Corrigé du devoir à la maison N°2

Exercice 1.

1.a. Nous commençons par calculer le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A, lequel est donné par l'expression

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2.$$

Le discriminant de ce trinôme est égal à

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2,$$

et ses racines sont donc égales à $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$. Ce sont les valeurs propres complexes de la matrice A.

De plus, nous pouvons déterminer des vecteurs propres associés en résolvant les équations

$$\begin{cases} -y = (-1 + i)x \\ 2x - 2y = (-1 + i)y \end{cases} \iff y = (1 - i)x,$$

et

$$\begin{cases} -y = (-1 - i)x \\ 2x - 2y = (-1 - i)y \end{cases} \iff y = (1 + i)x.$$

En particulier, $v_1 = (1, 1 - i)$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1 = -1 + i$, tandis que $v_2 = (1, 1 + i)$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_2 = -1 - i$.

b. D'après la question 1.a, la matrice A possède deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. De plus, la matrice des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 - i & 1 + i \end{pmatrix},$$

est inversible et satisfait l'identité

$$A = P \begin{pmatrix} -1 + i & 0 \\ 0 & -1 - i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Enfin le déterminant de cette matrice est égal à

$$\det(P) = 2i,$$

de sorte que son inverse est donné par la formule

$$P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 + i & -1 \\ -1 + i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - i & i \\ 1 + i & -i \end{pmatrix}.$$

c. Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous utilisons la formule de la question 1.b pour calculer

$$\begin{aligned} e^{tA} = \exp\left(P \begin{pmatrix} (-1 + i)t & 0 \\ 0 & -(1 + i)t \end{pmatrix} P^{-1} \right) &= P \exp \begin{pmatrix} (-1 + i)t & 0 \\ 0 & -(1 + i)t \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{-(1+i)t} \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Le calcul de ce dernier produit de matrices donne alors l'expression

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{e^{-t}}{2}\begin{pmatrix} (1-i)e^{it}+(1+i)e^{-it} & i(e^{it}-e^{-it}) \\ -2i(e^{it}-e^{-it}) & (1+i)e^{it}+(1-i)e^{-it} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos(t)+\sin(t)) & -e^{-t}\sin(t) \\ 2e^{-t}\sin(t) & e^{-t}(\cos(t)-\sin(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.a. D'après la question 1.a, les deux valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative. Par le critère de Routh, l'origine est asymptotiquement stable, donc stable pour le système linéaire (1).

b. Nous écrivons le vecteur propre v_1 sous la forme $v_1 = e_1 + ie_2$, où les vecteurs réels e_1 et e_2 sont donnés par les formules

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Par définition du vecteur propre v_1, nous avons l'égalité

$$Ae_1 + iAe_2 = Av_1 = (-1+i)v_1 = (-1+i)(e_1+ie_2) = -(e_1+e_2) + i(e_1-e_2).$$

Nous pouvons alors identifier les parties réelles et imaginaires dans cette égalité afin d'obtenir les formules

$$Ae_1 = -e_1 - e_2, \quad \text{et} \quad A(e_2) = e_1 - e_2.$$

Introduisons donc la matrice Q dont les vecteurs colonnes sont donnés par les vecteurs e_1 et e_2, soit la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

la matrice Q est inversible, ce qui signifie que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, et que la matrice Q est la matrice de changement de base de la base canonique vers la base (e_1, e_2). Les expressions des vecteurs Ae_1 et Ae_2 en fonction des vecteurs e_1 et e_2 conduisent alors à l'identité matricielle recherchée

$$A = Q\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

c. Par définition des coordonnées $(x(t), y(t))$, nous avons la formule

$$X(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2,$$

qui équivaut à l'identité matricielle

$$X(t) = Q\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la formule de la question 2.b, le système linéaire (1) s'écrit donc

$$Q\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} -x(t)+y(t) \\ -x(t)-y(t) \end{pmatrix}.$$

L'inversibilité de la matrice Q conduit alors au système linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t). \end{cases}$$

Nous déduisons de ce système que

$$\begin{cases} \big(x(t)\, e^t\big)' = y(t) e^t, \\ \big(y(t)\, e^t\big)' = -x(t) e^t, \end{cases}$$

de sorte que

$$\big(x(t)\, e^t\big)'' = -x(t)\, e^t.$$

Il découle de cette identité qu'il existe des nombres réels α et β tels que

$$x(t) = e^{-t}\big(\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)\big),$$

de sorte que

$$y(t) = e^{-t}\big(x(t)\, e^t\big)' = e^{-t}\big(- \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)\big).$$

