Corrigé du devoir à la maison N°1

Exercice 1.

1.a. Rappelons que le déterminant d'une matrice dépend de façon polynomiale des coefficients de cette matrice. Sachant que les coefficients de la matrice $zA + (1 - z)B$ dépendent de façon affine de la variable complexe z, la fonction δ s'avère être une fonction polynôme sur $\mathbb{C}$. Comme la matrice B est inversible, nous vérifions que

$$\delta(0) = \det(B) \neq 0,$$

de sorte que la fonction δ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. En tant que fonction polynôme, elle s'annule donc en un nombre fini de points de $\mathbb{C}$.

b. Supposons d'abord que la fonction polynôme δ possède des points d'annulation réels $x_1 < \ldots < x_p$ dans le segment $[0, 1]$. Comme les matrices A et B sont inversibles, nous savons que

$$\delta(0) = \det(B) \neq 0, \quad \text{ et } \quad \delta(1) = \det(A) \neq 0,$$

de sorte qu'aucun de ces points d'annulation n'est égal à 0 ou à 1. Sachant que la fonction polynôme δ s'annule en un nombre fini de points de $\mathbb{C}$, nous pouvons de plus déterminer un rayon $\rho > 0$ tel que d'une part, chacun des points x_j est le seul point d'annulation de cette fonction dans les disques fermés de centre x_j et de rayon ρ, et d'autre part, les inégalités

$$0 < x_1 - \rho < x_1 + \rho < x_2 - \rho < \ldots < x_j + \rho < x_{j+1} - \rho < \ldots < x_p + \rho < 1,$$

soient satisfaites.

Nous pouvons alors introduire un chemin γ du plan complexe entre les points 0 et 1 qui relie en ligne droite les points 0 et $x_1 - \rho$, puis $x_1 - \rho$ et $x_1 + i\rho$, puis $x_1 + i\rho$ et $x_1 + \rho$, puis $x_1 + \rho$ et $x_2 - \rho$, et ainsi de suite jusqu'au point $x_p + \rho$, et enfin, les point $x_p + \rho$ et 1. Par construction, ce chemin ne rencontre jamais l'ensemble d'annulation de la fonction polynôme δ.

À ce chemin nous pouvons enfin associer une application $z \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ telle que $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$, et dont l'image est exactement le chemin γ. Nous concluons que cette application convient puisqu'alors

$$\forall t \in [0, 1],\ \delta(z(t)) \neq 0.$$

Notons enfin que, dans le cas où la fonction δ ne s'annule pas sur $[0, 1]$, il suffit de poser

$$\forall t \in [0, 1],\ z(t) = t,$$

pour obtenir l'application recherchée.

c. Nous introduisons la fonction

$$\forall t \in [0, 1],\ P(t) = z(t)A + \big(1 - z(t)\big)B,$$

qui est bien définie et continue de $[0, 1]$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. D'après les questions 1.a et 1.b, nous vérifions que

$$\forall t \in [0, 1],\ \det\big(P(t)\big) = \delta\big(z(t)\big) \neq 0.$$

Les matrices $P(t)$ sont donc toutes inversibles, et la fonction P est à valeurs dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$. Sachant que

$$P(0) = B, \quad \text{et} \quad P(1) = A,$$

puisque $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$, la fonction P forme un chemin entre les matrices A et B dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$. Comme les matrices A et B sont choisies de façon arbitraire dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$, cet ensemble est bien connexe par arcs.

2.a. L'application ϕ est bien définie de $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. De plus, elle satisfait

$$\forall (M, \lambda) \in \mathcal{SL}_N(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \det\big(\phi(M, \lambda)\big) = \det\big(M\big) \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix} = \lambda \neq 0,$$

de sorte qu'elle est à valeurs dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$. Considérons alors une matrice $P \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$ et supposons qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{SL}_N(\mathbb{C})$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$\phi(M, \lambda) = P.$$

