CY Cergy Paris Université | **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques | **2023-2024**

Corrigé de l'examen

Exercice 1.

1.a. Le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A est égal à

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i),$$

de sorte que le spectre de cette matrice vaut

$$\sigma(A) = \big\{ -1 - i, -1 + i \big\}.$$

De plus, si $Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-1 - i$, alors,

$$\begin{cases} -z_2 = -(1 + i) z_1, \\ 2z_1 - 2z_2 = -(1 + i) z_2, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $z_2 = (1 + i) z_1$. L'espace propre $E_{-1-i}(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}.$$

De même, si $Z = (z_1, z_2)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-1 + i$, alors,

$$\begin{cases} -z_2 = (-1 + i) z_1, \\ 2z_1 - 2z_2 = (-1 + i) z_2, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $z_2 = (1 - i) z_1$. L'espace propre $E_{-1+i}(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}.$$

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la matrice des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + i & 1 - i \end{pmatrix}.$$

D'après la question 1.a, nous avons

$$A = P \begin{pmatrix} -1 - i & 0 \\ 0 & -1 + i \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que

$$e^{tA} = \exp\left(P \begin{pmatrix} -(1 + i)t & 0 \\ 0 & -(1 - i)t \end{pmatrix} P^{-1} \right) = P \begin{pmatrix} e^{-(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{-(1-i)t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Sachant que

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 - i & -1 \\ -1 - i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i - 1 & 1 \\ 1 + i & -1 \end{pmatrix},$$

nous arrivons à

$$e^{tA} = \frac{e^{-t}}{2i} \begin{pmatrix} (i-1)e^{-it} + (1+i)e^{it} & e^{-it} - e^{it} \\ 2(e^{it} - e^{-it}) & -e^{it} + e^{-it} + i(e^{it} + e^{-it}) \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors d'appliquer les formules d'Euler

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

pour conclure que

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) & -\sin(t) \\ 2\sin(t) & \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}.$$

2.a. D'après la question 1.a, les deux valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle -1 strictement négative. L'origine est donc stable et asymptotiquement stable pour le système linéaire associé à la matrice A.

b. Considérons le vecteur propre $P_1 = e_1 + ie_2$, où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition, nous avons

$$Ae_1 + iAe_2 = -(1+i)(e_1 + ie_2) = -e_1 + e_2 + i(-e_1 - e_2),$$

de sorte que

$$Ae_1 = -e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad Ae_2 = -e_1 - e_2.$$

Sachant que les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\mathbb{R}^2$, et la matrice de passage $Q \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ associée satisfait

$$A = Q \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1} = -I_2 + QJQ^{-1},$$

où nous avons noté

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = e^{-tI_2 + tQJQ^{-1}} = e^{-t}\, e^{tQJQ^{-1}} = e^{-t}\, Q\, e^{tJ}\, Q^{-1}.$$

Vérifions alors que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

En effet, nous avons

$$\begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = I_2,$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} M'(t) = JM(t), \\ M(0) = I_2, \end{cases}$$

nous déduisons des formules précédentes que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

et nous concluons que

$$e^{tA} = e^{-t}\, Q \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Considérons alors la solution $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de l'équation $X'(t) = AX(t)$ pour la donnée initiale $X(0) = X_0$, et supposons que le vecteur X_0 s'écrive sous la forme $X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2$. Nous déduisons de la formule précédente que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = x_0 e^{tA} e_1 + y_0 e^{tA} e_2 = e^{-t}\Big(x_0\big(\cos(t) e_1 + \sin(t) e_2\big) + y_0\big(-\sin(t) e_1 + \cos(t) e_2\big)\Big).$$

