Corrigé de l'examen de rattrapage

I. Existence globale et unicité d'une solution

1. Soit
$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3,\ F(t, x, y) = \big(x(\alpha\, y - \beta), -\alpha\, x\, y + \beta(1 - y)\big).$$
La fonction F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, puisque de nature polynomiale. En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}^3$ et localement Lipschitzienne en ses variables (x, y). Étant donné un nombre $x_0 \in \mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc l'existence de deux nombres uniques T_- et T_+ strictement positifs ou égaux à $+\infty$, et d'une unique solution maximale $(x, y) \in \mathcal{C}^1(] - T_-, T_+[, \mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy
$$\begin{cases} \big(x'(t), y'(t)\big) = F\big(t, x(t), y(t)\big), \\ x(0) = x_0 \text{ et } y(0) = 1, \end{cases}$$
lequel est, par définition de la fonction F, exactement le problème considéré.

2.a. Notons
$$\mathcal{I} = \big\{t \in [0, T_+[\text{ tel que } \forall s \in [0, t],\ x(s) > 0\big\}.$$
Comme l'ensemble $\mathcal{I}$ est inclus dans l'intervalle $[0, T_+[$, par définition de sa borne supérieure T,
$$T \leq T_+.$$
Sachant que la fonction x est continue sur $]-T_-, T_+[$ et que sa valeur x_0 en 0 est strictement positive, il existe de plus un nombre $0 < \delta \leq \min\{T_-, T_+\}$ tel que
$$\forall s \in [0, \delta],\ x(s) > 0.$$
Par définition de la borne supérieure T, nous en déduisons que
$$T \geq \delta > 0.$$

b. Par définition de la borne supérieure T, il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ telle que
$$\forall n \geq 0,\ t_n \in \mathcal{I}, \quad \text{et} \quad t_n \underset{n\to+\infty}{\to} T.$$
En particulier,
$$\forall n \geq 0,\ x(t_n) > 0.$$
Sous l'hypothèse $T < T_+$, la fonction x est de plus continue en T, d'où à la limite $n \to +\infty$,
$$x(T) \geq 0.$$
Montrons alors que
$$\forall t \in [0, T[,\ x(t) > 0.$$
Étant donné un nombre $t \in [0, T[$, il existe en effet, par convergence de la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ vers T, un entier $n \geq 0$ tel que
$$t \in [0, t_n].$$

Comme $t_n \in \mathcal{I}$, nous vérifions bien que

$$x(t) > 0.$$

Étant donné un nombre $n \geq 1$, nous introduisons alors le nombre

$$\tau_n = T + \frac{\min\{T_+, T+1\} - T}{2^n},$$

qui appartient à l'intervalle $]T, T_+[$, et qui par définition de la borne supérieure T, satisfait

$$\tau_n \notin \mathcal{I}.$$

En particulier, il existe un nombre $0 \leq \sigma_n \leq \tau_n$ tel que

$$x(\sigma_n) \leq 0.$$

Sachant que

$$\forall t \in [0, T[, \, x(t) > 0,$$

le nombre σ_n appartient nécessairement à l'intervalle $[T, \tau_n]$. Comme $\tau_n \underset{n \to +\infty}{\to} T$, nous savons que

$$\sigma_n \underset{n \to +\infty}{\to} T,$$

puis par continuité de la fonction x en T, que

$$x(T) \leq 0.$$

Nous concluons que

$$x(T) = 0.$$

c. Par les opérations élémentaires sur les fonctions, les fonctions x_1 et y_1 sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \, x_1'(t) = 0 = x_1(t)(\alpha \, y_1(t) - \beta),$$

tandis que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \, y_1'(t) = -\beta\big(y(T) - 1\big) \, e^{\beta(T-t)}.$$

