Corrigé de l'examen

Exercice 1.

1.a. Le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A est égal à

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 \\ -10 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \big(\lambda+3\big)\big(\lambda-2\big),$$

de sorte que le spectre de cette matrice vaut

$$\sigma(A) = \big\{-3, 2\big\}.$$

De plus, si $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -3, alors,

$$\begin{cases} -3x_1 = -3x_1, \\ 10x_1 + 2x_2 = -3x_2, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $2x_1 + x_2 = 0$. L'espace propre $E_{-3}(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De même, si $X = (x_1, x_2)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, alors,

$$\begin{cases} -3x_1 = 2x_1, \\ 10x_1 + 2x_2 = 2x_2, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $x_1 = 0$. L'espace propre $E_2(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la matrice des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 1.a, nous avons

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que

$$e^{tA} = \exp\left(P \begin{pmatrix} -3t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} P^{-1}\right) = P \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Sachant que

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

nous arrivons à

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 2\big(e^{2t} - e^{-3t}\big) & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2.a. D'après la question 1.a, la matrice A possède une valeur propre 2 de partie réelle strictement positive. L'origine n'est donc ni stable, ni asymptotiquement stable pour le système linéaire associé à la matrice A.

b. Considérons la solution $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de donnée initiale $X(0) = X_0$, et supposons que le vecteur X_0 s'écrive sous la forme $X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2$ dans la base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Nous savons alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} X_0 = x_0 e^{tA} e_1 + y_0 e^{tA} e_2 = x_0 e^{-3t} e_1 + y_0 e^{2t} e_2.$$

Par conséquent, les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $X(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont donnés par les formules

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-3t}, \\ y(t) = y_0 e^{2t}. \end{cases}$$

En particulier, nous observons que

$$x(t)^2\, y(t)^3 = x_0^2\, y_0^3.$$

Lorsque $x_0 = 0$, nous constatons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = 0, \qquad \text{et} \qquad y(t) = y_0 e^{2t},$$

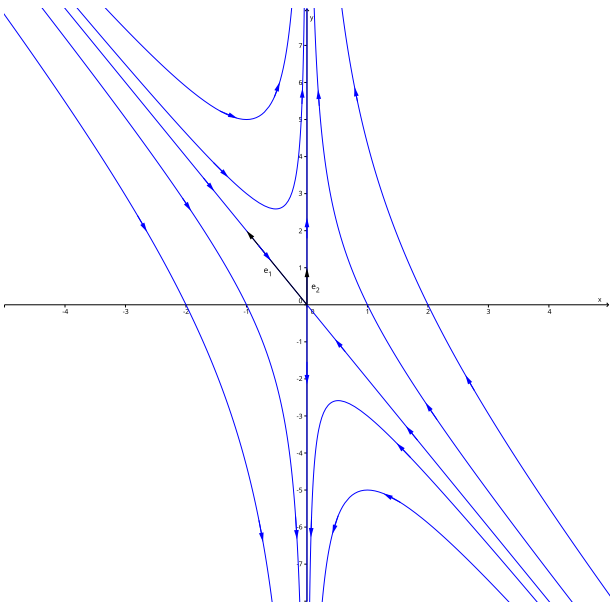
de sorte que la solution parcourt la droite $x = 0$ en s'éloignant de l'origine. De même, quand $y_0 = 0$, nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = x_0 e^{-3t}, \qquad \text{et} \qquad y(t) = 0,$$

et la solution parcourt la droite $y = 0$ en convergeant vers l'origine. Enfin, si $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$, la solution parcourt les courbes d'équation

$$y = y_0 \left(\frac{x_0^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

qui sont de type hyperbolique. Cette étude permet d'aboutir au tracé suivant des solutions



Il s'agit d'un portrait de phase de type point selle ou point col.

Exercice 2.

