CY Cergy Paris Université **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques **2024-2025**

Corrigé de l'examen de rattrapage

Exercice 1.

1.a. Le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A est égal à

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \big(\lambda + 1\big)^2 - 1 = \lambda\big(\lambda + 2\big),$$

de sorte que le spectre de cette matrice vaut

$$\sigma(A) = \big\{ -2, 0 \big\}.$$

De plus, si $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -2, alors,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -2x_1, \\ x_1 - x_2 = -2x_2, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $x_1 + x_2 = 0$. L'espace propre $E_{-2}(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De même, si $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, alors,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $x_1 = x_2$. L'espace propre $E_0(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la matrice des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 1.a, nous avons

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que

$$e^{tA} = \exp\left(P \begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right) = P \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Sachant que

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

nous arrivons à

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-2t} & 1-e^{-2t} \\ 1-e^{-2t} & 1+e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

2.a. D'après la question 1.a, la matrice A possède une valeur propre -2 de partie réelle strictement négative, ainsi qu'une valeur propre nulle. Comme la matrice A est diagonalisable en cette valeur propre nulle, l'origine est stable. Par contre, elle n'est pas asymptotiquement stable.

b. Considérons la solution $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de donnée initiale $X(0) = X_0$, et supposons que le vecteur X_0 s'écrive sous la forme $X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2$ dans la base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Nous savons alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} X_0 = x_0 e^{tA} e_1 + y_0 e^{tA} e_2 = x_0 e^{-2t} e_1 + y_0 e_2.$$

Par conséquent, les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $X(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont donnés par les formules

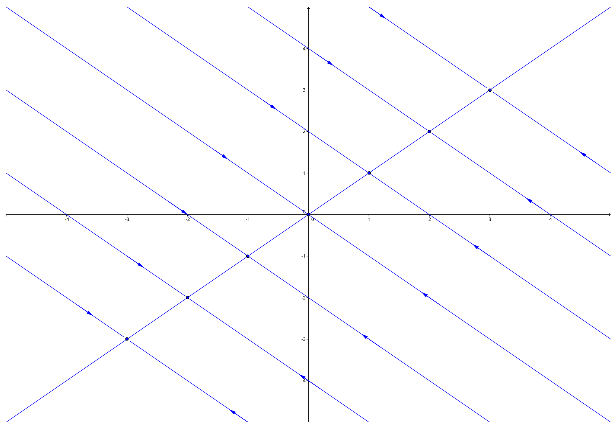
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-2t}, \\ y(t) = y_0. \end{cases}$$

Lorsque $x_0 = 0$, nous constatons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = 0, \quad \text{et} \quad y(t) = y_0,$$

de sorte que la solution est constante et cette constante est un vecteur colinéaire au vecteur e_2. Ce type de solutions correspond aux différents points bleus sur le portrait de phase ci-dessous.

Lorsque $x_0 \neq 0$, la solution parcourt une demie-droite d'équation $y = y_0$ dans le repère associé à la base $\mathcal{B}$, soit une demie-droite de vecteur directeur $\pm e_1$. Notons également qu'elle converge vers le vecteur $y_0 e_2$ lorsque $t \to +\infty$, ce qui nous donne le sens de parcours de la demie-droite. Nous aboutissons ainsi à un portrait de phase de la forme



3. Notons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Comme l'application b est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'il existe une unique solution $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy considéré. De plus, il résulte de la méthode de variation de la constante que cette solution est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds.$$