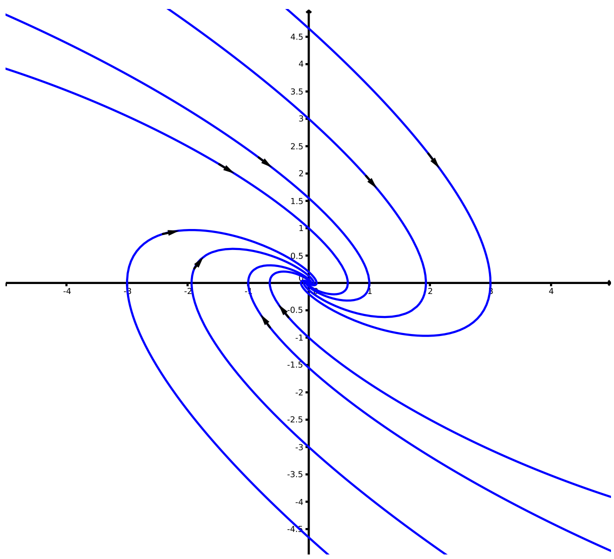
Par conséquent, les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $X(t)$ dans la base (e_1, e_2) sont donnés par les formules

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\big(x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t)\big), \\ y(t) = e^{-t}\big(x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)\big). \end{cases}$$

En particulier, nous observons que

$$x(t)^2 + y(t)^2 = e^{-2t}\big(x_0^2 + y_0^2\big),$$

de sorte que les solutions parcourent des spirales dans la direction de l'origine. En conclusion, nous aboutissons au tracé suivant des solutions :



Il s'agit d'un portrait de phase de type foyer stable.

3.a. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, nous observons que l'application A_ε est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz, quelle que soit la condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe donc une unique solution globale $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ X_\varepsilon'(t) = A_\varepsilon(t) X_\varepsilon(t), \\ X_\varepsilon(0) = X_0. \end{cases}$$

b. Soit $\tau > 0$ fixé. Considérons l'application $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \mathcal{A}(\varepsilon) = A_\varepsilon.$$

L'application $\mathcal{A}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. De plus, il s'agit d'une application affine en la variable ε, puisque

$$\forall (\varepsilon, t) \in \mathbb{R},\ \mathcal{A}(\varepsilon)(t) = A + \varepsilon B(t),$$

où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

L'application $\mathcal{A}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \mathcal{A}'(\varepsilon) = B, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2,\ \mathcal{A}^{(k)}(\varepsilon) = 0.$$

Par la version affine du théorème de dépendance continue, nous savons par ailleurs que l'application qui à une fonction $A \in \mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, associe la solution $X \in \mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) X(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ dans $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$. Par composition, l'application qui à un nombre $\varepsilon \in \mathbb{R}$, associe la solution $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$, est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$. En particulier, les fonctions

$$Y_0 = \big(X_\varepsilon\big)_{|\varepsilon=0}, \quad \text{et} \quad Y_1 = \frac{d}{d\varepsilon}\big(X_\varepsilon\big)_{|\varepsilon=0},$$

sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ de $[-\tau, \tau]$ dans $\mathbb{R}^2$. Sachant que le nombre τ est arbitraire, elles sont en fait de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Enfin, par la formule de Taylor-Young, elles satisfont

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ X_\varepsilon = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon R_\varepsilon,$$

avec

$$\big\| R_\varepsilon \big\|_{\mathcal{C}^1([-\tau,\tau],\mathbb{R}^2)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

4.a. D'après la question 3.b, la fonction Y_0 est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ Y_0'(t) = A_0(t) Y_0(t) = A Y_0(t), \\ Y_0(0) = X_0, \end{cases}$$

de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_0(t) = e^{tA} X_0.$$

b. Comme le développement de la question 3.b est valable dans $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$ pour tout nombre $\tau > 0$, nous savons que

$$X_\varepsilon' = Y_0' + \varepsilon Y_1' + \varepsilon R_\varepsilon',$$

avec

$$\left\|R_\varepsilon'\right\|_{\mathcal{C}^0([-\tau,\tau],\mathbb{R}^2)} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

