CY Cergy Paris Université **Systèmes dynamiques**
Master 1 Mathématiques **2023-2024**

Corrigé du devoir à la maison N°2

Exercice 1.

1.a. Observons d'abord que l'équation différentielle considérée est linéaire. En particulier, si λ est un nombre réel, et si x et y sont deux solutions de cette équation, alors la fonction $\lambda x + y$ est aussi une solution. Nous pouvons donc affirmer que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de fonctions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit alors $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Comme la fonction q est continue sur $\mathbb{R}$, la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'il existe une unique solution $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) + q(t)x(t) = 0, \\ x(0) = x_0,\ \text{ et } x'(0) = x_1. \end{cases}$$

En particulier, l'application ϕ qui, au couple (x_0, x_1), associe l'unique solution correspondante x est bien définie et bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{S}$. Sachant que cette application est aussi linéaire par linéarité de l'équation différentielle, il s'agit d'un isomorphisme entre les deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{S}$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension deux, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est aussi de dimension deux.

b. Supposons que la solution x s'annule en un nombre $t_0 \in \mathbb{R}$. Si $x'(t_0) = 0$, alors la fonction x est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) + q(t)x(t) = 0, \\ x(t_0) = x'(t_0) = 0. \end{cases}$$

Comme la fonction nulle est aussi solution de ce problème, et que la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'unicité d'une possible solution, nous en déduisons que la solution x est identiquement nulle, ce qui est absurde. Nous concluons que $x'(t_0) \neq 0$, et le zéro t_0 est donc simple. Selon que $x'(t_0)$ est strictement positif ou strictement négatif, la fonction x est donc ou bien strictement croissante, ou bien strictement décroissante au voisinage de t_0. Il existe donc un nombre $\delta_0 > 0$ tel que

$$\forall t \in]t_0 - \delta_0, t_0[\cup]t_0, t_0 + \delta_0[,\ x(t) \neq 0,$$

ce qui assure que le zéro $x(t_0)$ est aussi isolé.

c. Soit $0 < h < t_2 - t_1$. Nous déduisons de la stricte positivité de la fonction x sur $]t_1, t_2[$, et du fait qu'elle s'annule en t_1 et t_2 que

$$\frac{x(t_1 + h) - x(t_1)}{h} > 0, \quad \text{et} \quad \frac{x(t_2 - h) - x(t_2)}{-h} < 0.$$

Comme la fonction x est dérivable en t_1 et en t_2, nous obtenons à la limite $h \to 0$ que

$$x'(t_1) \geq 0, \quad \text{et} \quad x'(t_2) \leq 0.$$

Supposons alors que $x'(t_1) = 0$. Dans ce cas, la fonction x est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) + q(t)x(t) = 0, \\ x(t_1) = x'(t_1) = 0. \end{cases}$$

Sachant que la fonction nulle est aussi solution de ce problème, la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz assure que la fonction x est identiquement nulle, ce qui est absurde. Nous en déduisons que

$$x'(t_1) > 0,$$

et de façon identique, nous pouvons prouver que

$$x'(t_2) < 0.$$

2.a. Introduisons le nombre

$$t_3 = \inf \big\{ t > t_1 \text{ t.q. } x(t) = 0 \big\}.$$

Comme $x(t_2) = 0$, nous savons déjà que $t_3 \leq t_2$. Sachant que la solution x est non nulle, nous déduisons de la question 1.b que le zéro t_1 est isolé, de sorte que $t_3 > t_1$. De plus, si $x(t_3) \neq 0$, il existe une suite de zéros $(\tau_n)_{n \geq 0}$ de la fonction x qui converge vers le nombre t_3. Par continuité de la solution x, nous obtenons à la limite $n \to +\infty$ que

$$x(t_3) = 0,$$

ce qui est absurde. Nous concluons que t_3 est un zéro de la fonction x, et par définition de ce nombre, cette fonction ne s'annule pas sur l'intervalle $]t_1, t_3[$.

