Systèmes Dynamiques 2025/2026

Master 1 Mathématiques

Corrigé du partiel

Exercice 1.

1.a. Considérons l'application Φ définie par :

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad \Phi(x,y,t) = \left(\frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}\sin(x-y) + t - 1 \right).$$

Par les opérations élémentaires sur les fonctions, l'application Φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, et pour la norme $\| \ \|$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)\| = |x| + |y|,$$

cette application satisfait :

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4, \quad \|\Phi(x_1,y_1,t) - \Phi(x_2,y_2,t)\| = \frac{1}{2}\left|\cos(x_1-y_1) - \cos(x_2-y_2)\right| + \frac{1}{4}\left|\sin(x_1-y_1) - \sin(x_2-y_2)\right|.$$

Sachant que les fonctions cos et sin sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$, cette égalité devient :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x_1,y_1,t) - \Phi(x_2,y_2,t)\| &\leq \frac{1}{2}\left|x_1 - y_1 - x_2 + y_2\right| + \frac{1}{4}\left|x_1 - y_1 - x_2 + y_2\right| \\
&\leq \frac{3}{4}\left[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right] \\
&= \frac{3}{4}\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|.
\end{aligned}$$

À $t \in \mathbb{R}$ fixé, les applications $(x,y) \mapsto \Phi(x,y,t)$ sont donc $\frac{3}{4}$-contractantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Par le théorème du point fixe sur l'espace de Banach $(\mathbb{R}^2, \| \ \|)$, il existe donc un unique couple $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$(x(t), y(t)) = \Phi(x(t), y(t), t),$$

soit une unique solution du système :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{4}\sin(x-y) + t - 1. \end{cases}$$

b. Nous appliquons le théorème du point fixe à paramètre différentiable à l'application Φ. Nous savons déjà que cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, et qu'à $t \in \mathbb{R}$ fixé, les fonctions $(x,y) \mapsto \Phi(x,y,t)$ sont $\frac{3}{4}$-contractantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. De plus, quels que soient $(x,y,t) \in \mathbb{R}^2$ et $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, nous calculons :

$$d_{x,y}\Phi(x,y,t)(h_1,h_2) = \Big(-\frac{1}{2}\sin(x-y)\,h_1 + \frac{1}{2}\sin(x-y)\,h_2,\ \frac{1}{4}\cos(x-y)\,h_1 - \frac{1}{4}\cos(x-y)\,h_2\Big),$$

de sorte que :

$$\|d_{x,y}\Phi(x,y,t)(h_1,h_2)\| \leq \frac{1}{2}\big(|h_1|+|h_2|\big)\,|\sin(x-y)| + \frac{1}{4}\big(|h_1|+|h_2|\big)\,|\cos(x-y)| \leq \frac{3}{4}\,\|(h_1,h_2)\|.$$

En particulier, la norme d'opérateur de la différentielle partielle $d_{x,y}\Phi(x,y,t)$ satisfait :

$$|||d_{x,y}\Phi(x,y,t)||| \leq \frac{3}{4}.$$

Par le théorème du point fixe à paramètre différentiable, nous concluons que l'application qui, à $t \in \mathbb{R}$, associe l'unique point fixe $(x(t),y(t))$ de l'application $\Phi(\cdot,\cdot,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.a. Lorsque $x(t) = y(t) = 0$, nous déduisons de la définition des nombres $x(t)$ et $y(t)$ que :

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2}, \\ 0 = t - 1, \end{cases}$$

soit que $t = 1$. Réciproquement, si $t=1$, alors $x(1)$ et $y(1)$ sont les solutions uniques du système :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - 1\big), \\ y = \sin(x-y). \end{cases}$$

Comme le couple $(0,0)$ est solution de ce système, $x(1) = y(1) = 0$, d'où l'équivalence $x(t) = y(t) = 0 \iff t = 1$.

b. Sachant que la fonction $t \mapsto (x(t),y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $x(1) = y(1) = 0$, la dérivation du système satisfait par les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ en $t = 1$ conduit au système :

$$\begin{cases} x'(1) = -\frac{1}{2}\big(x'(1) - y'(1)\big) \sin(0-0) - 1, \\ \text{et } y'(1) = \frac{1}{4}\big(x'(1) - y'(1)\big) \cos(0-0) + 1, \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$\begin{cases} x'(1) = -1, \\ \text{et } \frac{5}{4} y'(1) = \frac{1}{4} x'(1) + 1 = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Nous en déduisons que :

$$x'(1) = -1 \text{ et } y'(1) = \frac{3}{5}.$$

Exercice 2.