Nous calculons alors
$$e^{tA} X(0) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix},$$
tandis que
$$e^{(t-s)A}\, b(s) = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}.$$
Nous obtenons donc
$$\int_0^t e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix},$$
et nous concluons que l'unique solution du problème de Cauchy considéré est égale à
$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^{-2t} + t^2 \\ -2e^{-2t} + t^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1.a. Soit $y \in F$ fixé. Étant donné un vecteur $v \in E$ tel que $T_y(v) = v$, nous vérifions par récurrence sur $k \geq 1$ que
$$\forall k \geq 1,\ T_y^k(v) = v,$$
de sorte que $T_y^p(v) = v$. S'il existe des vecteurs $(v_1, v_2) \in E^2$ tels que $T_y(v_1) = v_1$ et $T_y(v_2) = v_2$, nous savons donc que
$$T_y^p(v_1) = v_1, \quad \text{et} \quad T_y^p(v_2) = v_2.$$
Nous obtenons ainsi
$$\big\| v_1 - v_2 \big\|_E = \big\| T_y^p(v_1) - T_y^p(v_2) \big\|_E \leq K \big\| v_1 - v_2 \big\|_E.$$
Sachant que $0 \leq K < 1$, nous concluons que
$$\big\| v_1 - v_2 \big\|_E \leq 0,$$
ce qui assure que $v_1 = v_2$. Il existe donc au plus un vecteur $v \in E$ tel que $T_y(v) = v$.

b. Par hypothèse, l'application T_y^p est une contraction de E dans E pour un nombre $0 \leq K < 1$. Comme l'espace de Banach E est complet, il résulte du théorème du point fixe qu'il existe un unique vecteur $u(y) \in E$ tel que
$$T_y^p\big(u(y)\big) = u(y).$$

c. Sachant que $T_y^p(u(y)) = u(y)$, nous calculons
$$T_y\big(u(y)\big) = T_y^{p+1}\big(u(y)\big) = T_y^p\big(T_y(u(y))\big).$$
Le vecteur $T_y(u(y))$ est donc un point fixe de l'application T_y^p. Par la question 1.b, cette application possède un unique point fixe $u(y)$, d'où l'égalité
$$T_y\big(u(y)\big) = u(y).$$
L'application T_y possède donc un point fixe $v(y) = u(y) \in E$, et d'après la question 1.a, il s'agit de l'unique point fixe de cette application.

2.a. Par définition, les vecteurs $v(y)$ et $v(y_0)$ sont les uniques points fixes des applications T_y et T_{y_0}. Comme à la question 1.a, ce sont donc des points fixes des applications T_y^p et $T_{y_0}^p$, et nous pouvons écrire

$$v(y) - v(y_0) = T_y^p\big(v(y)\big) - T_{y_0}^p\big(v(y_0)\big) = T_y^p\big(v(y)\big) - T_y^p\big(v(y_0)\big) + T_y^p\big(v(y_0)\big) - T_{y_0}^p\big(v(y_0)\big).$$

b. Par l'inégalité triangulaire, nous déduisons de la question 2.a que

$$\big\|v(y) - v(y_0)\big\|_E \leq \big\|T_y^p\big(v(y)\big) - T_y^p\big(v(y_0)\big)\big\|_E + \big\|T_y^p\big(v(y_0)\big) - T_{y_0}^p\big(v(y_0)\big)\big\|_E.$$

Le caractère contractant de l'application T_y garantit alors que

$$\big\|T_y^p\big(v(y)\big) - T_y^p\big(v(y_0)\big)\big\|_E \leq K\big\|v(y) - v(y_0)\big\|_E,$$

d'où nous obtenons

$$\big\|v(y) - v(y_0)\big\|_E \leq K\big\|v(y) - v(y_0)\big\|_E + \big\|T_y^p\big(v(y_0)\big) - T_{y_0}^p\big(v(y_0)\big)\big\|_E,$$

puis

$$\big\|v(y) - v(y_0)\big\|_E \leq \frac{1}{1-K}\big\|T_y^p\big(v(y_0)\big) - T_{y_0}^p\big(v(y_0)\big)\big\|_E.$$

c. Comme l'application T est continue de $E \times F$ dans E, quel que soit le vecteur $v \in E$, la fonction $y \mapsto T_y(v)) = T(v, y)$ est continue de F dans E. Par composition, nous en déduisons que la fonction $y \mapsto T_y^2(v) = T(T_y(v), y) = T(T(v, y), y)$ est continue de F dans E, puis par récurrence sur $k \geq 1$, que toutes les fonctions $y \mapsto T_y^k(v)$ sont continues de F dans E. Pour $k = p$ et $v = v(y_0)$, la fonction $y \mapsto T_y^p(v(y_0))$ est par conséquent continue de F dans E, de sorte que