b. D'après la question 2.a, nous savons que la solution x ne s'annule pas sur l'intervalle $]t_1, t_3[$. Nous pouvons donc déterminer un nombre $\delta \in \{\pm 1\}$ tel que la fonction δx est strictement positive sur $]t_1, t_3[$. Par linéarité de l'équation différentielle satisfaite par la fonction x, nous savons que la fonction δx est aussi solution, et elle s'annule en t_1 et en t_3, puisque ces deux nombres sont des zéros de la fonction x. Nous déduisons donc de la question 1.c que

$$\delta x'(t_1) > 0, \quad \text{ et } \quad \delta x'(t_3) < 0.$$

Nous nous intéressons désormais aux zéros de la solution $\tilde{x}$. Si cette fonction s'annule en t_1 ou en t_3, elle possède bien un zéro dans le segment $[t_1, t_2]$. Sinon, supposons par l'absurde qu'elle ne s'annule pas entre t_1 et t_3, auquel cas nous pouvons déterminer un nombre $\tilde{\delta}$ tel que la fonction $\tilde{\delta}\tilde{x}$ soit strictement positive sur le segment $[t_1, t_3]$. Nous introduisons alors la fonction W définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\, W(t) = \big(\delta x'(t)\big)\big(\tilde{\delta}\tilde{x}(t)\big) - \big(\delta x(t)\big)\big(\tilde{\delta}\tilde{x}'(t)\big).$$

Comme les solutions x et $\tilde{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la fonction W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée vaut

$$\forall t \in \mathbb{R},\, W'(t) = \delta\tilde{\delta}\big(x''(t)\tilde{x}(t) - x(t)\tilde{x}''(t)\big) = \big(\tilde{q}(t) - q(t)\big)\big(\delta x(t)\big)\big(\tilde{\delta}\tilde{x}(t)\big).$$

Sachant que $\tilde{q} \geq q$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $[t_1, t_3]$, nous observons que

$$\forall t \in]t_1, t_3[,\, W'(t) \geq 0,$$

de sorte que la fonction W est croissante sur le segment $[t_1, t_3]$. Nous calculons par contre

$$W(t_1) = \big(\delta x'(t_1)\big)\big(\tilde{\delta}\tilde{x}(t_1)\big) > 0 > \big(\delta x'(t_3)\big)\big(\tilde{\delta}\tilde{x}(t_1)\big),$$

ce qui est absurde. Nous pouvons donc affirmer que la fonction $\tilde{x}$ s'annule entre t_1 et t_3, ce qui suffit à conclure qu'elle s'annule sur le segment $[t_1, t_2]$.

c. Nous invoquons la question 2.b pour la fonction $\tilde{q} = q$, qui vérifie bien la condition $\tilde{q} \geq q$ sur $\mathbb{R}$. Nous déduisons de cette question que la solution y s'annule sur le segment $[t_1, t_2]$, et il reste donc à vérifier qu'elle ne peut s'annuler ni en t_1, ni en t_2.

Supposons par l'absurde qu'elle s'annule en t_1. Comme la solution x est non nulle et s'annule en t_1, nous savons que $x'(t_1) \neq 0$. Sinon, la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz assure que cette solution est identiquement nulle, ce qui est faux. Nous pouvons donc déterminer un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$y'(t_1) = \lambda x'(t_1).$$

Par linéarité de l'équation différentielle considérée, la fonction λx est une solution de l'équation qui satisfait de plus

$$\lambda x(t_1) = y(t_1) = 0, \quad \text{et} \quad \lambda x'(t_1) = y'(t_1).$$

Nous déduisons donc de la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, y(t) = \lambda x(t),$$

soit que la solution y est proportionnelle à la solution x. Comme cette dernière propriété est absurde, la solution y ne peut s'annuler en t_1. Par la même preuve (dans laquelle le nombre t_1 est remplacé par le nombre t_2), elle ne s'annule pas non plus en t_2. En conclusion, elle possède au moins un zéro dans l'intervalle $]t_1, t_2[$.

3.a. Supposons qu'une solution non nulle x a au moins deux zéros distincts t_1 et t_2, et considérons une autre solution non nulle y. Étant donné un entier $n \geq 1$, considérons la fonction y_n définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\, y_n(t) = y(t + nT).$$

Par composition, la fonction y_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et par T-périodicité de la fonction q, elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\, y_n''(t) + q(t) y_n(t) = y''(t+nT) + q(t) y(t+nT) = y''(t+nT) + q(t+nT) y(t+nT) = 0,$$

puisque y est solution. La fonction y_n est donc solution de l'équation différentielle.

Nous appliquons alors le résultat de la question 2.b pour la fonction $\tilde{q} = q$, qui satisfait bien la condition $\tilde{q} \geq q$ sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que la solution y_n possède un zéro dans le segment $[t_1, t_2]$. Par définition de cette fonction, nous obtenons que la solution y possède un zéro dans le segment $[t_1 + nT, t_2 + nT]$, ce qui garantit que la solution y possède une infinité de zéros.