En $t = 0$, ces deux identités conduisent aux formules

$$\alpha = x_0, \quad \text{et} \quad \beta = y_0,$$

d'où les expressions

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = e^{-t}\big(x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t)\big), \\ y(t) = e^{-t}\big(- x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)\big). \end{cases}$$

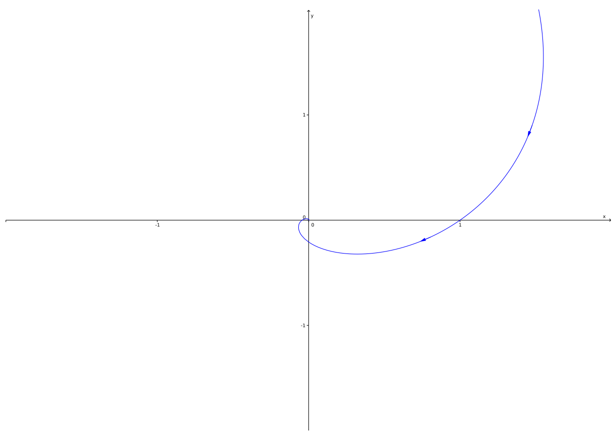
d. Nous nous intéressons d'abord à la solution obtenue pour la donnée initiale $(x_0, y_0) = (1, 0)$, dont les coordonnées sont données par les formules

$$\forall t \in \mathbb{R}, \, x(t) = e^{-t} \cos(t), \quad \text{et} \quad y(t) = -e^{-t} \sin(t).$$

Nous observons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \, x(t)^2 + y(t)^2 = e^{-2t},$$

de sorte que dans un repère (e_1, e_2) qui serait orthonormé, cette solution parcourt une spirale qui s'enroule autour de l'origine. De plus, puisque les coordonnées sur la spirale sont $(\cos(t), -\sin(t))$, le sens d'enroulement est le sens des aiguilles d'une montre.



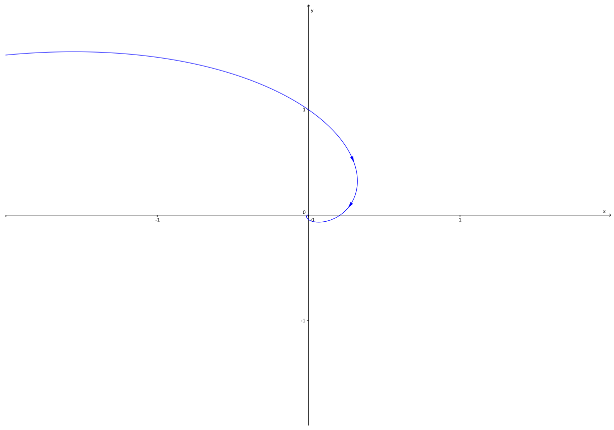
Nous considérons ensuite la solution obtenue pour le donnée initiale $(x_0, y_0) = (0, 1)$, dont les coordonnées sont maintenant données par les formules

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{-t} \sin(t), \quad \text{et} \quad y(t) = e^{-t} \cos(t).$$

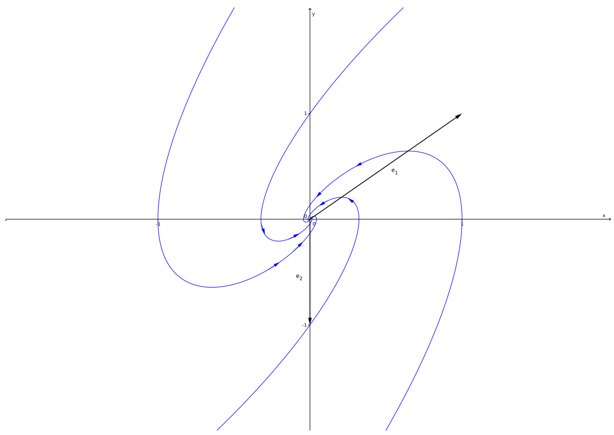
Nous observons de même que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t)^2 + y(t)^2 = e^{-2t},$$

de sorte que dans un repère (e_1, e_2) qui serait orthonormé, cette solution parcourt aussi une spirale qui s'enroule autour de l'origine, toujours dans le sens des aiguilles d'une montre.