$$\big\|T_y^p\big(v(y_0)\big) - T_{y_0}^p\big(v(y_0)\big)\big\|_E \to 0,$$

lorsque $y \to y_0$ dans F. Il résulte ainsi de la question 2.b que

$$\big\|v(y) - v(y_0)\big\|_E \to 0,$$

lorsque $y \to y_0$ dans E, ce qui assure que l'application $y \mapsto v(y)$ est bien continue de F dans E.

Exercice 3.

1.a. Soit

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ F(t, x) = -\sin(x).$$

La fonction F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^1$, sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe donc un unique intervalle maximal I contenant 0 et une unique solution $x_a \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ du problème de Cauchy considéré. Comme

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ \big|F(t, x)\big| \leq 1,$$

cette solution est globale ce qui signifie que l'intervalle maximal I est égal à $\mathbb{R}$.

b. Comme $\sin(0) = 0$, nous constatons pour $a = 0$ que la fonction nulle est solution du problème de Cauchy considéré. Par unicité de cette solution, nous concluons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_0(t) = 0.$$

2.a. Lorsque la fonction x est continue sur $[-\tau,\tau]$, l'application $t \mapsto \sin(x(t))$ est par composition continue sur $[-\tau,\tau]$, de sorte que la fonction $t \mapsto \int_0^t \sin\big(x(s)\big)\,ds$ est bien définie et continue sur $[-\tau,\tau]$. Par les opérations élémentaires sur les fonctions, la fonction $\Phi(a,x)$ est aussi bien définie et continue sur $[-\tau,\tau]$. Autrement dit l'application Φ est bien définie de $\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

b. Soit $(a,x)\in\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ fixés. Quels que soient $(h,y)\in\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, nous déduisons de la définition de la fonction Φ que

$$\begin{aligned}\forall t\in[-\tau,\tau],\ \Phi(a+h,x+y)(t) = \Phi(a,x)(t) + y(t) - h + \int_0^t \cos\big(x(s)\big)\,y(s)\,ds \\ + \int_0^t \Big(\sin\big(x(s)+y(s)\big) - \sin\big(x(s)\big) - \cos\big(x(s)\big)\,y(s)\Big)\,ds.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction sinus afin d'obtenir

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha) + \cos(\alpha)\beta - \beta^2\int_0^1 (1-t)\sin(\alpha+t\beta)\,dt.$$

Pour $\alpha = x(s)$ et $\beta = y(s)$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\Big|\sin\big(x(s)+y(s)\big) - \sin\big(x(s)\big) - \cos\big(x(s)\big)\,y(s)\Big| &\le y(s)^2\int_0^1 \Big|(1-t)\sin\big(x(s)+ty(s)\big)\Big|\,dt \\ &\le \|y\|_\infty^2\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}\|y\|_\infty^2,\end{aligned}$$

où

$$\|y\|_\infty = \max_{s\in[-\tau,\tau]} \big|y(s)\big|,$$

désigne la norme canonique de l'espace $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[-\tau,\tau]$ dans $\mathbb{R}$. Nous concluons que

$$\begin{aligned}\max_{t\in[-\tau,\tau]}\bigg|\int_0^t \Big(\sin\big(x(s)+y(s)\big) - \sin\big(x(s)\big) - \cos\big(x(s)\big)\,y(s)\Big)\,ds\bigg| &\le \frac{1}{2}\max_{t\in[-\tau,\tau]}\bigg|\int_0^t \|y\|_\infty^2\,dt\bigg| \\ &\le \frac{\tau}{2}\|y\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$\forall t\in[-\tau,\tau],\ \varphi(h,y)(t) = y(t) - h + \int_0^t \cos\big(x(s)\big)\,y(s)\,ds,$$

pour obtenir le développement

$$\Phi(a+h,x+y) = \Phi(a,x) + \varphi(h,y) + \underset{\|y\|_\infty\to 0}{\mathcal{O}}\big(\|y\|_\infty^2\big),$$

qui garantit que

$$\Phi(a+h,x+y) = \Phi(a,x) + \varphi(h,y) + \underset{\|y\|_\infty\to 0}{o}\big(\|y\|_\infty\big).$$