Il suffit donc de développer l'équation satisfaite par la fonction X_ε pour obtenir

$$\forall t \in [-\tau,\tau],\ Y_0'(t) + \varepsilon Y_1'(t) + \varepsilon R_\varepsilon'(t) = A_\varepsilon(t) Y_0(t) + \varepsilon A_\varepsilon(t) Y_1(t) + \varepsilon A_\varepsilon(t) R_\varepsilon(t).$$

Sachant que $A_\varepsilon(t) = A + \varepsilon B(t)$, nous arrivons au développement

$$Y_0'(t) + \varepsilon Y_1'(t) + \varepsilon R_\varepsilon'(t) = AY_0(t) + \varepsilon\big(B(t)Y_0(t) + AY_1(t)\big) + \varepsilon\Big(A_\varepsilon(t)R_\varepsilon(t) + \varepsilon B(t)Y_1(t)\Big).$$

L'identification du terme d'ordre un de ce développement conduit à l'équation

$$\forall t \in [-\tau,\tau],\ Y_1'(t) = B(t)Y_0(t) + AY_1(t).$$

Sachant que le nombre τ est ici arbitraire, cette équation est en fait valable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $t = 0$, nous avons

$$X_0 = X_\varepsilon(0) = Y_0(0) + \varepsilon Y_1(0) + \varepsilon R_\varepsilon(0).$$

Sachant que $Y_0(0) = X_0$ par la question 3.b, l'identification du terme d'ordre un de ce développement fournit la condition initiale

$$Y_1(0) = 0,$$

et la fonction Y_1 est bien solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ Y_1'(t) = AY_1(t) + B(t)Y_0(t), \\ Y_1(0) = 0. \end{cases}$$

c. D'après la question 4.b, nous pouvons appliquer la méthode de variation de la constante afin d'obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_1(t) = e^{tA} Y_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\, B(s)\, Y_0(s)\, ds.$$

Comme $Y_1(0) = 0$ et $Y_0(s) = e^{sA} X_0$ par les questions 4.a et 4.b, nous concluons que

$$Y_1(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\, B(s)\, e^{sA}\, X_0\, ds.$$

Exercice 2.

1.a. Comme la fonction B est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, la résolvante $t \mapsto R(t,0)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$, et elle satisfait

$$\forall t \geq 0,\ \frac{d}{dt}\big(R(t,0)\big) = B(t)\, R(t,0).$$

Sachant que

$$R(0,0) = I_N,$$

nous pouvons intégrer cette équation afin d'obtenir

$$R(t,0) = R(0,0) + \int_0^t \frac{d}{ds}\big(R(s,0)\big)\, ds = I_N + \int_0^t B(s)\, R(s,0)\, ds.$$

b. Par définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned}\forall (M,H) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})^2,\ \|M+H\|^2 &= \|M\|^2 + \langle H, M\rangle + \langle M, H\rangle + \|H\|^2 \\ &= \|M\|^2 + \langle H, M\rangle + \langle M, H\rangle + \underset{\|H\|\to 0}{o}\big(\|H\|\big),\end{aligned}$$

ce qui assure que la fonction $\mathcal{N}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}),\ \mathcal{N}(M) = \|M\|^2,$$

est différentiable, donc continue sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, avec

$$\forall (M,H) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})^2,\ d\mathcal{N}(M)(H) = \langle H, M\rangle + \langle M, H\rangle.$$

Nous déduisons alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\big|d\mathcal{N}(M_2)(H) - d\mathcal{N}(M_1)(H)\big| = \big|\langle H, M_2 - M_1\rangle + \langle M_2 - M_1, H\rangle\big| \leq 2\|M_2 - M_1\|\,\|H\|,$$

de sorte que

$$\sup_{H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \frac{|d\mathcal{N}(M_2)(H) - d\mathcal{N}(M_1)(H)|}{\|H\|} \leq 2\|M_2 - M_1\| \underset{M_2 \to M_1}{\to} 0.$$