Considérons en effet un entier $N \geq 1$ tel que $NT > t_2 - t_1$. Les segments $([t_1 + kNT, t_2 + kNT])_{k \geq 0}$ sont alors deux à deux disjoints. Sinon il existe deux entiers $0 \leq k_1 < k_2$ tel que l'intersection $[t_1 + k_1 NT, t_2 + k_1 NT] \cap [t_1 + k_2 NT, t_2 + k_2 NT]$ est non vide. Ceci signifie que $t_1 + k_2 NT \leq t_2 + k_1 NT$, soit que

$$t_2 - t_1 \geq (k_2 - k_1) NT \geq NT,$$

ce qui est absurde. Sachant que les segments $([t_1 + kNT, t_2 + kNT])_{k \geq 0}$ sont donc disjoints, ils sont en nombre infini. Comme chacun d'entre eux contient un zéro distinct de la solution y, cette solution a une infinité de zéros. En conclusion, toute solution non nulle a une infinité de zéros, et nous avons bien établi que soit toute solution non nulle a au plus un zéro réel, soit toute solution non nulle a une infinité de zéros réels.

b. Supposons par l'absurde qu'une solution x non nulle a au moins deux zéros distincts t_1 et $t_2 > t_1$. Comme à la question 2.a, nous pouvons trouver un nombre $t_1 < t_3$ telle que t_3 est un zéro de la solution x, et cette solution est de plus non nulle sur l'intervalle $]t_1, t_3[$. En particulier, il existe un nombre $\delta \in \{\pm 1\}$ tel que δx est strictement positive sur $]t_1, t_3[$. Par linéarité de l'équation différentielle considérée, cette fonction est aussi solution de l'équation, d'où les inégalités

$$\forall t \in [t_1, t_3],\ \big(\delta x\big)''(t) = -q(t)\big(\delta x\big)(t) \geq 0,$$

puisque la fonction q est négative. En particulier, la dérivée $(\delta x)'$ est croissante sur $[t_1, t_3]$, ce qui assure que

$$\delta x'(t_3) \geq \delta x'(t_1).$$

Sachant que la solution δx s'annule en t_1 et en t_3, et est strictement positive sur $]t_1, t_3[$, nous déduisons de la question 1.c que

$$\delta x'(t_1) > 0 > \delta x'(t_3),$$

ce qui est absurde. En conclusion, toute solution non nulle de l'équation possède au plus un zéro réel.

c.(i) Comme q est non nulle et positive, il existe un nombre $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $q(t_0)$ est strictement positif. Par continuité de la fonction q, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[,\ q(t) > 0.$$

Considérons alors (par la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz) l'unique solution $x \in \mathcal{S}$ telle que

$$x(t_0) = 1, \quad \text{et} \quad x'(t_0) = 0,$$

et supposons d'abord que cette solution ne s'annule pas sur $]t_0, +\infty[$. Comme $x(t_0) = 1$, la fonction x est strictement positive sur $[t_0, +\infty($, et nous déduisons de l'équation différentielle que

$$\forall t > t_0,\ x''(t) = -q(t)x(t) \leq 0.$$

De plus, cette inégalité est stricte dans l'intervalle $[t_0, t_0+\delta[$. La fonction x est donc concave sur $[t_0, +\infty[$, et sa dérivée x' est aussi strictement décroissante sur $[t_0, t_0 + \delta[$. Sachant que $x'(t_0) = 0$, nous obtenons que $x'(t_0 + \delta) < 0$, puis par concavité, que

$$\forall t \geq t_0 + \delta,\ x(t) \leq x'(t_0 + \delta)\big(t - t_0 - \delta\big) + x(t_0 + \delta).$$

Comme

$$x'(t_0 + \delta)\big(t - t_0 - \delta\big) + x(t_0 + \delta) \underset{t \to +\infty}{\to} -\infty,$$

il existe un nombre $t_1 \geq t_0 + \delta$ tel que $x(t_1) \leq 0$, ce qui est absurde. Nous concluons que la solution x possède au moins un zéro dans l'intervalle $]t_0, +\infty[$.