Nous déduisons du calcul précédent que

$$\lambda = \det(P),$$

puis que

$$M = P \begin{pmatrix} \det(P) & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix}^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\det(P)} & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix},$$

ce qui assure l'injectivité de l'application ϕ. De plus, étant donnée une matrice $P \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$, nous savons que

$$\det(P) \neq 0,$$

et que

$$\det\left(P \begin{pmatrix} \frac{1}{\det(P)} & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix} \right) = \det(P) \, \frac{1}{\det(P)} = 1.$$

La matrice

$$M = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\det(P)} & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix},$$

appartient donc à $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C})$, et nous avons établi que

$$P = \phi\big(M, \det(P)\big).$$

L'application ϕ est ainsi surjective, donc bijective, d'inverse donné par

$$\phi^{-1}(P) = \left(P \begin{pmatrix} \frac{1}{\det(P)} & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix}, \det(P) \right).$$

Par continuité du produit matriciel et du déterminant, les applications ϕ et ϕ^{-1} sont toutes deux continues, et nous concluons que l'application ϕ réalise un homéomorphisme entre $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ et $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$.

b. Considérons deux matrices arbitraires A et B de $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C})$. Comme cet ensemble est inclus dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$, nous pouvons invoquer la connexité par arcs de ce second ensemble pour exhiber un chemin $P \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathcal{GL}_N(\mathbb{C}))$ tel que $P(0) = B$ et $P(1) = A$. Nous définissons alors à partir de la question 2.a la fonction

$$\forall t \in [0, 1], \, M(t) = P(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{\det\big(P(t)\big)} & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Les calculs de la question 2.a assurent que cette fonction est bien définie de $[0,1]$ dans $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C})$, et de plus continue sur $[0,1]$ par continuité du produit matriciel et du déterminant. Comme les matrices A et B sont dans $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C})$, nous savons que

$$\det(A) = \det(B) = 1,$$

de sorte que

$$M(0) = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{pmatrix} = B, \quad \text{et} \quad M(1) = A.$$

La fonction M forme donc un chemin entre les matrices A et B dans $\mathcal{SL}_N(\mathbb{C})$, et cet ensemble est aussi connexe par arcs.

3.a. Considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de U et un vecteur propre $e \in \mathbb{C}^N$ associé de norme 1. Nous pouvons alors calculer

$$\|Ue\|^2 = \|\lambda e\|^2 = |\lambda|^2 \, \|e\|^2 = |\lambda|^2,$$

tandis que

$$\|Ue\|^2 = \langle Ue, Ue \rangle = \langle {}^t\overline{U} Ue, e \rangle = \langle U^{-1} Ue, e \rangle = \langle e, e \rangle = \|e\|^2 = 1,$$

puisque U est unitaire. Il vient donc

$$|\lambda|^2 = 1,$$

ce qui assure que la valeur propre λ est de module égal à 1.

b. Lorsque V est un sous-espace stable par la matrice U, l'application linéaire $u_{|V}$ définie par

$$\forall x \in V,\ u_{|V}(x) = Ux,$$

est bien définie de V dans V. Sachant que la matrice U est unitaire donc inversible, cette application est injective, donc bijective, puisque les dimensions de ses espaces de départ et d'arrivée sont identiques. Quel que soit un vecteur $y \in V$, il existe donc une unique vecteur x de V tel que $Ux = y$, et par inversibilité de la matrice U, ce vecteur x est égal au vecteur $U^{-1}y$. Nous avons ainsi vérifié que le vecteur $U^{-1}y$ appartient à V, et que ce sous-espace est donc aussi stable par la matrice inverse U^{-1}.

Considérons alors un vecteur $z \in V^\perp$. Nous savons que

$$\forall x \in V,\ \langle Uz, x \rangle = \langle z, {}^t\overline{U} x \rangle = \langle z, U^{-1} x \rangle = 0,$$

puisque le vecteur $U^{-1}x$ appartient au sous-espace V. Le vecteur Uz est donc orthogonal à tout vecteur de V, soit dans $V^\perp$, et nous concluons que ce sous-espace est aussi stable par la matrice U.

c. Nous raisonnons par récurrence sur $N \geq 1$. Au rang $N = 1$, nous constatons qu'une matrice $U = (u)$ est unitaire si et seulement si le nombre complexe u est non nul et satisfait la condition $\overline{u} = 1/u$. Cette propriété équivaut au fait que $|u| = 1$, soit qu'il existe un nombre réel θ_1 tel que $u = e^{i\theta_1}$. Nous pouvons alors conclure que la matrice U s'écrit sous la forme

$$U = I_1 \big(e^{i\theta_1}\big) I_1^{-1},$$

dans laquelle la matrice identité I_1 est unitaire.