Il reste alors à vérifier que l'application φ est linéaire et continue de $\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$. Comme à la question 1.a, nous vérifions d'abord qu'elle est bien définie de $\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$. La fonction $t\mapsto\int_0^t \cos\big(x(s)\big)\,y(s)\,ds$ est en effet bien définie et continue sur $[-\tau,\tau]$. De plus, l'application φ est linéaire en la variable $(h,y)\in\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, et elle satisfait

$$\forall t\in[-\tau,\tau],\ \big|\varphi(h,y)(t)\big|\leq |y(t)|+|h|+\int_0^t |y(s)|\,ds\leq \|y\|_\infty+|h|+|t|\|y\|_\infty.$$

Nous avons donc

$$\big\|\varphi(h,y)\big\|_\infty\leq \big(1+\tau\big)\|y\|_\infty+|h|,$$

et l'application linéaire φ est bien continue sur $\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$. D'après le développement précédent, la fonction Φ est donc différentiable de $\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, et sa différentielle en $(a,x)\in\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ vaut

$$\forall (h,y)\in\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R}),\ d\Phi_{(a,x)}(h,y)=\varphi(h,y),$$

soit l'expression recherchée.

c. Considérons des nombres $(a_0,a)\in\mathbb{R}^2$ et des fonctions $(x_0,x)\in\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})^2$. D'après la question 2.a, nous savons que, quels que soient $(h,y)\in\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, nous avons

$$\forall t\in[-\tau,\tau],\ d\Phi_{(a,x)}(h,y)(t)-d\Phi_{(a_0,x_0)}(h,y)(t)=\int_0^t\Big(\cos\big(x(s)\big)-\cos\big(x_0(s)\big)\Big)\,h(s)\,ds,$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$\big\|d\Phi_{(a,x)}(h,y)-d\Phi_{(a_0,x_0)}(h,y)\big\|_\infty\leq\max_{t\in[-\tau,\tau]}\bigg|\int_0^t\Big|\cos\big(x(s)\big)-\cos\big(x_0(s)\big)\Big|\,\|h\|_\infty\,ds\bigg|.$$

Sachant que

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \big|\cos(\beta)-\cos(\alpha)\big|\leq\max_{\sigma\in[\alpha,\beta]}|\sin(\sigma)|\big|\beta-\alpha\big|\leq\big|\beta-\alpha\big|,$$

nous obtenons

$$\bigg|\int_0^t\Big|\cos\big(x(s)\big)-\cos\big(x_0(s)\big)\Big|\,\|h\|_\infty\,ds\bigg|\leq\bigg|\int_0^t\big\|x-x_0\big\|_\infty\,\|h\|_\infty\,ds\bigg|,$$

d'où l'inégalité

$$\big\|d\Phi_{(a,x)}(h,y)-d\Phi_{(a_0,x_0)}(h,y)\big\|_\infty\leq\tau\big\|x-x_0\big\|_\infty\,\|h\|_\infty.$$

En particulier, la norme d'application de la différence d'applications linéaires $d\Phi_{(a,x)}-d\Phi_{(a_0,x_0)}$ satisfait

$$\big|\big|\big|d\Phi_{(a,x)}-d\Phi_{(a_0,x_0)}\big|\big|\big|\leq\tau\big\|x-x_0\big\|_\infty,$$

ce qui suffit à montrer que l'application $(a,x)\mapsto d\Phi_{(a,x)}$ est continue, puis à conclure que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}\times\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