Afin d'obtenir le portrait de phase, il suffit d'appliquer à ces spirales la transformation linéaire qui transforme les vecteurs du repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^2$ en le repère (e_1, e_2) (qui n'est plus orthonormé). Nous obtenons le portrait de phase suivant qui est constitué par des spirales déformées par cette transformation linéaire. Observons que ces spirales s'enroulent désormais autour de l'origine dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, puisque l'orientation du repère (e_1, e_2) est inverse de celle du repère canonique de $\mathbb{R}^2$.



Nous notons pour conclure qu'il s'agit d'un portrait de phase de typer foyer stable.

Exercice 2.

1. Nous utilisons la décomposition en espaces caractéristiques de la matrice M. Notons $\sigma(M) = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq I\}$ le spectre complexe de la matrice M, et m_i la multiplicité de

chacune de ses valeurs propres λ_i dans son polynôme caractéristique χ_M. Nous savons que l'espace $\mathbb{C}^N$ se décompose en la somme directe des espaces caractéristiques $E_i = \mathrm{Ker}(M - \lambda_i I_N)^{m_i}$,

$$\mathbb{C}^N = \overset{I}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i.$$

Désignons par P_i les matrices des projecteurs associés à cette somme directe et qui satisfont donc

$$I_N = \sum_{i=1}^{I} P_i.$$

Rappelons que ces projecteurs P_i vérifient aussi la relation $P_i^2 = P_i$ et qu'ils commutent deux à deux, ainsi qu'avec la matrice M. Ils commutent donc aussi avec toute puissance de la matrice M et nous pouvons écrire pour tout nombre $t \geq 0$,

$$e^{tM} = e^{tM} \sum_{i=1}^{I} P_i = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} M^k \, P_i^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} P_i \, M^k \, P_i.$$

Nous vérifions alors que

$$P_i \, M^2 \, P_i = P_i^2 \, M^2 \, P_i = P_i \, M \, P_i \, M \, P_i = P_i \, M \, P_i^2 \, M \, P_i = \big(P_i \, M \, P_i\big)^2,$$

puis par récurrence sur $k \geq 2$,

$$\forall k \geq 2, \; P_i \, M^k \, P_i = \big(P_i \, M \, P_i\big)^k.$$

Il s'ensuit que

$$e^{tM} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \big(P_i \, M \, P_i\big)^k = \sum_{i=1}^{I} e^{tP_i \, M \, P_i}.$$

Nous savons par ailleurs que la restriction $P_i M P_i$ à chacun des espaces caractéristiques E_i de la matrice M s'écrit

$$P_i M P_i = \lambda_i Id_{E_i} + N_i,$$

où la matrice N_I est nilpotente, puisqu'elle satisfait l'identité

$$N_i^{m_i} = 0.$$

Comme les matrices $\lambda_i Id_{E_i}$ et N_i commutent, nous en déduisons que

$$e^{tP_i \, M \, P_i} = e^{t\lambda_i Id_{E_i}} \, e^{tN_i} = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k}{k!} N_i^k,$$

puis l'expression finale

$$e^{tM} = \sum_{i=1}^{I} e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k}{k!} N_i^k.$$

Notons alors

$$\nu = \frac{1}{2} \min \big\{ - \mathrm{Re}(\lambda_i), 1 \leq i \leq I \big\} > 0,$$

et observons que

$$\forall 1 \leq i \leq I, \; \big| e^{t\lambda_i} \big| = e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)} \leq e^{-2\nu t}.$$

Comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, il s'ensuit que

$$\|e^{tM}\| \leq \sum_{i=1}^{I} |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \|N_i^k\| \leq e^{-2\nu t} \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \|N_i\|^k.$$

Nous savons enfin que

$$e^{-\nu t} \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \|N_i\|^k \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Par continuité de la fonction $t \mapsto e^{-\nu t} \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \|N_i\|^k$ sur $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons qu'il existe un nombre positif C tel que

$$\forall t \geq 0,\ e^{-\nu t} \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \|N_i\|^k \leq C,$$

puis nous concluons que

$$\|e^{tM}\| \leq Ce^{-\nu t}.$$

2.a. Introduisons l'application

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}),\ F(M) = A\,M + M\,B.$$

Cette application est bien définie, linéaire et continue de l'espace de Banach $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dans lui-même. Par la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz, quelle que soit la matrice $M_0 \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, il existe donc une unique solution $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{C}))$ du problème de Cauchy considéré.