1.a. Étant donnée une solution $x_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$x_\varepsilon''(t) + a_\varepsilon(t)\, x_\varepsilon(t) = 0,$$

nous posons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ x_\varepsilon'(t) \end{pmatrix}.$$

La fonction X_ε est alors bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, et elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X_\varepsilon'(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon'(t) \\ x_\varepsilon''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\varepsilon'(t) \\ -a_\varepsilon(t)\, x_\varepsilon(t) \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de poser

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_\varepsilon(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{16}\big(1+\varepsilon\sin(t)\big) & 0 \end{pmatrix},$$

pour obtenir l'équation différentielle

$$X_\varepsilon'(t) = A_\varepsilon(t)\, X_\varepsilon(t). \tag{1}$$

Notons de plus que l'application A_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puisque la fonction a_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si une fonction

$$X_\varepsilon = \begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ y_\varepsilon \end{pmatrix},$$

est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation (1), alors les fonctions x_ε et y_ε sont de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et satisfont

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_\varepsilon'(t) = y_\varepsilon(t), \\ y_\varepsilon'(t) = -a_\varepsilon(t)\, x_\varepsilon(t). \end{cases}$$

La fonction x_ε est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée x_ε est égale à la fonction y_ε. Elle vérifie donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_\varepsilon''(t) = y_\varepsilon'(t) = -a_\varepsilon(t)\, x_\varepsilon(t),$$

ce qui suffit à montrer l'équivalence entre les deux équations.

b. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Comme la fonction A_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz assure que, quelle que soit la condition initiale $X_\varepsilon(s) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ de l'équation différentielle (1). La valeur $X_\varepsilon(t)$ de cette solution est donc bien définie, ce qui suffit à montrer que la résolvante $R_\varepsilon(t,s)$ est également bien définie.

Nous savons de plus que cette résolvante satisfait

$$\det\big(R_\varepsilon(t,s)\big) = \exp\left(\int_s^t \operatorname{tr}(A_\varepsilon(u))\, du\right).$$

Sachant que

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \operatorname{tr}\big(A_\varepsilon(u)\big) = 0,$$

nous concluons que

$$\det\big(R_\varepsilon(t,s)\big) = \exp(0) = 1.$$

2.a. Pour $\varepsilon = 0$, la fonction A_0 est identiquement constante, puisqu'elle vaut

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons alors que l'équation (1) équivaut à l'équation différentielle du second ordre

$$x_0''(t) + \frac{1}{16} x_0(t) = 0.$$

Nous savons que les solutions de cette équation différentielle à coefficients constants sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_0(t) = \alpha \cos\left(\frac{t}{4}\right) + \beta \sin\left(\frac{t}{4}\right),$$

pour des nombres réels α et β. La dérivée de ces solutions vaut donc

$$x_0'(t) = -\frac{\alpha}{4} \sin\left(\frac{t}{4}\right) + \frac{\beta}{4} \cos\left(\frac{t}{4}\right).$$

Par l'équivalence de la question 1.a, les solutions de l'équation (1) s'écrivent donc sous la forme

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha \cos\left(\frac{t}{4}\right) + \beta \sin\left(\frac{t}{4}\right) \\ -\frac{\alpha}{4} \sin\left(\frac{t}{4}\right) + \frac{\beta}{4} \cos\left(\frac{t}{4}\right) \end{pmatrix},$$

et valent donc pour $t = 0$

$$X_0(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\beta}{4} \end{pmatrix}.$$

Sachant que

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{4}\right) & 4 \sin\left(\frac{t}{4}\right) \\ -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{t}{4}\right) & \cos\left(\frac{t}{4}\right) \end{pmatrix} X_0(0),$$

nous concluons par définition de la résolvante $R_0(t,0)$ que

$$R_0(t,0) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{4}\right) & 4 \sin(\left(\frac{t}{4}\right) \\ -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{t}{4}\right) & \cos\left(\frac{t}{4}\right) \end{pmatrix}$$

b. Il découle de la question 2.a que

$$\operatorname{tr}\big(R_0(2\pi,0)\big) = 2\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3.a. Par le théorème de dépendance différentiable, nous savons que l'application Φ qui à une fonction $A \in \mathcal{C}^0([0,2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ associe l'unique solution $M \in \mathcal{C}^1([0,2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)\, M(t), \\ M(0) = I_N, \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sachant que l'application $\mathcal{A}$ qui à $\varepsilon \in \mathbb{R}$, associe la fonction $A_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ est bien définie et affine, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de sorte que par composition, la fonction $\Phi \circ \mathcal{A}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^1([0,2\pi], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

Rappelons alors que la résolvante $R_\varepsilon(t,0)$ est l'unique solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} M_\varepsilon'(t) = A_\varepsilon(t)\, M_\varepsilon(t), \\ M_\varepsilon(0) = I_N. \end{cases}$$