Supposons ensuite que nous puissions écrire toute matrice unitaire sous cette forme jusqu'à la dimension $N-1$, et considérons une matrice unitaire $U \in \mathcal{U}_N(\mathbb{C})$. Cette matrice possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, qui d'après la question 3.a, est de module un, soit de la forme $\lambda = e^{i\theta_1}$. Introduisons un vecteur propre associée e_1 de norme 1, et une base orthonormée $e_2, \ldots, e_N$ de l'orthogonal de la droite engendrée par le vecteur e_1. Comme e_1 est un vecteur propre de U, cette droite est stable par U, et d'après la question 3.b, son orthogonal est aussi stable par U.

Introduisons alors la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{C}^N$ à la base orthonormée formée par les vecteurs $e_1, \ldots, e_N$. Nous déduisons de la stabilité de la droite engendrée par le vecteur e_1 et par son orthogonal que la matrice U s'écrit sous la forme

$$U = Q \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Vérifions alors que la matrice Q est unitaire. Ces vecteurs colonnes sont formés par les coefficients des vecteurs $e_1, \ldots, e_N$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$. Nous calculons donc

$$\left[{}^t\overline{Q}\,Q\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} \left[{}^t\overline{Q}\right]_{i,k} \left[Q\right]_{k,j} = \sum_{k=1}^{N} \overline{\left[Q\right]_{k,i}} \left[Q\right]_{k,j} = \sum_{k=1}^{N} \overline{\left[e_i\right]_k} \left[e_j\right]_k = \langle e_j, e_i \rangle = \delta_{i,j},$$

d'où la formule

$${}^t\overline{Q}\,Q = I_N.$$

Par inversibilité de la matrice de changement de base Q, son inverse est donc égal à la matrice ${}^t\overline{Q}$, ce qui confirme que la matrice Q est unitaire.

Nous pouvons donc calculer à la fois

$$U^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1},$$

et

$${}^t\overline{U} = {}^t\overline{Q^{-1}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & 0 \\ 0 & {}^t\overline{V} \end{pmatrix} {}^t\overline{Q^{-1}} = Q \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & 0 \\ 0 & {}^t\overline{V} \end{pmatrix} Q^{-1},$$

puisque ${}^t\overline{Q} = Q^{-1}$, et par suite, ${}^t\overline{Q^{-1}} = Q$. Comme la matrice U est unitaire, il découle de l'égalité $U^{-1} = {}^t\overline{U}$ que

$$V^{-1} = {}^t\overline{V},$$

soit que la matrice V est aussi unitaire, mais maintenant de taille $N-1$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe donc des nombres réels $\theta_2, \ldots, \theta_N$, et une matrice $R \in \mathcal{U}_{N-1}(\mathbb{C})$ tels que

$$V = R \begin{pmatrix} e^{i\theta_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{i\theta_N} \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Nous concluons que

$$U = S \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{i\theta_N} \end{pmatrix} S^{-1},$$

où nous avons noté

$$S = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Il reste alors à vérifier que la matrice S est unitaire. Nous avons en effet

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\overline{R} \end{pmatrix} {}^t\overline{Q} = {}^t\overline{S},$$

puisque les matrices Q et R sont unitaires. Nous concluons par récurrence sur la dimension $N \geq 1$ que toute matrice $U \in \mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme

$$U = P \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

pour une matrice unitaire $P \in \mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ et des nombres réels θ_1, θ_2, ..., et θ_N.