b. Rappelons que les applications $t \mapsto e^{tA}$ et $t \mapsto e^{tB}$ sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'elles satisfont

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \big(e^{tA}\big)' = Ae^{tA}, \quad \text{et} \quad \big(e^{tB}\big)' = e^{tB}B.$$

Par produit, la fonction M définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, M(t) = e^{tA}\,M_0\,e^{tB},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = A\,e^{tA}\,M_0\,e^{tB} + e^{tA}\,M_0\,e^{tB}\,B = A\,M(t) + M(t)\,B,$$

ainsi que la condition initiale

$$M(0) = M_0.$$

Il s'agit donc de l'unique solution du problème de Cauchy considéré.

3.a. D'après la question 1., nous savons qu'il existe des nombres strictement positifs C et ν tels que

$$\forall t \geq 0,\ \|e^{tA}\| \leq C\,e^{-\nu t}, \quad \text{et} \quad \|e^{tB}\| \leq C\,e^{-\nu t}.$$

Comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, nous déduisons de la formule de la question 2.b que

$$\|M(t)\| \leq \|e^{tA}\|\|M_0\|\|e^{tB}\| \leq C^2\,\|M_0\|\,e^{-2\nu t},$$

et nous concluons que

$$\|M(t)\| \leq K\,e^{-\tau t},$$

pour $K = C^2 \|M_0\| \geq 0$ et $\tau = 2\nu > 0$.

b. Notons $M_C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{C}))$ l'unique solution du problème de Cauchy considéré pour la donnée initiale $M_C(0) = -C$. Nous pouvons écrire

$$\forall t \geq 0,\ M_C(t) - M_C(0) = \int_0^t M_C'(s)\, ds = \int_0^t \Big(A\, M_C(s) + M_C(s)\, B \Big)\, ds,$$

soit

$$M_C(t) + C = A \Big(\int_0^t M_C(s)\, ds \Big) + \Big(\int_0^t M_C(s)\, ds \Big) B.$$

D'après la question 3.a, nous savons alors que

$$M_C(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0.$$

Nous rappelons en outre que

$$\int_0^{+\infty} K\, e^{-\tau t}\, dt = \frac{K}{\tau},$$

ce qui signifie que la fonction $t \mapsto K\, e^{-\tau t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Nous déduisons donc par comparaison de la question 3.a que la fonction M_C est aussi intégrable sur $[0, +\infty[$, de sorte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} M_C(t)\, dt$ est bien définie. En passant à la limite $t \to +\infty$ dans la formule ci-dessus, nous obtenons ainsi

$$C = A \Big(\int_0^{+\infty} M_C(s)\, ds \Big) + \Big(\int_0^{+\infty} M_C(s)\, ds \Big) B,$$

et l'équation (2) possède donc une solution $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ donnée par la formule

$$M = \int_0^{+\infty} M_C(s)\, ds = - \int_0^{+\infty} e^{sA}\, C\, e^{sB}\, ds,$$

d'après la question 2.b.

c. Rappelons que l'application F est bien définie et linéaire de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. D'après la question 3.b, elle est de plus surjective. Il résulte alors du théorème du rang que son noyau $\mathrm{Ker}(F)$ est réduit au singleton $\{0\}$, soit que l'application F est injective, et par suite, bijective. En conclusion, il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que

$$C = F(M) = AM + MB.$$

Exercice 3.

1.a. Introduisons la fonction F définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = \Big(\frac{1}{2}\, x\, y - x, -\frac{1}{2}\, x\, y + 1 - y \Big).$$

La fonction F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc continue et localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons donc invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour affirmer que, quelle soit la donnée initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique intervalle ouvert $]S, T[$, avec $-\infty \leq S < 0 < T \leq +\infty$, tel qu'il existe une unique solution maximale $(x, y) \in \mathcal{C}^1(]S, T[, \mathbb{R}^2)$ du système différentiel (3) pour cette donnée initiale. En particulier, T est l'unique temps maximal associé à une solution maximale sur un intervalle de la forme $[0, T[$, et (x, y) est l'unique solution maximale sur $[0, T[$.