Sachant que

$$-\alpha \, x_1(t) \, y_1(t) + \beta\big(1 - y_1(t)\big) = -\beta\big(y(T) - 1\big) \, e^{\beta(T-t)},$$

les fonctions (x_1, y_1) sont solutions du système (1). Comme

$$x_1(T) = 0, \quad \text{et} \quad y_1(T) = y(T),$$

elles sont solutions du problème de Cauchy considéré.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous savons alors, comme à la question I.1, que ce problème possède au plus une solution maximale. Sachant que la solution (x_1, y_1) est globale, donc nécessairement maximale, il s'agit de l'unique solution maximale de ce problème de Cauchy.

d. D'après les questions I.1 et I.2.b, la solution (x, y) est une solution maximale du problème de Cauchy associé aux conditions initiales $x(T) = 0$ et $y(T) = y(T)$. Il résulte donc de la question I.2.c que les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et égales aux fonctions x_1 et y_1. En particulier, il vient

$$x_0 = x(0) = x_1(0) = 0,$$

ce qui est absurde puisque $x_0 > 0$. Cette contradiction permet de conclure que

$$T = T_+.$$

Montrons enfin que

$$\forall t \in [0, T_+[,\ x(t) > 0.$$

Par définition de la borne supérieure $T = T_+$, nous savons en effet, comme à la question I.2.b, qu'il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0,\ t_n \in \mathcal{I}, \quad \text{et} \quad t_n \underset{n\to+\infty}{\to} T_+.$$

Étant donné un nombre $0 \leq t < T_+$, cette convergence assure l'existence d'un entier $n \geq 0$ tel que

$$0 \leq t \leq t_n.$$

Sachant que $t_n \in \mathcal{I}$, nous concluons que

$$x(t) > 0.$$

3.a. Soit

$$\mathcal{J} = \big\{ s \in [0, T_+[\text{ tel que } \forall t \in [0, s],\ y(t) > 0 \big\}.$$

Nous commençons par vérifier que

$$S = \sup \mathcal{J} > 0.$$

En effet, sachant que $y(0) = 1$, il existe par continuité de la fonction y en 0 un nombre $0 < \sigma < T_+$ tel que

$$\forall s \in [0, \sigma],\ y(s) > 0,$$

et cette affirmation suffit à établir que

$$S \geq \sigma > 0.$$

Nous raisonnons alors comme à la question I.2.b. Par définition de la borne supérieure S, il existe une suite $(s_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0,\ s_n \in \mathcal{J}, \quad \text{et} \quad s_n \underset{n\to+\infty}{\to} S.$$

Lorsque $S < T_+$, il découle d'abord du fait que

$$\forall n \geq 0,\ y(s_n) > 0,$$

et de la continuité de la fonction y en S que

$$y(s) \geq 0,$$

quand $n \to +\infty$. Comme à la question I.2.b, nous vérifions ensuite que

$$\forall s \in [0, S[,\ y(s) > 0.$$

Par définition de la borne supérieure S, nous pouvons alors introduire une suite $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0,\ S \leq \sigma_n < T_+, \quad \sigma_n \notin \mathcal{J}, \quad \text{et} \quad \sigma_n \underset{n\to+\infty}{\to} S.$$

Par définition de l'ensemble $\mathcal{J}$, il existe alors des nombres $0 \leq \tau_n \leq \sigma_n$ tels que

$$y(\tau_n) \leq 0.$$

Puisque

$$\forall s \in [0, S[, \; y(s) > 0,$$

les nombres τ_n sont dans l'intervalle $[S, \sigma_n]$, et nous déduisons de la convergence de la suite $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ vers S que

$$\tau_n \underset{n \to +\infty}{\to} S.$$

À la limite $n \to +\infty$, nous obtenons

$$y(S) \leq 0,$$

ce qui assure que

$$y(S) = 0.$$

b. Nous déduisons de la question 1.3.a et de l'équation satisfaite par la fonction y que