d. Considérons une matrice unitaire arbitraire U. D'après la question 3.c, nous savons qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ et des nombres réels θ_1, ..., et θ_N tels que

$$U = P \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Posons alors

$$\forall t \in [0,1],\ M(t) = P \begin{pmatrix} e^{it\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{it\theta_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

L'application M est bien définie et continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ par continuité du produit matriciel et de l'exponentielle complexe. De plus, elle satisfait

$$M(0) = P\, I_N\, P^{-1} = I_N, \quad \text{et} \quad M(1) = U.$$

En outre, nous calculons

$${}^t\overline{M(t)} = {}^t\overline{P^{-1}} \begin{pmatrix} e^{-it\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{-it\theta_n} \end{pmatrix} {}^t\overline{P} = P \begin{pmatrix} e^{-it\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{-it\theta_n} \end{pmatrix} P^{-1},$$

puisque ${}^t\overline{P} = P^{-1}$, et par conséquent, ${}^{tt}\overline{\overline{P}} = {}^t\big({}^tP\big) = P$. Nous arrivons donc à

$$\begin{aligned} M(t)\, {}^t\overline{M(t)} &= P \begin{pmatrix} e^{it\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{it\theta_n} \end{pmatrix} P^{-1}\, P \begin{pmatrix} e^{-it\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{-it\theta_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{it\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{it\theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{-it\theta_n} \end{pmatrix} P^{-1} = I_N. \end{aligned}$$

De façon identique, nous avons ${}^t\overline{M(t)}\, M(t) = I_N$, ce qui prouve que la matrice $M(t)$ est inversible d'inverse ${}^t\overline{M(t)}$, donc unitaire. En conclusion la fonction M forme un chemin dans $\mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ entre la matrice identité I_N et une matrice arbitraire de $\mathcal{U}_N(\mathbb{C})$. Cette propriété suffit à établir que le groupe unitaire $\mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ est bien connexe par arcs.

Exercice 2.

1.a. Étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, les coefficients de la matrice ${}^tM\, A\, M$ sont bien définis, et par définition de la transposition et du produit matriciel, dépendent de façon polynomiale de la matrice M. L'application F est donc bien définie sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet espace. De plus, elle satisfait

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ {}^tF(M) = {}^tM\, {}^tA\, {}^t\big({}^tM\big) = {}^tM\, A\, M = F(M),$$

puisque la matrice A est symétrique. L'application F est donc à valeurs dans l'espace $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

b. Considérons la norme d'opérateur $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^N$. Par définition de cette norme d'opérateur, puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous vérifions que

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ |||M||| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Mx\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \langle Mx, y\rangle,$$

de sorte que

$$|||{}^tM||| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \langle {}^tMx, y\rangle = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \langle x, My\rangle = \sup_{\|y\|\leq 1} \|My\| = |||M|||.$$

Nous calculons alors

$$\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ F(I_N + H) = A + {}^tH\, A + A\, H + {}^tH\, A\, H.$$

Sachant que $F(I_N) = A$, et que

$$|||{}^tH\, A\, H||| \leq |||{}^tH|||\, |||A|||\, |||H||| = |||A|||\, |||H|||^2 \underset{|||H|||\to 0}{=} o\,|||H|||,$$

la différentielle de la fonction F en l'identité I_N est donnée par l'application linéaire

$$\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ dF(I_N)(H) = {}^tH\, A + A\, H.$$

c. Rappelons que l'application F est à valeurs dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$, et donc que la différentielle $dF(I_N)$ est également à valeurs dans ce sous-espace. Étant donnée une matrice $S \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$, nous introduisons la matrice

$$H = \frac{1}{2}\, A^{-1}\, S,$$

qui vérifie

$${}^tH = \frac{1}{2}\, {}^tS\, {}^tA^{-1} = \frac{1}{2}\, S\, A^{-1},$$

puisque les matrices A et S sont symétriques. Nous obtenons alors

$$dF(I_N)(H) = \frac{1}{2}\Big(S\, A^{-1}\, A + A\, A^{-1}\, S\Big) = S,$$

ce qui montre que l'application différentielle $dF(I_N)$ est surjective sur $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