L'application différentielle $d\mathcal{N}$ est donc continue et nous concluons que la fonction $\mathcal{N}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Sachant que l'application $t \mapsto R(t,0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, nous déduisons de la question 1.a que la fonction Φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et nous pouvons calculer

$$\begin{aligned}\forall t \geq 0,\ \Phi'(t) &= d\mathcal{N}\Big(I_N + \int_0^t B(s)\,R(s,0)\,ds\Big)\big(B(t)R(t,0)\big) \\ &= \Big\langle B(t)R(t,0), I_N + \int_0^t B(s)\,R(s,0)\,ds\Big\rangle + \Big\langle I_N + \int_0^t B(s)\,R(s,0)\,ds, B(t)R(t,0)\Big\rangle.\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\Phi'(t) \leq 2\big\|B(t)\big\|\,\big\|R(t,0)\big\|\,\Big\|I_N + \int_0^t B(s)\,R(s,0)\,ds\Big\|.$$

Il découle ensuite de l'identité de la question 1.a que

$$\big\|R(t,0)\big\| \leq \Big\|I_N + \int_0^t B(s)\,R(s,0)\,ds\Big\|,$$

et nous concluons que

$$\Phi'(t) \leq 2\big\|B(t)\big\|\,\Big\|I_N + \int_0^t B(s)\,R(s,0)\,ds\Big\|^2 \leq 2\big\|B(t)\big\|\,\Phi(t).$$

c. Nous déduisons de l'inégalité de la question 1.b que

$$\forall t \geq 0,\ \Big(e^{-2\int_0^t \|B(s)\|\,ds}\,\Phi(t)\Big)' = e^{-2\int_0^t \|B(s)\|\,ds}\Big(\Phi'(t) - 2\big\|B(t)\big\|\,\Phi(t)\Big) \leq 0,$$

de sorte que

$$e^{-2\int_0^t \|B(s)\|\,ds}\,\Phi(t) \leq \Phi(0).$$

Nous calculons alors
$$\Phi(0) = \|I_N\|^2 = \operatorname{tr}(I_N^2) = N,$$
d'où l'inégalité
$$\Phi(t) \leq N e^{2\int_0^t \|B(s)\|\,ds}.$$
Il suffit donc de revenir à la question 1.a pour obtenir
$$\big\|R(t,0)\big\|^2 \leq \Phi(t) \leq N\, e^{2\int_0^t \|B(s)\|\,ds},$$
ce qui conduit à l'inégalité
$$\big\|R(t,0)\big\| \leq \sqrt{N}\, e^{\int_0^t \|B(s)\|\,ds}.$$

d. Rappelons que par la question 1.c,
$$\forall t \geq 0,\ \big\|R(t,0)\big\| \leq \sqrt{N}\, e^{\int_0^t \|B(s)\|\,ds}.$$
Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \|B(s)\|\,ds$ est convergente, il vient
$$\big\|R(t,0)\big\| \leq \sqrt{N}\, e^{\int_0^{+\infty} \|B(s)\|\,ds},$$
ce qui permet d'affirmer que la fonction $t \mapsto R(t,0)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

2.a. Comme à la question 1.a, nous déduisons de la formule
$$\forall t \geq 0,\ \frac{d}{dt}\big(R(t,0)\big) = B(t)\,R(t,0),$$
que
$$\forall t \geq s \geq 0,\ R(t,0) - R(s,0) = \int_s^t B(u)\,R(u,0)\,du.$$
Sachant que la fonction $u \mapsto R(u,0)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, il existe un nombre $C \geq 0$ tel que
$$\forall u \geq 0,\ \big\|R(u,0)\big\| \leq C,$$
de sorte que
$$\big\|R(t,0) - R(s,0)\big\| \leq \int_s^t \big\|B(u)\big\|\,\big\|R(u,0)\big\|\,du \leq C \int_s^t \big\|B(u)\big\|\,du.$$