1.a. Comme l'application Φ est polynomiale en la variable matricielle M, elle est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Étant donnée une matrice $H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, nous calculons :

$$\Phi(M+H) - \Phi(M) = 2H - HAM - MAH - HAH.$$

Nous constatons alors que l'application $H \mapsto 2H - HAM - MAH$ est linéaire, et continue sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, puisqu'elle satisfait :

$$\| 2H - HAM - MAH \| \leq 2(1 + \|A\| \, \|M\|) \, \|H\|,$$

lorsque $\| \ \|$ désigne une norme d'opérateur sur l'espace $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Sachant que

$$\| HAH \| \leq \|A\| \, \|H\|^2 = \underset{\|H\| \to 0}{o}\big(\|H\|\big),$$

nous concluons que la différentielle de la fonction Φ en la matrice M est donnée par l'expression :

$$\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \ d\Phi(M)(H) = 2H - MAH - HAM.$$

2.a. Nous calculons :

$$\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \ d\Phi(A^{-1})(H) = 2H - A^{-1}AH - HAA^{-1} = 2H - 2H = 0.$$

Par continuité de l'application différentielle $M \mapsto d\Phi(M)$, il existe donc un nombre $\rho > 0$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \ \| M - A^{-1} \| < \rho \Rightarrow \| d\Phi(M) \| \leq \frac{1}{2}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, nous concluons que, si M_1 et M_2 sont deux matrices telles que $\|M_1 - A^{-1}\| < \rho$ et $\|M_2 - A^{-1}\| < \rho$, alors :

$$\|\Phi(M_1) - \Phi(M_2)\| \leq \sup\{\|d\Phi(M)\|,\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \|M - A^{-1}\| < \rho\} \times \|M_1 - M_2\|$$

$$\leq \frac{1}{2}\|M_1 - M_2\|.$$

b. Nous raisonnons par récurrence sur $n \geq 0$. Au rang $n = 0$, la matrice M_0 est bien définie et satisfait $\|M_0 - A^{-1}\| < \rho$. Supposons que, quel que soit $0 \leq k \leq n$, la matrice M_k est bien définie et satisfait $\|M_k - A^{-1}\| < \rho$. Au rang $n+1$, la matrice $M_{n+1} = \Phi(M_n)$ est bien définie, puisque Φ est bien définie sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. De plus, nous observons que :

$$\Phi(A^{-1}) = 2A^{-1} - A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}.$$

Puisque $\|M_n - A^{-1}\| < \rho$, la question 2.a assure que :

$$\|M_{n+1} - A^{-1}\| = \|\Phi(M_n) - \Phi(A^{-1})\| \leq \frac{1}{2}\|M_n - A^{-1}\| \leq \frac{\rho}{2} < \rho.$$

Par récurrence sur $n \geq 0$, nous concluons que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et satisfait :

$$\forall n \geq 0,\ \|M_n - A^{-1}\| < \rho.$$

c. Nous avons établi à la question 2.b que :

$$\forall n \geq 0,\ \|M_{n+1} - A^{-1}\| = \|\Phi(M_n) - \Phi(A^{-1})\| \leq \frac{1}{2}\|M_n - A^{-1}\|.$$

Par récurrence sur $n \geq 0$, nous obtenons que :

$$\forall n \geq 0,\ \|M_n - A^{-1}\| \leq \frac{\|M_0 - A^{-1}\|}{2^n},$$

ce qui assure que :

$$\|M_n - A^{-1}\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

soit que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite A^{-1}.

<u>Exercice 3.</u>

1. Considérons la fonction F définie par :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ F(t,x) = e^x.$$

Comme cette fonction est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$, et localement lipschitzienne en sa seconde variable. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) = e^{x(t)}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale, c'est-à-dire qu'il existe un unique intervalle ouvert $I =]\alpha_-, \alpha_+[$, qui contient 0, tel qu'il existe une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ de ce problème de Cauchy.

2.a. Nous déduisons de l'équation satisfaite par la solution x que :

$$\forall t \in I, \quad \left(e^{-x(t)}\right)' = -x'(t)\, e^{-x(t)} = -1.$$

Comme $x(0) = 0$, il s'ensuit que :

$$\forall t \in I, \quad e^{-x(t)} - e^{-0} = -t,$$

soit que :

$$\forall t \in I, \quad e^{-x(t)} = 1 - t.$$

b. Supposons par l'absurde que $\alpha_+ > 1$. Dans ce cas, le nombre 1 est dans I, et nous déduisons de la question 2.a que :

$$e^{-x(1)} = 0,$$

ce qui est absurde ! En définitive,

$$\alpha_+ \leq 1.$$

c. Comme

$$\forall t \in I, \quad 1 - t = e^{-x(t)} > 0,$$

nous pouvons appliquer la fonction logarithme afin d'obtenir :

$$\forall t \in I, \quad \ln(1-t) = \ln\left(e^{-x(t)}\right) = -x(t),$$

soit :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = -\ln(1-t).$$

3. Considérons la fonction $\tilde{x}$ définie par :

$$\forall t \in]-\infty, 1[, \quad \tilde{x}(t) = -\ln(1-t).$$

Cette fonction est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$, avec :

$\tilde{x}(0) = -\ln(1) = 0$.