Quant à son noyau, nous vérifions qu'une matrice H vérifie $dF(I_N)(H) = 0$ si et seulement si

$${}^t\big(A\, H\big) = {}^tH\, {}^tA = -A\, H,$$

soit si et seulement si la matrice AH est antisymétrique. Sachant que la matrice A est inversible, nous concluons que

$$\mathrm{Ker}\big(dF(I_N)\big) = \Big\{A^{-1}B,\ \text{avec } B \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})\Big\},$$

où $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

d. Nous commençons par constater que l'ensemble E est un sous-espace de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, et par conséquent, un sous-ensemble fermé, donc un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|$. La restriction $F_{|E}$ de la fonction F au sous-espace E demeure de classe $\mathcal{C}^\infty$ de E dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$. De plus, la matrice identité I_N appartient au sous-espace E et la différentielle de la fonction $F_{|E}$ reste égale à

$$\forall H \in E,\ dF_{|E}(I_N)(H) = {}^tH\,A + A\,H = 2A\,H.$$

Sachant que la matrice A est inversible, cette différentielle est désormais injective. Étant donnée une matrice $S \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$, nous constatons de plus que la matrice $H = 1/2\,A^{-1}\,S$ que nous avions introduite à la question 1.c pour résoudre l'équation $dF(I_N)(H) = S$ satisfait

$${}^tHA = \frac{1}{2}{}^tS{}^tA^{-1}A = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}A\,A^{-1}\,S = AH,$$

de sorte que la matrice H appartient au sous-espace E. La différentielle $dF_{|E}(I_N)$ est par suite surjective, et donc bijective de E dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc invoquer le théorème d'inversion locale afin de déterminer un voisinage ouvert ω de la matrice identité I_N dans E tel que la fonction F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de ω sur son image $F(\omega)$.

Rappelons enfin que le groupe linéaire $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application déterminant. En particulier, l'intersection $\omega \cap \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ reste un voisinage ouvert de la matrice identité I_N dans E, et quitte à remplacer le voisinage ouvert ω par cette intersection, nous pouvons donc supposer que ω est inclus dans $E \cap \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$.

e. Notons $\mathcal{V}$ l'image du voisinage ouvert ω par la fonction F. Cet ensemble contient la matrice A, car $F(I_N) = A$, et c'est un ouvert de $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ puisqu'il s'agit de l'image réciproque par l'inverse (continu) de F du voisinage ouvert ω. L'ensemble $\mathcal{V}$ est donc un voisinage ouvert de A dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

Notons alors G l'inverse de F sur l'ensemble $\mathcal{V}$. D'après la question 1.d, cette fonction est bien définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{V}$ dans ω, soit dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$, puisque ω est inclus dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$. Par définition de cette inverse, nous avons enfin

$$\forall M \in \mathcal{V},\ M = F\big(G(M)\big) = {}^tG(M)\,A\,G(M).$$

2.a. Nous appliquons la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2, laquelle s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}^N,\ f(x) = f(0) + df(0)(x) + \int_0^1 (1-t)\,d^2f(tx)(x,x)\,dt.$$

Dans cette formule, nous pouvons identifier les différentielles secondes $d^2f(tx)$ qui sont des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, à des matrices symétriques de taille N, auquel cas nous obtenons l'identité

$$d^2f(tx)(x,x) = {}^tx\,d^2f(tx)\,x.$$

Avec cette identification, et de par l'hypothèse $df(0) = 0$, nous pouvons écrire la formule de Taylor précédente sous la forme recherchée, soit

$$f(x) = f(0) + {}^tx\,B(x)\,x,$$

où nous avons noté

$$B(x) = \int_0^1 (1-t)\, d^2 f(tx)\, dt.$$

Notons que cette quantité est une matrice symétrique de taille N, dont chaque coefficient est donné par la formule

$$[B(x)]_{i,j} = \int_0^1 (1-t)\, \big[d^2 f(tx)\big]_{i,j}\, dt = \int_0^1 (1-t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(tx)\, dt.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^N$, la fonction g définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,\ g(t,x) = (1-t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(tx),$$