b. Considérons d'abord la suite de matrices $(R_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$\forall n \geq 0,\ R_n = R(n,0).$$
Nous déduisons de la question 2.a que
$$\forall n \geq m \geq 0,\ \big\|R_n - R_m\big\| \leq C \int_m^n \big\|B(u)\big\|\,du \leq C \int_m^{+\infty} \big\|B(u)\big\|\,du.$$
Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \|B(u)\|\,du$ est convergente, nous savons que
$$C \int_m^{+\infty} \big\|B(u)\big\|\,du \underset{m\to+\infty}{\to} 0.$$

Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier $N \geq 0$ tel que

$$\forall m \geq N,\, C \int_m^{+\infty} \big\|B(u)\big\|\, du \leq \varepsilon,$$

ce qui assure que

$$\forall n \geq m \geq N,\, \big\|R_n - R_m\big\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $(R_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Comme l'espace des matrices $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est complet, il existe une matrice $R_\infty \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que

$$R(n,0) = R_n \underset{n\to+\infty}{\to} R_\infty.$$

Nous revenons alors à la question 2.a pour affirmer que

$$\begin{aligned}\forall t \geq m \geq N,\, \big\|R(t,0) - R_\infty\big\| &\leq \big\|R(t,0) - R(m,0)\big\| + \big\|R(m,0) - R_\infty\big\| \\ &\leq C \int_m^t \big\|B(u)\big\|\, du + \big\|R(m,0) - R_\infty\big\|.\end{aligned}$$

Sachant que

$$C \int_m^t \big\|B(u)\big\|\, du \leq C \int_m^{+\infty} \big\|B(u)\big\|\, du \leq \varepsilon,$$

nous obtenons

$$\big\|R(t,0) - R_\infty\big\| \leq \varepsilon + \big\|R(m,0) - R_\infty\big\|,$$

et nous déduisons de la convergence de la suite $(R_n)_{n\geq 0}$ l'existence d'un nombre $M \geq 0$ tel que

$$\forall t \geq M,\, \big\|R(t,0) - R_\infty\big\| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui équivaut au fait que

$$R(t,0) \underset{t\to+\infty}{\to} R_\infty.$$

3.a. Notons $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ le spectre de la matrice A. Comme cette matrice est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e^{t\lambda_N} \end{pmatrix} P^{-1},$$

Par hypothèse, nous savons de plus qu'il existe des nombres réels θ_1, …, θ_N tels que

$$\forall 1 \leq j \leq N,\, \lambda_j = i\theta_j,$$

d'où la formule

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{it\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{it\theta_N} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Nous pouvons alors borner la norme

$$\big\| e^{tA} \big\|_\infty = \max_{1 \leq k, \ell \leq N} \Big| \big[e^{tA} \big]_{k,\ell} \Big|,$$

de la matrice e^{tA}. Étant donnés deux entiers $1 \leq k, \ell \leq N$, nous avons en effet

$$\big[e^{tA} \big]_{k,\ell} = \sum_{m=1}^{N} P_{k,m} e^{i\theta_m} \big[P^{-1} \big]_{m,\ell},$$

ce qui assure que

$$\Big| \big[e^{tA} \big]_{k,\ell} \Big| \leq \sum_{m=1}^{N} \big| P_{k,m} \big| \Big| \big[P^{-1} \big]_{m,\ell} \Big|,$$

et nous concluons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \big\| e^{tA} \big\|_\infty \leq C,$$

où

$$C = \max_{1 \leq k, \ell \leq N} \sum_{m=1}^{N} \big| P_{k,m} \big| \Big| \big[P^{-1} \big]_{m,\ell} \Big|.$$