De plus, elle satisfait :

$\forall t \in]-\infty, 1[, \ \tilde{x}'(t) = \dfrac{1}{1-t}$.

Comme

$\forall t \in]-\infty, 1[, \ e^{\tilde{x}(t)} = e^{-\ln(1-t)} = \dfrac{1}{1-t}$,

il s'agit d'une solution du problème de Cauchy considéré. Sachant que

$\tilde{x}(t) = -\ln(1-t) \underset{t \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$,

cette solution ne peut se prolonger de façon continue à un intervalle strictement plus grand que $]-\infty, 1[$. Il s'agit donc d'une solution maximale du problème de Cauchy considéré. Par unicité de cette solution maximale, nous concluons que $\alpha_- = -\infty$, $\alpha_+ = 1$, et :

$\forall t \in]-\infty, 1[, \ x(t) = -\ln(1-t)$.

Exercice 4.

1. Considérons la fonction G définie par :

$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \ G(t,x) = t(x - x^2)$.

Comme cette fonction est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est continue et localement lipschitzienne en sa seconde variable. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy :

$$\text{(C)} \begin{cases} x'(t) = G(t, x(t)) = t(x(t) - x(t)^2), \\ x(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale, c'est-à-dire qu'il existe un unique intervalle ouvert J, qui contient 0, tel qu'il existe une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ de ce problème de Cauchy.

2.a. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy

$$\text{(C)} \begin{cases} z'(t) = G(t, z(t)) = t(z(t) - z(t)^2), \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

admet lui-aussi une unique solution maximale. Comme la fonction nulle est solution de ce problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$, il s'agit de cette solution maximale. Comme $x(\tau)=0$, la fonction x est aussi solution de ce problème de Cauchy sur l'intervalle J. Par unicité de la solution maximale, nous concluons que :

$$\forall t \in J,\ x(t)=0.$$

b. Sachant que $x(0)=\frac{1}{2}$, la conclusion de la question 2.a est absurde, d'où nous déduisons que :

$$\forall t \in J,\ x(t)\neq 0.$$

3.a. Comme la fonction x est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle J, et qu'elle ne s'annule pas sur cet intervalle, la fonction y est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. De plus, elle satisfait :

$$\forall t \in J,\ y'(t) = -\frac{x'(t)}{x(t)^2} = -t\left(\frac{1}{x(t)}-1\right) = -t\,y(t)+t.$$

b. Nous déduisons de la question 3.a que :

$$\forall t \in J,\ \left[y(t)\,e^{\frac{t^2}{2}}\right]' = \left[y'(t)+t\,y(t)\right]e^{\frac{t^2}{2}} = t\,e^{\frac{t^2}{2}} = \left[e^{\frac{t^2}{2}}\right]'.$$

Sachant que $y(0)=\frac{1}{x(0)}=2$, il vient :

$$\forall t \in J,\ y(t)\,e^{\frac{t^2}{2}}-2 = e^{\frac{t^2}{2}}-1,$$

soit :

$$\forall t \in J,\ y(t) = 1+e^{-\frac{t^2}{2}},$$

puis finalement :

$$\forall t \in J,\ x(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{1+e^{-\frac{t^2}{2}}}.$$

c. Soit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{x}(t) = \frac{1}{1+e^{-\frac{t^2}{2}}}.$$

La fonction $\tilde{x}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\tilde{x}(0)=\frac{1}{2}$. De plus, elle satisfait :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{x}'(t) = \frac{t\,e^{-\frac{t^2}{2}}}{\left(1+e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^2}.$$

Sachant que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ t\left(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t)^2\right) = \frac{t}{1+e^{-\frac{t^2}{2}}} - \frac{t}{\left(1+e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^2} = \frac{t\, e^{-\frac{t^2}{2}}}{\left(1+e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^2},$$

la fonction $\tilde{x}$ est solution du problème de Cauchy considéré. Comme elle est définie sur $\mathbb{R}$, il s'agit d'une solution maximale. Par unicité de cette solution maximale, nous concluons que $J = \mathbb{R}$, et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ x(t) = \tilde{x}(t) = \frac{1}{1+e^{-\frac{t^2}{2}}}.$$