3.a. Soit $g\in\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$. Lorsque la fonction y est continue sur $[-\tau,\tau]$, la fonctions $t\mapsto\int_0^t y(s)\,ds$ est bien définie et continue sur ce segment, d'où par les opérations élémentaires, le fait que la fonction $\theta(y)$ soit bien définie et continue sur $[-\tau,\tau]$. En particulier, l'application θ est bien définie de $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

De plus, quelles que soient $(y_1,y_2)\in\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})^2$, elle satisfait

$$\forall t\in[-\tau,\tau],\ \theta(y_2)(t)-\theta(y_1)(t)=\int_0^t\big(y_1(s)-y_2(s)\big)\,ds,$$

ce qui fournit l'inégalité

$$\big\|\theta(y_2) - \theta(y_1)\big\|_\infty \leq \max_{t \in [-\tau,\tau]} \left| \int_0^t \|y_1 - y_2\|_\infty \, ds \right| \leq \tau \|y_1 - y_2\|_\infty.$$

Comme $0 < \tau < 1$, l'application θ est bien une contraction de $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

b. D'après la question 2.b, la différentielle partielle $d_x\Phi_{(0,0)}$ est définie par

$$\forall t \in [-\tau,\tau],\ d_x\Phi_{(0,0)}(y)(t) = y(t) + \int_0^t y(s) \, ds,$$

quelle que soit la fonction $y \in \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, résoudre l'équation $d_x\Phi_{(0,0)}(y) = g$ équivaut donc à déterminer un point fixe de l'application θ de la question 3.a. Comme cette application est contractante sur $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, et que cet espace muni de sa norme canonique $\|\cdot\|_\infty$ est complet, le théorème du point fixe assure qu'il existe une unique fonction $y \in \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ telle que

$$\theta(y) = y,$$

soit telle que

$$d_x\Phi_{(0,0)}(y) = g.$$

Autrement dit, l'application $d_x\Phi_{(0,0)}$ est inversible de $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.

c. Étant donné un nombre $a \in \mathbb{R}$, rappelons que la fonction x_a est l'unique solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) + \sin(x(t)) = 0, \\ x(0) = a. \end{cases}$$

En particulier, cette fonction appartient à $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, et elle satisfait

$$\forall t \in [-\tau,\tau],\ x(t) - a + \int_0^t \sin\big(x(s)\big) \, ds = 0,$$

soit

$$\Phi(a, x_a) = 0.$$

Pour $a = 0$, la fonction nulle $x_0 = 0$ satisfait ainsi $\Phi(0, x_0) = 0$. Comme $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour sa norme canonique $\|\cdot\|_\infty$, que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, et que la différentielle partielle $d_x\Phi_{(0,0)}$ est inversible de $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$, le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un nombre $\alpha > 0$ et d'une application $\gamma \in \mathcal{C}^1(]-\alpha,\alpha[, \mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R}))$ telle que

$$\forall a \in]-\alpha,\alpha[,\ \Phi(a,\gamma(a)) = 0.$$

La fonction $\gamma(a)$ vérifie donc

$$\forall t \in [-\tau,\tau],\ \gamma(a)(t) = a - \int_0^t \sin\big(\gamma(a)(s)\big) \, ds.$$

Comme elle est continue sur $[-\tau,\tau]$, la fonction $s \mapsto \sin\big(\gamma(a)(s)\big)$ est aussi continue sur $[-\tau,\tau]$, et la fonction $t \mapsto \int_0^t \sin\big(\gamma(a)(s)\big) \, ds$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment. Par conséquent la fonction $\gamma(a)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\tau,\tau]$, et elle satisfait de plus

$$\forall t \in [-\tau,\tau],\ \gamma(a)'(t) + \sin\big(\gamma(a)(t)\big) = 0.$$

Comme $\gamma(a)(0) = a$, par unicité de la solution de ce problème de Cauchy, nous concluons que

$$\forall a \in]-\alpha,\alpha[,\ \gamma(a) = x_a,$$

puis que l'application $a \mapsto x_a$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-\alpha,\alpha[$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R})$.