambda_n I_N}(H) = \mathrm{Tr}(H\, {}^t\mathrm{com}(A - \lambda_n I_N))$; comme $\det$ est polynomiale sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$; sachant que $A - \lambda_n I_N \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} A$, $d[\det]_{A - \lambda_n I_N}(H) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} d[\det]_A(H)$; comme $\mathrm{Com}(A - \lambda_n I_N) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Com}(A)$, $\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $d[\det]_A(H) = \mathrm{Tr}(H\, {}^t\mathrm{Com}(A))$.

4. Par définition, $\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $e^H = I_N + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}$; si $|||H||| \leq 1$, alors, par convergence absolue, $|||\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}||| \leq |||H|||^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq e\,|||H|||^2 \Rightarrow e^H = I_N + H + \underset{|||H||| \to 0}{O}(|||H|||^2)$

$\Rightarrow \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(\exp)_0(H) = H.$

XV 1.a. Comme $\forall x \in [0,1]$, $\forall f \in E$, $\int_0^1 (t+x)^2 f(t)\,dt = \int_0^1 t^2 f(t)\,dt + 2x\int_0^1 t f(t)\,dt + x^2\int_0^1 f(t)\,dt$, Φ_0 est bien définie et linéaire de E dans E ; de plus, $\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, $|\Phi_0(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 (x+t)^2\,dt \leq \frac{7}{3}\|f\|_\infty \Rightarrow \|\Phi_0(f)\|_\infty \leq \frac{7}{3}\|f\|_\infty \Rightarrow \Phi_0$ est continue.

b. Comme $\forall x \in [0,1]$, $\forall (f,h) \in E^2$, $\Phi_0(f+h)(x) = \Phi_0(f)(x) + \Phi_0(h)(x)$, Φ_0 est différentiable sur E et : $\forall f \in E$, $d{\Phi_0}_f = \Phi_0$.

2.a. Soit $\forall f \in E$, $\Theta(f) = \sin(f)$; Θ est bien définie de E dans E, et : $\forall (f,g) \in E^2$, $\Theta(f) - \Theta(g) = 2\sin\left(\frac{f-g}{2}\right)\cos\left(\frac{f+g}{2}\right) \Rightarrow \|\Theta(f) - \Theta(g)\|_\infty \leq 2\left\|\sin\left(\frac{f-g}{2}\right)\right\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty \Rightarrow \Theta$ est continue de E dans E ; comme $\Phi_1 = \Phi_0 \circ \Theta$, Φ_1 est continue de E dans E.

b.(i) $\forall (f,h) \in E^2$, $\Theta(f+h) = \sin(f+h) = \sin(f)\cos(h) + \sin(h)\cos(f) = \sin(f) + h\cos(f) + \sin(f)(\cos(h)-1) + (\sin(h)-h)\cos(f)$; sachant qu'il existe $\rho > 0$ et $K > 0$ tels que : $\forall |x| < \rho$, $|\cos(x) - 1| \leq K x^2$ et $|\sin(x) - x| \leq K|x|^3$, si $\|h\|_\infty < \rho$, alors : $\|\sin(f)(\cos(h)-1)\|_\infty \leq K\|h\|_\infty^2$ et $\|(\sin(h)-h)\cos(f)\|_\infty \leq K\|h\|_\infty^3 \Rightarrow \Theta(f+h) = \Theta(f) + h\cos(f) + \underset{\|h\|_\infty \to 0}{O}(\|h\|_\infty^2)$ $\Rightarrow \Theta$ est différentiable sur E et : $\forall f \in E$, $\forall h \in E$, $d\Theta_f(h) = h\cos(f)$.

(ii) Par composition, $\Phi_1 = \Phi_0 \circ \Theta$ est différentiable sur E et : $\forall f \in E$, $d(\Phi_1)_f = d{\Phi_0}_{\Theta(f)}(d\Theta_f) \Rightarrow \forall h \in E$, $d(\Phi_1)_f(h) = \int_0^1 (t+\cdot)^2 \cos(f(t))\,h(t)\,dt$.

XVI 1. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$; posons : $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(ty + (1-t)x)$; φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et : $\forall t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = df_{ty+(1-t)x}(y-x) \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| = \left\|\int_0^1 \varphi'(t)\,dt\right\| \leq \int_0^1 \|\varphi'(t)\|\,dt \leq \int_0^1 \|y-x\|\,dt \leq \|y-x\|$.