De façon similaire, elle possède un deuxième zéro sur l'intervalle $]-\infty, t_0[$. Sinon, la solution x est de même strictement positive et concave sur l'intervalle $]-\infty, t_0]$, et sa dérivée $x'(t_0-\delta)$ est strictement positive. Il s'ensuit que

$$\forall t \leq t_0 - \delta,\ x(t) \leq x'(t_0 - \delta)\big(t - t_0 + \delta\big) + x(t_0 - \delta),$$

et comme

$$x'(t_0 - \delta)\big(t - t_0 + \delta\big) + x(t_0 - \delta) \underset{t \to -\infty}{\to} -\infty,$$

il existe un nombre $t_2 \leq t_0 - \delta$ tel que $x(t_2) \leq 0$, ce qui est à nouveau absurde. Nous concluons que la solution x possède un deuxième zéro dans l'intervalle $]-\infty, t_0[$. Sachant que $x(t_0) = 1 \neq 0$, elle est de plus non nulle, et l'alternative de la question 3.a garantit alors qu'elle possède une infinité de zéros.

(ii) D'après la question précédente, nous savons que l'équation différentielle considérée possède une solution non nulle qui possède une infinité de zéros, de sorte que, par l'alternative de la question 3.a, toute solution non nulle a une infinité de zéros réels.

Exercice 2.

1. Sachant que la fonction x_ε est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, les fonctions x_ε et x_ε' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme l'application $t \mapsto \varepsilon t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction Y_ε est par composition de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, nous calculons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_\varepsilon'(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon x_\varepsilon'(\varepsilon t) \\ \varepsilon x_\varepsilon''(\varepsilon t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon x_\varepsilon'(\varepsilon t) \\ -\varepsilon a(t) x_\varepsilon(\varepsilon t) \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors d'introduire l'application matricielle

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix},$$

pour conclure que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_\varepsilon'(t) = \varepsilon\, A(t)\, Y_\varepsilon(t).$$

Puisque la fonction a est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, l'application A est également continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Comme Y_ε est solution de l'équation différentielle (2), les fonctions y_ε et z_ε sont solutions du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y_\varepsilon'(t) = \varepsilon z_\varepsilon(t), \\ z_\varepsilon'(t) = -\varepsilon a(t) y_\varepsilon(t). \end{cases}$$

Sachant que la fonction z_ε est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la dérivée y_ε' est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de sorte que la fonction y_ε est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Il découle de plus du système différentiel précédent que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_\varepsilon''(t) = \varepsilon z_\varepsilon'(t) = -\varepsilon^2 a(t) y_\varepsilon(t).$$

Observons ensuite que la fonction x_ε est par composition de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et qu'elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_\varepsilon''(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} y_\varepsilon\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) = -a\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) y_\varepsilon\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) = -a\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) x_\varepsilon(t).$$

Il s'agit donc bien d'une solution de l'équation (2). Enfin, nous vérifions que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_\varepsilon(\varepsilon t) \\ x_\varepsilon'(\varepsilon t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\varepsilon(t) \\ \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\varepsilon(t) \\ z_\varepsilon(t) \end{pmatrix} = Y_\varepsilon(t).$$

c. D'après les questions 1.a et 1.b, une fonction $x_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de l'équation (1) si et seulement si la fonction Y_ε définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(\varepsilon t) \\ x_\varepsilon'(\varepsilon t) \end{pmatrix},$$

est solution de l'équation (2). Étant donnés deux nombres $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, nous observons de plus que les conditions initiales $x_\varepsilon(0) = x_0$ et $x_\varepsilon'(0) = x_1$ sont équivalentes à la condition initiale $Y_\varepsilon(0) = (x_0, x_1)$. Par conséquent, le problème de Cauchy considéré équivaut au problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y_\varepsilon'(t) = \varepsilon\, A(t)\, Y_\varepsilon(t), \\ Y_\varepsilon(0) = \big(x_0, x_1\big). \end{cases}$$

Comme la fonction A est continue sur $\mathbb{R}$, la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz assure que ce second problème de Cauchy admet une unique solution $Y_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Par l'équivalence précédente, le problème considéré admet donc une unique solution $x_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.a. Nous appliquons la version affine du théorème de dépendance différentiable. Rappelons d'abord que la résolvante $R_\varepsilon(t, 0)$ est l'unique solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} R'(t) = \varepsilon A(t)\, R(t), \\ R(0) = I_2. \end{cases}$$

Par la version affine du théorème de dépendance différentiable, l'application qui à une fonction $M \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, associe la solution $R \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} R'(t) = M(t) R(t), \\ R(0) = I_2, \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ dans $\mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. Par composition, il nous suffit donc de montrer que l'application $\mathcal{A}$ définie par