b. Lorsque $x_0 = 0$, nous pouvons chercher une solution (x, y) dans laquelle la fonction x est identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction y doit être solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - y(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Une solution particulière de l'équation différentielle associée à ce problème de Cauchy affine est donnée par la fonction constante égale à 1, tandis que les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \mapsto C\,e^{-t}$ pour un nombre réel C. La solution de ce problème de Cauchy s'écrit donc sous la forme

$$y(t) = 1 + C\,e^{-t},$$

où le nombre C est fixé de sorte que $y(0) = y_0$. Ce nombre est donc égal à

$$C = y_0 - 1,$$

et la solution y vaut

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 1 + \big(y_0 - 1\big)e^{-t}.$$

Comme cette solution et la fonction identiquement nulle sont définies sur $\mathbb{R}$, la paire $(0, y)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3) pour la donnée initiale $(0, y_0)$, et elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2.a. Supposons d'abord par l'absurde qu'il existe un nombre $0 \leq \tau < T$ tel que

$$x(\tau) \leq 0.$$

Comme $x(0) = x_0 > 0$, nous savons que $\tau > 0$. Sachant que la fonction x est continue sur $[0, \tau]$, nous pouvons invoquer le théorème des valeurs intermédiaires afin de déterminer un nombre $0 < \sigma \leq \tau$ tel que

$$x(\sigma) = 0.$$

Dans ce cas, la paire $t \mapsto (x(t + \sigma), y(t + \sigma))$ est une solution maximale du problème de Cauchy (3) pour la donnée initiale $(0, y(\sigma))$. D'après la question 1.b, cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto x(t + \sigma)$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que $x(0) = x_0 > 0$. Par l'absurde, nous avons donc établi que

$$\forall t \in [0, T[, x(t) > 0.$$

Nous raisonnons de même pour la fonction y. Étant donné un nombre réel x_0, nous cherchons une solution (x, y) du problème de Cauchy (3) associée à la donnée initiale $(x_0, 0)$ telle que la fonction y est identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction x est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

L'unique solution maximale de ce problème de Cauchy est égale à

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = x_0 e^{-t},$$

et nous concluons comme à la question 1.b que l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3) pour la donnée initiale $(x_0, 0)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par les expressions

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \big(x(t), y(t)\big) = \big(x_0\,e^{-t}, 0\big).$$

Revenons alors à la solution maximale de la question 2.a, et supposons par l'absurde qu'il existe un nombre $0 \leq \tau < T$ tel que

$$y(\tau) \leq 0.$$

Comme précédemment, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un nombre $0 < \sigma \leq \tau$ tel que $y(\sigma) = 0$, et nous déduisons de la description des solutions maximales (x, y) de (3) telles que $y(0) = 0$ que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, y(t) = 0,$$

ce qui est absurde, puisque $y(0) = 1$. En définitive, nous avons donc établi que

$$\forall t \in [0, T[,\, y(t) > 0.$$

b. Introduisons la fonction z définie par

$$\forall 0 \leq t < T,\, z(t) = x(t) + y(t).$$

D'après la question 1.a, cette fonction est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T[$, et elle satisfait

$$\forall 0 \leq t < T,\, z'(t) = \frac{1}{2}\, x(t)\, y(t) - x(t) - \frac{1}{2}\, x(t)\, y(t) + 1 - y(t) = 1 - z(t).$$

Nous déduisons de cette équation différentielle que

$$\big(z(t)\, e^t\big)' = \big(z'(t) + z(t)\big) e^t = e^t,$$

de sorte que

$$z(t)\, e^t = z(0) + e^t - 1.$$

Comme $z(0) = x_0 + y_0 = x_0 + 1$, nous concluons que

$$\forall t \in [0, T[,\, x(t) + y(t) = z(t) = 1 + x_0 e^{-t}.$$

c. D'après la question 2.a, nous savons que

$$\forall t \in [0, T[,\, x(t) > 0, \quad \text{et} \quad y(t) > 0.$$

Il résulte donc de la question 2.b que

$$\forall t \in [0, T[,\, x(t) \leq x(t) + y(t) \leq 1 + x_0,$$

et de façon similaire, que

$$\forall t \in [0, T[,\, y(t) \leq x(t) + y(t) \leq 1 + x_0.$$

En particulier, la solution (x, y) est à valeurs dans le sous-ensemble compact $[0, 1 + x_0]^2$. Par le principe de sortie de tout compact, elle est donc globale, soit définie sur $[0, +\infty[$.