L'application $\Phi \circ \mathcal{A}$ vérifie donc

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi \circ \mathcal{A}(\varepsilon)(t) = R_\varepsilon(t,0).$$

Comme elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^1([0,2\pi],\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, et que

$$\begin{aligned} \forall (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2,\ \big|\big|\big|R_{\varepsilon_1}(2\pi,0) - R_{\varepsilon_2}(2\pi,0)\big|\big|\big| &\leq \max_{t\in[0,2\pi]} \big|\big|\big|R_{\varepsilon_1}(t,0) - R_{\varepsilon_2}(t,0)\big|\big|\big| \\ &\leq \big\|R_{\varepsilon_1}(\cdot,0) - R_{\varepsilon_2}(\cdot,0)\big\|_{\mathcal{C}^1([0,2\pi],\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))}, \end{aligned}$$

nous concluons que l'application $\varepsilon \mapsto R_\varepsilon(2\pi,0)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sachant que la trace est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'application $\varepsilon \mapsto \mathrm{tr}(R_\varepsilon(2\pi,0))$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

D'après la question 2.b, nous savons que

$$\mathrm{tr}\big(R_0(2\pi,0)\big) = 0,$$

et par continuité, il existe donc un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall -\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ \Big|\mathrm{tr}\big(R_\varepsilon(2\pi,0)\big)\Big| < 2.$$

b. Le polynôme caractéristique χ_ε de la résolvante $R_\varepsilon(2\pi,0)$ vaut

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}\big(R_\varepsilon(2\pi,0)\big)\lambda + \det\big(R_\varepsilon(2\pi,0)\big).$$

Le discriminant de ce polynôme vaut

$$\Delta_\varepsilon = \mathrm{tr}\big(R_\varepsilon(2\pi,0)\big)^2 - 4\det\big(R_\varepsilon(2\pi,0)\big).$$

D'après les questions 1.b et 3.a, ce discriminant satisfait

$$\Delta_\varepsilon < 4 - 4 = 0,$$

et le polynôme caractéristique χ_ε possède donc deux racines complexes μ et $\bar{\mu}$, qui sont conjuguées puisque le polynôme χ_ε est à coefficients réels. Ce polynôme s'écrit alors

$$\chi_\varepsilon(\lambda) = \big(\lambda - \mu\big)\big(\lambda - \bar{\mu}\big) = \lambda^2 - \big(\mu + \bar{\mu}\big)\lambda + \mu\bar{\mu},$$

de sorte que

$$\mu\bar{\mu} = \det\big(R_\varepsilon(2\pi,0)\big).$$

D'après la question 1.b, nous obtenons donc

$$|\mu|^2 = 1,$$

ce qui assure que μ, puis $\bar{\mu}$, sont de module un.

c. L'équation différentielle (1) est linéaire à coefficients 2π-périodiques. L'origine est donc asymptotiquement stable pour cette équation si et seulement si toutes les valeurs propres de la résolvante $R_\varepsilon(2\pi,0)$ sont de module strictement inférieur à 1, tandis qu'elle est stable

si et seulement si toutes ces valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1, et que la résolvante $R_\varepsilon(2\pi, 0)$ est diagonalisable en ses valeurs propres de module 1.

Lorsque $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il résulte de la question 3.b que la résolvante $R_\varepsilon(2\pi, 0)$ possède deux valeurs propres complexes de module 1, et l'origine ne peut donc être asymptotiquement stable pour l'équation (1). Par contre, la matrice $R_\varepsilon(2\pi, 0)$ possède exactement deux valeurs propres, donc est diagonalisable. En particulier, elle est diagonalisable en ses deux valeurs propres de module 1, ce qui suffit pour affirmer que l'origine est stable pour l'équation différentielle (1).

Exercice 3.