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \mathcal{A}(\varepsilon) = \varepsilon A,$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. Cette dernière propriété résulte du fait que l'application $\mathcal{A}$ est bien définie et linéaire, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, nous concluons donc que l'application $\varepsilon \mapsto R_\varepsilon(\cdot, 0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}^2(\mathbb{R}))$.

b. D'après la question 2.a, l'application $\varepsilon \mapsto R_\varepsilon(\cdot, 0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. En particulier, les fonctions

$$Y_0 = R_0(\cdot, 0), \quad Y_1 = \frac{d}{d\varepsilon}\big(R_\varepsilon(\cdot, 0)\big)_{|\varepsilon=0}, \quad \text{et} \quad Y_2 = 2\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\big(R_\varepsilon(\cdot, 0)\big)_{|\varepsilon=0},$$

sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, T]$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par la formule de Taylor-Young, la fonction $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0, T],\ \mathcal{R}(\varepsilon)(t) = R_\varepsilon(t, 0) - Y_0(t) - \varepsilon Y_1(t) - \varepsilon^2 Y_2(t),$$

satisfait donc

$$\big\|\mathcal{R}(\varepsilon)\big\|_{\mathcal{C}^1([0,T],\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))} \underset{\varepsilon \to 0}{=} o\big(\varepsilon^2\big).$$

De plus, comme les fonctions $\varepsilon \mapsto Y_0 + \varepsilon Y_1$ et $\varepsilon \mapsto \varepsilon^2 Y_1$ sont bien définies, et affine, respectivement quadratique, de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de sorte que la fonction $\mathcal{R}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

Remarquons enfin que la fonction Y_0 est la résolvante $R_0(\cdot, 0)$ de l'équation différentielle

$$X'(t) = 0,$$

et qu'elle est donc égale à

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_0(t) = I_2,$$

ce qui conduit à la formule

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,T],\ R_\varepsilon(t,0) = I_2 + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t) + \mathcal{R}(\varepsilon)(t).$$

c. Rappelons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ R_\varepsilon(0,0) = I_2.$$

Par définition, nous avons donc

$$Y_1(0) = \frac{d}{d\varepsilon}\big(R_\varepsilon(0,0)\big)_{|\varepsilon=0} = 0, \quad \text{et} \quad Y_2(0) = 2\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\big(R_\varepsilon(0,0)\big)_{|\varepsilon=0} = 0.$$

d. Comme le développement de la question 2.b est valable dans $\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R}^2)$, nous savons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ R_\varepsilon'(t,0) = \varepsilon Y_1'(t) + \varepsilon^2 Y_2'(t) + \mathcal{R}(\varepsilon)'(t),$$

avec

$$\big\|\mathcal{R}(\varepsilon)'\big\|_{\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^2)} = \underset{\varepsilon\to 0}{o}\big(\varepsilon^2\big).$$

Il suffit donc de développer l'équation satisfaite par la résolvante $R_\varepsilon(t,0)$ pour obtenir

$$\forall t \in [0,T],\ \varepsilon Y_1'(t) + \varepsilon^2 Y_2'(t) + \mathcal{R}(\varepsilon)'(t) = \varepsilon A(t) + \varepsilon^2 A(t)\,Y_1(t) + \varepsilon^3 A(t)\,Y_2(t) + \varepsilon A(t)\,\mathcal{R}(\varepsilon)(t).$$

L'identification du terme d'ordre un de ce développement conduit à l'équation

$$\forall t \in [0,T],\ Y_1'(t) = A(t),$$

tandis que celle du terme d'ordre deux fournit l'équation

$$\forall t \in [0,T],\ Y_2'(t) = A(t)\,Y_1(t).$$

Nous pouvons intégrer ces deux équations à l'aide de la question 2.c pour obtenir les expressions

$$\forall t \in [0,T], Y_1(t) = Y_1(0) + \int_0^t A(s)\,ds = \int_0^t A(s)\,ds = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\int_0^t a(s)\,ds & 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{aligned} Y_2(t) = Y_2(0) + \int_0^t A(s)\,Y_1(s)\,ds &= \int_0^t \int_0^s A(s)\,A(u)\,du\,ds \\ &= \begin{pmatrix} -\int_0^t (t-s)\,a(s)\,ds & 0 \\ 0 & -\int_0^t s\,a(s)\,ds \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e. Rappelons que la trace est une application linéaire et continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après la question 2.b, nous avons donc

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,T],\ \mathrm{tr}\big(R_\varepsilon(t,0)\big) = 2 + \varepsilon \mathrm{tr}\big(Y_1(t)\big) + \varepsilon^2 \mathrm{tr}\big(Y_2(t)\big) + \mathrm{tr}\big(\mathcal{R}(\varepsilon)(t)\big).$$