En particulier, l'application $t \mapsto e^{tA}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. L'application $t \mapsto e^{-tA}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme l'application $t \mapsto A + B(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, la résolvante $t \mapsto \mathcal{R}(t, 0)$ est aussi bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et par produit, l'application $\mathcal{S}$ est également bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, nous calculons

$$\forall t \geq 0, \mathcal{S}'(t) = \frac{d}{dt}\big(e^{-tA} \big) \mathcal{R}(t, 0) + e^{-tA} \frac{d}{dt}\big(\mathcal{R}(t, 0) \big).$$

Sachant que

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-tA} \big) = -A e^{-tA} = -e^{-tA} A, \quad \text{ et } \quad \frac{d}{dt}\big(\mathcal{R}(t, 0) \big) = \big(A + B(t) \big) \mathcal{R}(t, 0),$$

nous obtenons

$$\mathcal{S}'(t) = -e^{-tA} A \mathcal{R}(t, 0) + e^{-tA} \big(A + B(t) \big) \mathcal{R}(t, 0) = e^{-tA} \, B(t) \, \mathcal{R}(t, 0) = e^{-tA} B(t) e^{tA} \mathcal{S}(t).$$

c. Introduisons la norme $\| \cdot \|_2$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}), \ \big\| M \big\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}} \frac{\| M X \|_2}{\| X \|_2},$$

où $\| \cdot \|_2$ désigne la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^N$. La norme $\| \cdot \|_2$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, et nous pouvons donc calculer

$$\forall t \geq 0, \ \big\| e^{-tA} B(t) e^{tA} \big\|_2 \leq \big\| e^{-tA} \big\|_2 \, \big\| B(t) \big\|_2 \, \big\| e^{tA} \big\|_2.$$

D'après la question 3.a, il existe un nombre positif C tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\|e^{tA}\right\|_2 \leq C,$$

d'où l'inégalité

$$\left\|e^{-tA}B(t)e^{tA}\right\|_2 \leq C^2 \left\|B(t)\right\|_2.$$

Par équivalence des normes dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, il existe donc un nombre $\lambda > 0$ tel que

$$\left\|e^{-tA}B(t)e^{tA}\right\| \leq C^2\,\lambda\,\left\|B(t)\right\|.$$

Sachant que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left\|B(t)\right\| dt$ est convergente, nous déduisons de l'inégalité précédente que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left\|e^{-tA}B(t)e^{tA}\right\| dt$ est aussi convergente.

d. Par définition de la fonction $\mathcal{S}$, nous savons que

$$\mathcal{S}(0) = e^{-0A}\mathcal{R}(0,0) = I_N \times I_N = I_N.$$

D'après la question 3.b, cette fonction est aussi solution de l'équation différentielle linéaire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{S}'(t) = e^{-tA}B(t)e^{tA}\mathcal{S}(t).$$

Par unicité de la résolvante, il s'agit donc de la résolvante $\mathfrak{R}(t,0)$ associée à l'équation différentielle linéaire

$$X'(t) = \mathfrak{B}(t)X(t),$$

où nous avons noté

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathfrak{B}(t) = e^{-tA}B(t)e^{tA}.$$

Sachant que

$$\int_0^{+\infty} \left\|\mathfrak{B}(t)\right\| dt = \int_0^{+\infty} \left\|e^{-tA}B(t)e^{tA}\right\| dt < +\infty,$$

par la question 3.c, nous déduisons de la question 2.b qu'il existe une matrice $\mathcal{S}_\infty \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathfrak{R}(t,0) \underset{t\to+\infty}{\to} \mathcal{S}_\infty.$$

Comme $\mathfrak{R}(t,0) = \mathcal{S}(t) = e^{-tA}\mathcal{R}(t,0)$, nous concluons que

$$e^{-tA}\mathcal{R}(t,0) \underset{t\to+\infty}{\to} \mathcal{S}_\infty.$$

4.a. Considérons une solution x de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et posons

$$\forall t \geq 0,\ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

La fonction X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et elle satisfait