1.a. Soit $x \in E$. Comme la fonction x est 2π-périodique, nous savons que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t)|,$$

et comme elle est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, elle atteint son maximum sur ce compact. Nous concluons que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \max_{t\in[0,2\pi]} |x(t)| \in \mathbb{R}_+.$$

La quantité $\|x\|_\infty$ est donc bien définie et positive. De plus, nous savons que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |\lambda\, x(t)| = |\lambda|\, |x(t)|,$$

de sorte que

$$\|\lambda\, x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\lambda\, x(t)| = |\lambda| \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = |\lambda|\, \|x\|_\infty.$$

De même, nous déduisons de l'inégalité triangulaire que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|,$$

d'où l'inégalité

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t) + y(t)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| + |y(t)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Enfin nous vérifions que

$$\|x\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ |x(t)| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$

ce qui permet de conclure que l'application $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur l'espace vectoriel E.

b. Considérons une suite de Cauchy $(x_n)_{n\geq 0}$ de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Par définition, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N \geq 0$ tel que

$$\forall m, n \geq N,\ \|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

En particulier, nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon,$$

de sorte que les suites $(x_n(t))_{n\geq 0}$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est un espace complet, elles sont convergentes, et nous pouvons donc définir une application $x_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} x_\infty(t).$$

c. Pour $\varepsilon > 0$, considérons un nombre $N \geq 0$ tel que

$$\forall m, n \geq N,\ \|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon,$$

de sorte qu'à la limite $m \to +\infty$,

$$|x_n(t) - x_\infty(t)| \leq \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est valable quel que soit $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\|x_n - x_\infty\|_\infty \leq \varepsilon,$$

dès que $n \geq N$. Cette dernière inégalité suffit à prouver que

$$\|x_n - x_\infty\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

d. La question 1.c assure que les fonctions x_n convergent uniformément vers la fonction x_∞ sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions x_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$, la fonction x_∞ est aussi continue sur $\mathbb{R}$. De plus, nous savons que

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x_n(t + 2\pi) = x_n(t),$$

d'où par la question 1.b, à la limite $n \to +\infty$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_\infty(t + 2\pi) = x_\infty(t).$$

La fonction x_∞ est donc 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et elle appartient ainsi à l'espace E. Sachant que

$$\|x_n - x_\infty\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

par la question 1.c, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans E de limite x_∞. En définitive, toute suite de Cauchy de E est convergente, ce qui suffit à montrer que E est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2.a. Soit $x \in E$. La fonction x est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition avec la fonction continue F, la fonction $s \mapsto F(s, x(s))$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \int_0^t F(s, x(s))\, ds$ est par conséquent continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, l'intégrale $\int_0^{2\pi} F(s, x(s))\, ds$ est bien définie, ce qui suffit à conclure que la fonction $\Phi(x)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $y \in E$. La fonction y est continue sur $\mathbb{R}$, de sorte que l'intégrale $\int_t^{t+2\pi} y(s)\, ds$ est bien définie quel que soit $t \in \mathbb{R}$. De plus, par la formule de Chasles, nous avons

$$\int_t^{t+2\pi} y(s)\, ds = \int_t^0 y(s)\, ds + \int_0^{2\pi} y(s)\, ds + \int_{2\pi}^{t+2\pi} y(s)\, ds.$$

Rappelons alors que la fonction y est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Le changement de variables $s = u + 2\pi$ conduit donc à la formule

$$\int_{2\pi}^{t+2\pi} y(s)\, ds = \int_0^t y(u + 2\pi)\, du = \int_0^t y(u)\, du = -\int_t^0 y(u)\, du,$$

et nous pouvons conclure que

$$\int_t^{t+2\pi} y(s)\,ds = \int_0^{2\pi} y(s)\,ds.$$

c. Soit $x \in E$. D'après la question 2.a, nous savons déjà que la fonction $\Phi(x)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, cette fonction satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(x)(t+2\pi) = \int_0^{t+2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds - \frac{t+2\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds.$$

Par la formule de Chasles, nous avons alors

$$\int_0^{t+2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds = \int_0^{t} F\big(s, x(s)\big)\,ds + \int_t^{t+2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds.$$

Comme la fonction x est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, nous déduisons de la première hypothèse sur la fonction F que

$$\forall s \in \mathbb{R},\ F\big(s+2\pi, x(s+2\pi)\big) = F\big(s+2\pi, x(s)\big) = F\big(s, x(s)\big).$$

Nous pouvons donc appliquer la question 2.b afin d'obtenir

$$\int_t^{t+2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds = \int_0^{2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds,$$

ce qui conduit à l'expression

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(x)(t+2\pi) =& \int_0^{t} F\big(s, x(s)\big)\,ds + \int_0^{2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds \\ &- \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds - \int_0^{2\pi} F\big(s, x(s)\big)\,ds \\ =&\Phi(x)(t).\end{aligned}$$

La fonction $\Phi(x)$ est donc 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. En conclusion elle appartient à l'espace E et l'application Φ est bien définie de E dans E.