Il résulte alors de la question 2.d que

$$\mathrm{tr}\big(Y_1(t)\big) = 0,$$

tandis que

$$\mathrm{tr}\big(Y_2(t)\big) = -\int_0^t (t-s+s)\,a(s)\,ds = -t\int_0^t a(s)\,ds.$$

Sachant que la trace est linéaire continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que

$$\big\|\mathcal{R}(\varepsilon)\big\|_{\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^2)} \underset{\varepsilon\to 0}{=} o\big(\varepsilon^2\big),$$

par la question 2.b, nous obtenons

$$\Big\|\operatorname{tr}\big(\mathcal{R}(\varepsilon)\big)\Big\|_{\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^2)} \underset{\varepsilon\to 0}{=} o\big(\varepsilon^2\big),$$

ce qui assure que

$$\forall t \in [0,T],\ \operatorname{tr}\big(R_\varepsilon(t,0)\big) = 2 - \varepsilon^2 t \int_0^t a(s)\,ds + \underset{\varepsilon\to 0}{o}\big(\varepsilon^2\big),$$

ce développement étant uniforme par rapport à $t \in [0,T]$.

3.a. Commençons par vérifier que toutes les solutions de l'équation différentielle (2) sont bornées pour ε assez petit. Étant donnée une solution $Y_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, nous savons par définition de la résolvante que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_\varepsilon(t) = R_\varepsilon(t,0)\,Y_\varepsilon(0),$$

et il suffit donc d'établir que la fonction $t \mapsto R_\varepsilon(t,0)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Comme l'application A est T-périodique sur $\mathbb{R}$, nous pouvons appliquer le théorème de Floquet pour affirmer qu'il existe une application T-périodique $P_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ et une matrice $B_\varepsilon \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ R_\varepsilon(t,0) = P_\varepsilon(t)\,e^{tB_\varepsilon},$$

avec

$$R_\varepsilon(T,0) = e^{TB_\varepsilon}.$$

Afin de déterminer l'une des matrices B_ε qui convient, nous pouvons réduire la résolvante $R_\varepsilon(T,0)$. Nous savons que son polynôme caractéristique χ_ε s'écrit sous la forme

$$\chi_\varepsilon(X) = X^2 - \operatorname{tr}\big(R_\varepsilon(T,0)\big)X + \det\big(R_\varepsilon(T,0)\big).$$

Nous déduisons du théorème de Liouville que

$$\det\big(R_\varepsilon(T,0)\big) = e^{\int_0^T \varepsilon \operatorname{tr}\left(A(t)\right)\,dt} = e^0 = 1,$$

de sorte que le discriminant du trinôme χ_ε vaut

$$\Delta_\varepsilon = \operatorname{tr}\big(R_\varepsilon(T,0)\big)^2 - 4.$$

Le développement limité de la question 2.e assure alors que

$$\Delta_\varepsilon = -4\varepsilon^2 T \int_0^T a(s)\,ds + \underset{\varepsilon\to 0}{o}\big(\varepsilon^2\big).$$

Sous la condition $\int_0^T a(t)\,dt > 0$, il existe donc un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0,\ \Delta_\varepsilon < 0.$$

Par conséquent, le polynôme caractéristique χ_ε possède deux racines complexes conjuguées distinctes λ_ε et $\overline{\lambda_\varepsilon}$. Comme

$$1 = \det\big(R_\varepsilon(T,0)\big) = \lambda_\varepsilon\,\overline{\lambda_\varepsilon} = \big|\lambda_\varepsilon\big|^2,$$

il existe de plus un nombre $\theta_\varepsilon \in]0, \pi[$ tel que

$$\lambda_\varepsilon = e^{i\theta_\varepsilon}.$$

Puisque le polynôme caractéristique χ_ε possède deux racines distinctes, la matrice $R_\varepsilon(T, 0)$ est diagonalisable, et nous pouvons déterminer une matrice inversible $Q_\varepsilon \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$R_\varepsilon(T, 0) = Q_\varepsilon \begin{pmatrix} e^{i\theta_\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\varepsilon} \end{pmatrix} Q_\varepsilon^{-1}.$$