2.a. Sachant que df_x est inversible, le théorème d'inversion locale assure l'existence de $r_x > 0$ tel que f est un difféomorphisme de $B(x, r_x)$ sur $f(B(x, r_x))$.

b. Comme $\forall y \in B(x, r_x)$, $f^{-1}(f(y)) = y$, $df^{-1}(f(y))\,df(y) = I_n \Rightarrow df^{-1}(f(y)) = df(y)^{-1} = {}^t df(y)$ est orthogonal ; soit alors $r'_x > 0$ tel que $B(f(x), r'_x) \subset f(B(x, r_x))$, qui est ouvert puisque f est un difféomorphisme de $B(x,r_x)$ sur $f(B(x,r_x))$; $\forall z \in B(f(x), r'_x)$, $df^{-1}(z)$ est orthogonal $\Rightarrow \forall z \in B(f(x), r'_x)$, $\|f^{-1}(z) - f^{-1}(f(x))\| \leq \|z - f(x)\| \leq r'_x$, donc si $r'_x < r_x$, alors : $\forall z \in B(f(x), r'_x)$, $f^{-1}(z) \in B(x, r_x)$.

c. Soit $y \in B(x, r'_x)$; d'après la question 1, $\|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\| < r'_x \Rightarrow f(y) \in B(f(x), r'_x)$, donc, d'après la question 2.b, $\|y - x\| \leq \|f(y) - f(x)\| \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| = \|y - x\| \Rightarrow f$ est une isométrie locale.

3.a. Soit $0 < r < r'_x$; comme $\forall 1 \leq i \leq N$, $\|f(x+re_i) - f(x)\| = \|r e_i\| = r$, il existe un vecteur normé ε_i tel que $f(x+re_i) = f(x) + r\varepsilon_i$; $\forall 1 \leq j \leq N$, $r^2 \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \langle f(x+re_i) - f(x), f(x+re_j) - f(x) \rangle = \frac{1}{2} \left[\|f(x+re_i) - f(x)\|^2 + \|f(x+re_j) - f(x)\|^2 - \|f(x+re_i) - f(x) - f(x+re_j) + f(x)\|^2 \right] = \langle re_i, re_j \rangle = r^2 \delta_{i,j} \Rightarrow (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^N \Rightarrow \exists \mathcal{R} \in O(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\forall 1 \leq i \leq N$, $\mathcal{R}(e_i) = \varepsilon_i$; soit R l'isométrie affine tel que $R(x) = f(x)$ et d'application linéaire $\mathcal{R}$; $\forall 1 \leq i \leq N$, $R(x + re_i) = R(x) + \mathcal{R}(re_i) = f(x) + r\varepsilon_i = f(x + re_i) \Rightarrow R^{-1} \circ f(x+re_i) = x + re_i$, et $R^{-1} \circ f(x) = x$.

b. $\forall 1 \leq i \leq N$, $\forall y \in B(x, r'_x)$, $\langle R^{-1} \circ f(y) - R^{-1} \circ f(x), re_i \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1}(f(y) - f(x)), re_i \rangle = \langle f(y) - f(x), r\varepsilon_i \rangle = \langle f(y) - f(x), f(x+re_i) - f(x) \rangle = \frac{1}{2} \left[\|f(y) - f(x)\|^2 + \|f(x+re_i) - f(x)\|^2 - \|f(y) - f(x) - f(x+re_i) - f(x)\| \right] = \langle y - x, re_i \rangle$.

c. $\forall 1 \leq i \leq N$, $\forall h \in B(0, r'_x)$, $\langle g(x+h) - g(x), re_i \rangle = \langle h, re_i \rangle$; comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $B(0, r'_x)$, $\langle dg(x)(h), e_i \rangle = \langle h, e_i \rangle \Rightarrow dg(x)(h) = h \Rightarrow dg(x) = Id$; de même, $\forall y \in B(x, r'_x)$, $\forall h \in B(0, r'_x)$ t.q. $y + h \in B(x, r'_x)$, $\langle g(y+h) - g(y), re_i \rangle = \langle h, re_i \rangle \Rightarrow dg(y)(h) = h \Rightarrow dg(y) = Id \Rightarrow df(y) = \mathcal{R} \Rightarrow df$ est constante sur $B(0, r'_x)$.

4. Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } df(x) = df(0)\}$; d'après la question 3.c, Ω est ouvert ; comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$, Ω est aussi fermé, et par connexité de $\mathbb{R}^N$, $\Omega = \mathbb{R}^N \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^N$, $df(x) = df(0) \Rightarrow f(x) = f(0) + \int_0^1 df(tx)(x)\,dt = \int_0^1 df(0)(x)\,dt = df(0)(x)$; comme $df(0)$ est orthogonal, f est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^N$