3.a. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Par définition de l'application Φ et par linéarité de l'intégrale, nous avons

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t) =& \int_0^{t} \Big(F\big(s, x_1(s)\big) - F\big(s, x_2(s)\big)\Big)\,ds \\ &- \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(F\big(s, x_1(s)\big) - F\big(s, x_2(s)\big)\Big)\,ds.\end{aligned}$$

Comme la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, nous pouvons de plus écrire

$$\forall s \in \mathbb{R},\ F\big(s, x_1(s)\big) - F\big(s, x_2(s)\big) = \int_{x_2(s)}^{x_1(s)} \frac{\partial F}{\partial x}(s, z)\,dz,$$

de sorte que par la seconde hypothèse sur la fonction F,

$$\Big|F\big(s, x_1(s)\big) - F\big(s, x_2(s)\big)\Big| \leq \left|\int_{x_2(s)}^{x_1(s)} \frac{K}{4\pi}\,dz\right| = \frac{K}{4\pi}\big|x_1(s) - x_2(s)\big| \leq \frac{K}{4\pi}\big\|x_1 - x_2\big\|_\infty.$$

Nous obtenons donc

$$\big|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)\big| \leq \left| \int_0^t \frac{K}{4\pi} \big\|x_1 - x_2\big\|_\infty \, ds \right| + \frac{|t|}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{K}{4\pi} \big\|x_1 - x_2\big\|_\infty \, ds \right|,$$

d'où pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$\big|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)\big| \leq \frac{2K|t|}{4\pi} \big\|x_1 - x_2\big\|_\infty \leq K \big\|x_1 - x_2\big\|_\infty.$$

Sachant que les fonctions $\Phi(x_1)$ et $\Phi(x_2)$ sont dans E, nous concluons que

$$\big\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\big\|_\infty = \max_{t \in [0,2\pi]} \big|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)\big| \leq K \big\|x_1 - x_2\big\|_\infty.$$

La fonction Φ est donc K-lipschitzienne sur E : puisqu'elle est définie de E à valeurs dans E d'après la question 2.c, elle est K-contractante sur E.

b. Nous appliquons le théorème du point fixe. D'après la question 1.d, l'espace E est un espace de Banach pour la norme $\| \cdot \|_\infty$, et d'après la question 3.a, l'application Φ est K-contractante sur E. Elle possède donc un unique point fixe $y \in E$.

c. Considérons l'unique point fixe y de la fonction Φ sur E. Cette fonction est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \int_0^t F\big(s, y(s)\big) \, ds - \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\big(s, y(s)\big) \, ds.$$

Comme la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction y, la fonction $s \mapsto F\big(s, y(s)\big)$ est par composition continue sur $\mathbb{R}$, auquel cas la fonction $t \mapsto \int_0^t F\big(s, y(s)\big) \, ds$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il résulte donc de la formule précédente pour la fonction y que cette fonction est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus sa dérivée satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = F\big(t, y(t)\big) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\big(s, y(s)\big) \, ds,$$

et il suffit de poser

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\big(s, y(s)\big) \, ds,$$

pour conclure que la fonction $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une solution 2π-périodique de l'équation différentielle

$$z'(t) = F\big(t, z(t)\big) - m.$$

d. Nous appliquons le résultat de la question 3.c à la fonction

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ F(t, x) = \frac{1}{16}\Big(\sin(t)^2 + \ln\big(x^2 + 1\big)\Big).$$

Par les opérations élémentaires sur les fonctions, cette application est en effet bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et elle vérifie

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ F(t, x) = \frac{1}{16}\Big(\sin(t + 2\pi)^2 + \ln\big(x^2 + 1\big)\Big) = F(t, x),$$

par 2π-périodicité de la fonction sinus. De plus nous calculons

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = \frac{x}{8(x^2 + 1)}.$$

Sachant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2|x| \leq x^2 + 1,$$

nous concluons que

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right| \leq \frac{1}{16} = \frac{K}{4\pi},$$

pour $K = \pi/4 \in [0,1[$. La fonction F considérée vérifie donc les hypothèses de la question 3.c, et nous concluons qu'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ telle que l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{1}{16}\Big(\sin(t)^2 + \ln\big(f^2(t)+1\big)\Big) - m,$$

possède une solution 2π-périodique $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.