$$y'(S) = -\alpha \, x(S) \, y(S) + \beta \big(1 - y(S)\big) = \beta > 0.$$

Sachant que $S > 0$ et $y(S) = 0$, il existe un nombre $0 < s < S$ tel que

$$y(s) < 0.$$

c. Nous avons démontré dans la preuve de la question I.3.a que

$$\forall s \in [0, S[, \; y(s) > 0,$$

puis établi lors de la question I.3.b l'existence d'un nombre $0 < s < S$ tel que

$$y(s) < 0,$$

ce qui est contradictoire. Nous savons donc que

$$S = T_+.$$

Comme à la question 1.2.d, nous déduisons enfin de cette identité que

$$\forall t \in [0, T_+[, \; y(t) > 0.$$

4.a. Comme les fonctions (x, y) sont solutions de l'équation (1), la fonction $z = x + y$ satisfait

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T_+[, \; z'(t) &= x(t)\big(\alpha \, y(t) - \beta\big) - \alpha \, x(t) \, y(t) + \beta \big(1 - y(t)\big) \\ &= \beta \big(1 - x(t) - y(t)\big) \\ &= \beta \big(1 - z(t)\big). \end{aligned}$$

Cette équation différentielle a pour solution particulière la solution constante égale à 1, et la solution de l'équation homogène associée est de la forme $A \, e^{-\beta t}$ pour un nombre réel A à déterminer. D'où la formule

$$\forall t \in [0, T_+[, \; z(t) = 1 + A \, e^{-\beta t}.$$

Sachant que $z(0) = x(0) + y(0) = x_0 + 1$, nous vérifions que

$$A = x_0,$$

soit que

$$\forall t \in [0, T_+[,\ x(t) + y(t) = 1 + x_0 e^{-\beta t}.$$

b. Nous déduisons de la question I.4.a que

$$\forall t \in [0, T_+[,\ x(t) + y(t) \leq 1 + x_0,$$

d'où d'après les questions I.2.d et I.3.c,

$$\forall t \in [0, T_+[,\ 0 \leq x(t) \leq 1 + x_0, \quad \text{et} \quad 0 \leq y(t) \leq 1 + x_0.$$

La solution (x, y) demeure donc dans le compact $[0, 1+x_0] \times [0, 1+x_0]$ sur l'intervalle $[0, T_+[$. Par le principe de sortie de tout compact, cette solution est globale, et nous concluons que

$$T_+ = +\infty.$$

II. Comportement asymptotique

1.a. Nous déduisons de l'équation satisfaite par la fonction y que

$$y'(0) = -\alpha x_0 < 0.$$

Puisque $y(0) = 1$, il existe un nombre $t > 0$ tel que

$$\forall 0 \leq s \leq t,\ y(s) \leq 1,$$

ce qui suffit à établir que

$$\tau \geq t > 0.$$

b. Soit

$$\mathcal{K} = \big\{ t \in [0, +\infty[\text{ tel que } \forall s \in [0, t],\ y(s) \leq 1 \big\}.$$

Nous raisonnons comme aux questions I.2.b. et I.3.a. Par définition de la borne supérieure τ, il existe une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0,\ t_n \in \mathcal{J}, \quad \text{et} \quad t_n \underset{n \to +\infty}{\to} \tau.$$

Comme $\tau < +\infty$, nous déduisons de la continuité de la fonction y en τ et du fait que les nombres t_n sont dans $\mathcal{J}$ qu'à la limite $n \to +\infty$,

$$y(\tau) \leq 1.$$

Comme aux questions I.2.b et I.3.a, nous vérifions aussi que

$$\forall t \in [0, \tau[,\ y(t) \leq 1.$$

Par définition de la borne supérieure τ, nous pouvons alors considérer une suite $(\tau_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0,\ \tau \leq \tau_n, \quad \tau_n \notin \mathcal{K}, \quad \text{et} \quad \tau_n \underset{n \to +\infty}{\to} \tau.$$