3.a. Nous introduisons l'ensemble

$$\mathcal{S} = \sup \Big\{ t \geq 0 \text{ t.q. } \forall s \in [0, T],\, y(s) \leq 1 \Big\},$$

et notons S sa borne supérieure. Comme $x(0) > 0$ et $y(0) = 1$, nous notons que

$$y'(0) = -\frac{1}{2}\,x(0)\,y(0) + 1 - y(0) = -\frac{1}{2}x(0) < 0,$$

de sorte qu'il existe un nombre $\tau > 0$ tel que

$$\forall 0 \leq t \leq \tau,\ y(t) \leq 1.$$

La borne S est donc soit strictement positive, soit égale à $+\infty$.

Supposons alors par l'absurde que

$$S > 0.$$

Dans ce cas, nous pouvons trouver une première suite $(s_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0,\ s_n \in \mathcal{S}, \quad \text{et} \quad s_n \underset{n\to+\infty}{\to} S.$$

Par définition de l'ensemble $\mathcal{S}$, nous avons

$$\forall 0 \leq s \leq s_n,\ y(s) \leq 1,$$

de sorte qu'à la limite $n \to +\infty$,

$$\forall 0 \leq s \leq S,\ y(s) \leq 1.$$

Par ailleurs, nous savons qu'il existe une seconde suite $(t_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0,\ t_n \notin \mathcal{S}, \quad \text{et} \quad t_n \underset{n\to+\infty}{\to} S.$$

Par définition de l'ensemble $\mathcal{S}$, et comme la borne S est dans cet ensemble, nous savons alors qu'il existe des nombres $S < \tau_n \leq t_n$ tels que

$$y(\tau_n) > 1,$$

et à la limite $n \to +\infty$, nous concluons que

$$y(S) \geq 1.$$

Ce nombre est donc égal à 1, ce qui assure que

$$y'(S) = -\frac{1}{2}\,x(S)\,y(S) + 1 - y(S) = -\frac{1}{2}\,x(S) < 0,$$

d'après la question 2.a. À nouveau, il existe donc un nombre strictement positif τ tel que

$$\forall S \leq s \leq S + \tau,\ y(s) \leq 1,$$

et nous concluons que le nombre $S+\tau$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$, ce qui est absurde puisque S est la borne supérieure de cet ensemble.

En définitive, nous avons montré que

$$S = +\infty,$$

ce qui garantit que

$$\forall t \geq 0,\ y(t) \leq 1.$$

b. Nous déduisons des questions 2.a et 3.a que

$$\forall t \geq 0,\, x(t) > 0, \quad \text{et} \quad 0 < y(t) \leq 1,$$

de sorte que

$$x'(t) = x(t)\Big(\frac{y(t)}{2} - 1\Big) < 0.$$

La fonction x est donc bien décroissante sur $[0, +\infty[$.

c. D'après les questions 2.a et 3.b, la fonction x est décroissante et minorée par 0, de sorte qu'il existe un nombre $x_\infty \geq 0$ tel que

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} x_\infty.$$

La formule de la question 2.b assure alors que

$$y(t) = 1 + x_0\, e^{-t} - x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 1 - x_\infty,$$

et nous obtenons donc

$$x'(t) = x(t)\,\Big(\frac{y(t)}{2} - 1\Big) \underset{t \to +\infty}{\to} -\frac{x_\infty}{2}\,\Big(1 + x_\infty\Big).$$

Supposons alors par l'absurde que $x_\infty \neq 0$. Nous savons dans ce cas que

$$-\frac{x_\infty}{2}\,\Big(1 + x_\infty\Big) < 0,$$

et d'après la limite précédente, il existe donc deux nombres $\tau > 0$ et $A > 0$ tels que

$$\forall t \geq \tau,\, x'(t) \leq -A.$$

Il vient en particulier

$$x(t) - x(\tau) = \int_\tau^t x'(s)\, ds \leq -A\big(t - \tau\big),$$

c'est-à-dire

$$x(t) \leq -At + A\tau + x(\tau).$$

Sachant que A est strictement positif, nous obtenons

$$-At + A\tau + x(\tau) \underset{t \to +\infty}{\to} -\infty,$$

puis par comparaison,

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} -\infty,$$

ce qui est absurde. En conclusion, nous avons établi que $x_\infty = 0$, ce qui assure que

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0, \quad \text{et} \quad y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 1.$$