est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et nous concluons par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que la fonction B est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

b. Nous appliquons la question 1.e à la matrice A_0 qui est symétrique et inversible. Nous obtenons un voisinage ouvert $\mathcal{V}_0$ de cette matrice dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$, ainsi qu'une application $G_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}_0, \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}))$, tels que

$$\forall M \in \mathcal{V}_0,\ M = {}^t G_0(M)\, A_0\, G_0(M).$$

Nous observons alors par définition de la fonction B que

$$B(0) = \int_0^1 (1-t)\, d^2 f(0)\, dt = \frac{1}{2} d^2 f(0) = A_0,$$

d'où par continuité de la fonction B, l'existence d'un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^N$ tel que

$$\forall y \in U,\ B(y) \in \mathcal{V}_0.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\forall y \in U,\ B(y) = {}^t G_0\big(B(y)\big)\, A_0\, G_0\big(B(y)\big),$$

puis déduire de la question 2.a que

$$f(y) = f(0) + {}^t X(y)\, A_0\, X(y),$$

où nous avons noté

$$\forall y \in U,\ X(y) = G_0\big(B(y)\big)\, y.$$

Comme $B \in \mathcal{C}^1(U, \mathcal{V}_0)$ et $G_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}_0, \mathcal{GL}_N(\mathbb{R}))$, nous concluons enfin par composition et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ que l'application X est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^N$.

c. Rappelons que la matrice symétrique A_0 est inversible, de sorte que la forme bilinéaire associée est non dégénérée. Sa signature est donc égale à un couple de la forme $(r, N-r)$ pour un entier $0 \leq r \leq N$, et il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N,\ {}^t(Qx)\, A_0\, (Qx) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{i=r+1}^N x_i^2.$$

d. D'après la formule de la question 2.b, nous pouvons écrire

$$\forall y \in U,\ f(y) = f(0) + {}^t\big(Q\, Z(y)\big)\, A_0\, \big(Q\, Z(y)\big),$$

où nous avons posé

$$\forall y \in U,\ Z(y) = Q^{-1}\, X(y).$$

Comme la fonction X est de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^N$, la fonction Z est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^N$. De plus, nous savons que

$$G_0\big(B(y)\big) = G_0\big(B(0)\big) + \Delta(y),$$

où

$$|||\Delta(y)||| = \underset{\|y\|\to 0}{\mathcal{O}}\big(\|y\|\big).$$

Il s'ensuit que

$$Z(y) = Q^{-1}\, G_0\big(B(0)\big)y + Q^{-1}\Delta(y)y,$$

où

$$\|Q^{-1}\Delta(y)y\| \leq |||Q^{-1}|||\ |||\Delta(y)|||\ \|y\| = \underset{\|y\|\to 0}{\mathcal{O}}\big(\|y\|^2\big).$$

En particulier, la différentielle $dZ(0)$ de l'application Z en 0 est donnée par la matrice

$$dZ(0) = Q^{-1}\, G_0\big(B(0)\big) = Q^{-1}\, G_0\big(A_0\big),$$

puisque $B(0) = A_0$. Sachant que les matrices Q et $G_0(A_0)$ sont inversibles, la matrice $dZ(0)$ est également inversible. Comme $Z(0) = 0$, nous pouvons appliquer le théorème d'inversion locale afin d'établir que la fonction Z réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage ouvert $W \subset U$ de 0 dans $\mathbb{R}^N$ sur un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^N$.

Introduisons alors sa bijection réciproque Y qui est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. Nous vérifions que cette fonction satisfait

$$\forall x \in V,\ f\big(Y(x)\big) = f(0) + {}^t\big(Q\, Z(Y(x))\big)\, A_0\, \Big(Q\, Z(Y(x))\Big) = f(0) + {}^t\big(Q\, x\big)\, A_0\, \big(Q\, x\big),$$

soit en définitive d'après la question 2.c,

$$f\big(Y(x)\big) = f(0) + \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{N} x_i^2.$$