Par définition de l'ensemble $\mathcal{K}$, il existe alors des nombres $0 \leq s_n \leq \tau_n$ tels que

$$y(s_n) > 1.$$

Puisque

$$\forall t \in [0, \tau[,\ y(t) \leq 1,$$

les nombres s_n sont dans l'intervalle $[\tau, \tau_n]$. Par convergence de la suite $(\tau_n)_{n \geq 0}$ vers τ, nous obtenons

$$s_n \underset{n \to +\infty}{\to} \tau,$$

puis par continuité de la fonction y en τ,

$$y(\tau) \geq 1,$$

d'où en définitive,

$$y(\tau) = 1.$$

c. Nous déduisons de l'équation satisfaite par la fonction y et des questions I.2.d et II.1.b que

$$y'(\tau) = -\alpha\, x(\tau) < 0.$$

d. Sachant que $y(\tau) = 1$ et $y'(\tau) < 0$, il existe un nombre $0 < t < \tau$ tel que

$$y(t) > 1,$$

ce qui contredit le fait établi à la question II.1.b que

$$y(t) \leq 1.$$

Par l'absurde, il s'ensuit que $\tau = +\infty$, ce qui assure comme aux questions I.2.d et 1.3.c que

$$\forall t \geq 0,\ y(t) \leq 1.$$

2.a. Comme $\beta \geq \alpha > 0$, nous déduisons de la question II.1.d que

$$\forall t \geq 0,\ \alpha\, y(t) - \beta \leq \alpha - \beta \leq 0.$$

Sachant que la fonction x est positive sur $\mathbb{R}_+$ par la question I.2.d, il résulte de l'équation satisfaite par la fonction x que

$$\forall t \geq 0,\ x'(t) = x(t)\big(\alpha\, y(t) - \beta\big) \leq 0.$$

b. D'après la question II.2.a, la fonction x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est aussi positive sur cet intervalle par la question I.2.d, elle est minorée, et il existe donc un nombre $x_\infty \geq 0$ tel que

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} x_\infty.$$

c. D'après la question I.4.a, nous savons que

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ y(t) = x_0 e^{-\beta t} + 1 - x(t).$$

Sachant que

$$x_0 e^{-\beta t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0,$$

il découle de la question II.2.b que

$$y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 1 - x_\infty.$$

3.a. Nous pouvons combiner les opérations élémentaires sur les limites d'une part, et les convergences des questions II.2.b et II.2.c d'autre part, afin de déduire de l'équation satisfaite par la fonction y que

$$y'(t) = -\alpha\, x(t)\, y(t) + \beta\big(1 - y(t)\big) \underset{t \to +\infty}{\to} -\alpha\, x_\infty\, \big(1 - x_\infty\big) + \beta\, x_\infty = x_\infty\big(\beta - \alpha + \alpha\, x_\infty\big).$$

b. Lorsque $x_\infty \neq 0$, ce nombre est strictement positif, et le nombre $\ell = x_\infty(\beta - \alpha + \alpha\, x_\infty)$ est aussi strictement positif, puisque $\beta \geq \alpha > 0$. Par définition de la limite de la question II.3.a, il existe donc un nombre $\tau > 0$ tel que

$$\forall t \geq \tau,\ y'(t) \geq \frac{\ell}{2}.$$

Nous déduisons de cette inégalité que

$$\forall t \geq \tau,\ y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t y'(s)\, ds \geq y(\tau) + \int_\tau^t \frac{\ell}{2}\, ds = y(\tau) + \frac{\ell}{2}\big(t - \tau\big).$$

Sachant que

$$y(\tau) + \frac{\ell}{2}\big(t - \tau\big) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty,$$

nous concluons par comparaison que

$$y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty.$$

c. La question II.1.d assure que la fonction y est bornée par 1 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est contradictoire avec la limite de la question II.3.b. Par l'absurde, nous concluons que $x_\infty = 0$, puis par les questions II.2.b et II.2.c que

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0, \quad \text{et} \quad y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 1.$$