Dans ce cas, nous savons qu'une expression possible pour la matrice B_ε est donnée par la formule

$$B_\varepsilon = Q_\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{i\theta_\varepsilon}{T} & 0 \\ 0 & -\frac{i\theta_\varepsilon}{T} \end{pmatrix} Q_\varepsilon^{-1},$$

auquel cas nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R},\, e^{tB_\varepsilon} = Q_\varepsilon \begin{pmatrix} e^{\frac{it\theta_\varepsilon}{T}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-it\theta_\varepsilon}{T}} \end{pmatrix} Q_\varepsilon^{-1}.$$

Nous observons alors que l'application $t \mapsto e^{tB_\varepsilon}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction P_ε est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}$. Par la formule de Floquet, la résolvante $R_\varepsilon(t, 0)$ est également bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui garantit que toute solution de l'équation différentielle (2) est bornée pour $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Nous concluons alors grâce aux équivalences des questions 1.a et 1.b. Lorsque x_ε est solution de l'équation (1), la fonction Y_ε définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\, Y_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(\varepsilon t) \\ x_\varepsilon'(\varepsilon t) \end{pmatrix},$$

est solution de l'équation (2). Elle est donc bornée lorsque $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, ce qui implique que la solution x_ε est également bornée. En définitive, toute solution de l'équation différentielle (1) est bien bornée pour $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$.

b. Sachant que l'intégrale $\int_0^T a(s)\, ds$ est strictement positive, nous déduisons du développement limité de la question 2.e qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\operatorname{tr}\big(R_\delta(T, 0)\big) \leq 2 - \frac{\delta^2\, T}{2} \int_0^T a(s)\, ds.$$

D'après la question 2.a, l'application $\varepsilon \mapsto R_\varepsilon(T, 0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de sorte que par continuité de la trace, l'application $\varepsilon \mapsto \operatorname{tr}(R_\varepsilon(T, 0))$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme

$$\operatorname{tr}\big(R_0(T, 0)\big) = 2,$$

d'après la question 2.e, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que

$$\forall 2 - \frac{\delta^2 T}{2} \int_0^T a(s)\, ds \leq \mu < 2,\, \exists 0 < \varepsilon_\mu \leq \delta \text{ tel que } \operatorname{tr}\big(R_{\varepsilon_\mu}(T, 0)\big) = \mu.$$

Observons alors que

$$\forall k \geq 2,\, 2\cos\Big(\frac{2\pi}{k}\Big) < 2, \quad \text{et} \quad 2\cos\Big(\frac{2\pi}{k}\Big) \underset{k \to +\infty}{\to} 2.$$

En particulier, il existe un nombre $K \geq 2$ tel que

$$\forall k \geq K,\, 2 - \frac{\delta^2 T}{2} \int_0^T a(s)\, ds \leq 2 \cos\Big(\frac{2\pi}{k}\Big) < 2,$$

et nous pouvons déterminer des nombres $\varepsilon_n \in]0, \delta]$ tels que

$$\forall n \geq 0,\, \mathrm{tr}\big(R_{\varepsilon_n}(T, 0)\big) = 2 \cos\Big(\frac{2\pi}{K + n}\Big).$$

Revenons alors au calcul des valeurs propres des résolvantes $R_{\varepsilon_n}(T, 0)$ effectué à la question 2.a. Ces valeurs propres sont désormais racines du trinôme

$$\chi_{\varepsilon_n}(X) = X^2 - 2 \cos\Big(\frac{2\pi}{K + n}\Big) X + 1,$$

dont le discriminant est égal à

$$\Delta_{\varepsilon_n} = 4 \cos\Big(\frac{2\pi}{K + n}\Big)^2 - 4 = -4 \sin\Big(\frac{2\pi}{K + n}\Big)^2.$$

Ces valeurs propres sont donc données par les expressions

$$\lambda_{\varepsilon_n}^{\pm} = \cos\Big(\frac{2\pi}{K + n}\Big) \pm i \sin\Big(\frac{2\pi}{K + n}\Big) = e^{\pm \frac{2i\pi}{K+n}}.$$

Comme elles sont distinctes, la résolvante $R_{\varepsilon_n}(T, 0)$ peut se diagonaliser sous la forme

$$R_{\varepsilon_n}(T, 0) = Q_{\varepsilon_n} \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{K+n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2i\pi}{K+n}} \end{pmatrix} Q_{\varepsilon_n}^{-1},$$

pour une matrice inversible $Q_{\varepsilon_n} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$. Nous calculons alors

$$\forall N \geq 1,\, R_{\varepsilon_n}(T, 0)^N = Q_{\varepsilon_n} \begin{pmatrix} e^{\frac{2iN\pi}{K+n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2iN\pi}{K+n}} \end{pmatrix} Q_{\varepsilon_n}^{-1}.$$