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -(1+q(t))x(t) \end{pmatrix} = \big(A + B(t)\big)X(t),$$

où nous avons noté

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0,\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si $X = (X_1, X_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ est solution de ce système différentiel, alors, les fonctions X_1 et X_2 satisfont

$$\forall t \in I,\ X_1'(t) = X_2(t), \qquad \text{et} \qquad X_2'(t) = -\big(1 + q(t)\big)X_1(t).$$

Par la première de ces formules, la fonction $x = X_1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et par la seconde, elle satisfait

$$x''(t) + (1 + q(t))x(t) = 0.$$

L'équation différentielle est donc bien équivalente au système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = \big(A + B(t)\big)X(t).$$

b. Nous cherchons à appliquer la question 3.d à la résolvante $\mathcal{R}(t, 0)$ du système différentiel obtenu à la question 4.a. Nous commençons par diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique vaut

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

et ses racines complexes sont donc égales à i et $-i$. En particulier les valeurs propres de la matrice A sont imaginaires pures. De plus, si $Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-i$, alors,

$$\begin{cases} z_2 = -iz_1, \\ -z_1 = -iz_2, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $z_2 = -iz_1$. L'espace propre $E_{-i}(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

De même, si $Z = (z_1, z_2)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre i, alors,

$$\begin{cases} z_2 = iz_1, \\ -z_1 = iz_2, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $z_2 = iz_1$. L'espace propre $E_i(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

satisfait

$$A = P \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Nous calculons alors

$$P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$e^{tA} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i(e^{it}+e^{-it}) & e^{it}-e^{-it} \\ e^{-it}-e^{it} & i(e^{it}+e^{-it}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

En parallèle, nous observons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \big\|B(t)\big\|^2 = \mathrm{tr}\big({}^t\overline{B(t)}B(t)\big) = q(t)^2,$$

de sorte que

$$\int_0^{+\infty} \big\|B(t)\big\| \, dt = \int_0^{+\infty} |q(t)| \, dt < +\infty.$$

Nous pouvons donc appliquer la question 3.d et trouver ainsi une matrice $\mathcal{S}_\infty \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$e^{-tA}\,\mathcal{R}(t,0) \underset{t\to+\infty}{\to} \mathcal{S}_\infty.$$

Étant donnée une solution $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle considérée, nous déduisons par ailleurs de la question 4.a et de la définition de la résolvante $\mathcal{R}(t,0)$ que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \mathcal{R}(t,0)\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix},$$

d'où la formule

$$e^{-tA}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = e^{-tA}\mathcal{R}(t,0)\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix},$$

puis la convergence

$$e^{-tA}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \underset{t\to+\infty}{\to} \mathcal{S}_\infty\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}.$$

Nous calculons alors

$$e^{-tA}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)\cos(t) - x'(t)\sin(t) \\ x(t)\sin(t) + x'(t)\cos(t) \end{pmatrix},$$

et nous déduisons de la convergence précédente qu'il existe des nombres $\alpha_\infty \in \mathbb{R}$ et $\beta_\infty \in \mathbb{R}$ tels

$$\begin{cases} x(t)\cos(t) - x'(t)\sin(t) \underset{t\to+\infty}{\to} \alpha_\infty, \\ x(t)\sin(t) + x'(t)\cos(t) \underset{t\to+\infty}{\to} \beta_\infty. \end{cases}$$

Il suffit enfin de remarquer que

$$\begin{aligned} x(t) - \alpha_\infty\cos(t) - \beta_\infty\sin(t) = {} & \cos(t)\big(x(t)\cos(t) - x'(t)\sin(t) - \alpha_\infty\big) \\ & + \sin(t)\big(x(t)\sin(t) + x'(t)\cos(t) - \beta_\infty\big), \end{aligned}$$

pour conclure que

$$x(t) - \alpha_\infty\cos(t) - \beta_\infty\sin(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$