Pour $N = K + n$, nous concluons que

$$R_{\varepsilon_n}(T, 0)^N = Q_{\varepsilon_n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q_{\varepsilon_n}^{-1} = Q_{\varepsilon_n}\, Q_{\varepsilon_n}^{-1} = I_2,$$

et la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ satisfait donc toutes les propriétés requises.

c. Nous cherchons à montrer que pour toutes les valeurs ε_n de la suite construite à la question 3.b, toute solution de l'équation différentielle (1) est périodique. Nous commençons par vérifier cette propriété pour l'équation (2). Comme à la question 3.a, nous appliquons le théorème de Floquet qui fournit l'existence d'une application T-périodique $P_{\varepsilon_n} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ et d'une matrice $B_{\varepsilon_n} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, R_{\varepsilon_n}(t, 0) = P_{\varepsilon_n}(t)\, e^{tB_{\varepsilon_n}},$$

avec

$$R_{\varepsilon_n}(T, 0) = e^{TB_{\varepsilon_n}}.$$

Compte tenu des calculs effectués à la question 2.b, nous pouvons choisir la matrice

$$B_{\varepsilon_n} = Q_{\varepsilon_n} \begin{pmatrix} \frac{2i\pi}{NT} & 0 \\ 0 & -\frac{2i\pi}{NT} \end{pmatrix} Q_{\varepsilon_n}^{-1},$$

dans cette décomposition, et nous vérifions que

$$e^{NTB_{\varepsilon_n}} = Q_{\varepsilon_n} \begin{pmatrix} e^{\frac{2iN\pi}{K+n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2iN\pi}{K+n}} \end{pmatrix} Q_{\varepsilon_n}^{-1} = I_2.$$

Par la formule de Floquet, nous obtenons

$$R_{\varepsilon_n}(NT, 0) = P_{\varepsilon_n}(NT).$$

Comme l'application P_{ε_n} est T-périodique, nous déduisons à nouveau de la formule de Floquet que

$$P_{\varepsilon_n}(NT) = P_{\varepsilon_n}(0) = R_{\varepsilon_n}(0, 0) = I_2,$$

ce qui conduit à l'identité

$$R_{\varepsilon_n}(NT) = I_2.$$

Cette formule signifie que toute solution $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de l'équation différentielle (2) est NT-périodique. Considérons en effet la fonction Z définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Z(t) = Y(t + NT).$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = Y'(t + NT) = \varepsilon_n\, A(t + NT)\, Y(t + nT) = \varepsilon_n\, A(t)\, Z(t),$$

par T-périodicité de l'application A. Par définition de la résolvante, nous savons de plus que

$$Z(0) = Y(NT) = R_{\varepsilon_n}(NT, 0)\, Y(0) = Y(0).$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = \varepsilon_n A(t) Y(t), \\ Y(0) = Y(0), \end{cases}$$

nous concluons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = Z(t) = Y(t + NT),$$

soit que la solution Y est NT-périodique.

Il suffit alors d'utiliser l'équivalence des questions 1.a et 1.b pour vérifier que, si toute solution de l'équation différentielle (2) est NT-périodique, alors toute solution de l'équation différentielle (1) est $\varepsilon_n NT$-périodique. Nous sommes donc amenés à conclure que pour chacun des nombres ε_n, toutes les solutions de l'équation différentielle (1) sont périodiques.

Sachant que les nombres ε_n sont petits d'après la question 3.b, il reste à vérifier qu'ils sont tous distincts pour obtenir une infinité de valeurs petites du nombre ε pour lesquelles toutes les solutions de l'équation différentielle (1) sont périodiques. Supposons donc qu'il existe deux entiers distincts n_1 et n_2 tels que $\varepsilon_{n_1} = \varepsilon_{n_2}$. Nous déduisons de la preuve de la question 3.b que

$$2 \cos\Big(\frac{2\pi}{K + n_1}\Big) = 2 \cos\Big(\frac{2\pi}{K + n_2}\Big).$$

Il suffit alors de combiner l'injectivité de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$ et le fait que $K \geq 2$ pour montrer que $n_1 = n_2$, ce qui est absurde. Nous concluons que les nombres ε_n sont deux à deux distincts, et qu'il existe ainsi une infinité de valeurs petites du nombre ε pour lesquelles toutes les solutions de (1) sont périodiques.