Corrigé du devoir à la maison N°1

Exercice 1.

1. Soit d le degré du polynôme P. Étant donné un nombre complexe z fixé, la formule de Taylor assure que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(z)}{k!} \big(X - z\big)^k,$$

d'où la formule

$$P(z + h) = P(z) + P'(z)h + \sum_{k=2}^{d} \frac{P^{(k)}(z)}{k!} h^k,$$

pour tout nombre $h \in \mathbb{C}$. Pour $|h| \leq 1$, nous observons d'abord que

$$\Big| P'(z)h + \sum_{k=2}^{d} \frac{P^{(k)}(z)}{k!} h^k \Big| \leq \sum_{k=1}^{d} \frac{\big|P^{(k)}(z)\big|}{k!} |h|^k \leq \sum_{k=1}^{d} \frac{\big|P^{(k)}(z)\big|}{k!} |h|,$$

de sorte que

$$\big|P(z + h) - P(z)\big| \underset{h \to 0}{\to} 0,$$

ce qui assure que l'application polynomiale P est continue en z.

De façon similaire, nous calculons

$$\Big| \sum_{k=2}^{d} \frac{P^{(k)}(z)}{k!} h^k \Big| \leq \sum_{k=2}^{d} \frac{\big|P^{(k)}(z)\big|}{k!} |h|^k \leq \sum_{k=2}^{d} \frac{\big|P^{(k)}(z)\big|}{k!} |h|^2,$$

lorsque $|h| \leq 1$, d'où la formule

$$\sum_{k=2}^{d} \frac{P^{(k)}(z)}{k!} h^k = \underset{h \to 0}{o}\big(|h|\big).$$

Sachant que l'application $dP(z)$ définie par

$$\forall h \in \mathbb{C},\ dP(z)(h) = P'(z)h,$$

est linéaire et continue sur $\mathbb{C}$, nous en déduisons que l'application polynomiale P est différentiable en z de différentielle égale à $dP(z)$.

Étant donné un autre nombre $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, nous vérifions enfin que

$$\big|dP(\tilde{z})(h) - dP(z)(h)\big| \leq |P'(\tilde{z}) - P'(z)||h|,$$

de sorte que la norme de l'application linéaire $dP(\tilde{z}) - dP(z)$ satisfait

$$\big\|dP(\tilde{z}) - dP(z)\big\| \leq |P'(\tilde{z}) - P'(z)|.$$

Comme P' est une application polynomiale, elle est aussi continue sur $\mathbb{C}$, et il résulte de l'inégalité précédente que l'application différentielle $z \mapsto dP(z)$ est également continue sur $\mathbb{C}$. En conclusion, l'application polynomiale P est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$.

2.a. Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous déduisons de la question 1. que la différentielle $dP(z)$ est nulle si et seulement si

$$\forall h \in \mathbb{C},\ P'(z)h = 0,$$

soit si et seulement si le nombre z est une racine du polynôme dérivée P'. Rappelons alors que le polynôme P est non constant, et que son degré est donc supérieur ou égal à 1. En particulier, le polynôme dérivé P' ne peut être identiquement nul : soit il ne s'annule pas, soit il possède un nombre fini de racines z_1, ..., z_m. Par conséquent, l'ensemble K est soit vide, soit égal à

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} \big\{ P(z_i) \big\}.$$

Comme une réunion finie de sous-ensembles fermés est fermé, l'ensemble K est dans les deux cas fermé. Par conséquent, son complémentaire $\mathbb{C} \setminus K$ est ouvert.

b. Rappelons qu'un polynôme non constant P n'est pas identiquement nul : soit il ne s'annule pas, soit il possède un nombre au plus fini de racines. Étant donné un nombre $\xi \in \mathbb{C}$, l'ensemble

$$P^{-1}\{\xi\} = \big\{ z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } P(z) = \xi \big\},$$

est exactement l'ensemble des racines du polynôme non contant $P(X) - \xi$. Cet ensemble est donc soit vide, auquel cas son cardinal est nul, soit fini, auquel cas son cardinal est fini. En particulier, l'application ν est bien définie de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{N}$.

3.a. Considérons une suite $(P(z_n))_{n \geq 0}$ de l'image de la fonction P pour laquelle il existe un nombre $\xi \in \mathbb{C}$ tel que

$$P(z_n) \underset{n \to +\infty}{\to} \xi.$$

Rappelons que le polynôme P est non constant, et que son degré d est donc non nul. Ce polynôme s'écrit sous la forme

$$P(z) = a_d z^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k,$$

pour un nombre complexe a_d non nul. Il satisfait ainsi

$$\big| P(z) \big| \underset{|z| \to +\infty}{\sim} |a_d| |z|^d \underset{|z| \to +\infty}{\to} +\infty.$$

Supposons alors que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée. Dans ce cas, elle possède une sous-suite $(z_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ telle que

$$\big| z_{\phi(n)} \big| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty,$$

de sorte que

$$\big| P(z_{\phi(n)}) \big| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty,$$

ce qui est absurde, puisque la suite $(P(z_n))_{n \geq 0}$ est convergente de limite ξ. Il s'ensuit que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est bornée, et nous pouvons extraire une sous-suite $(z_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ convergente vers une limite $z_\infty \in \mathbb{C}$. Par continuité de l'application polynomiale P, nous obtenons

$$P(z_{\phi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\to} P(z_\infty),$$

d'où par unicité de la limite,

$$\xi = P(z_\infty).$$

Le nombre ξ appartient donc à l'image de la fonction P, et cette image est par conséquent un sous-ensemble fermé de $\mathbb{C}$.

b. Soit $\xi \in \mathbb{C}$. La fonction ν s'annule en ξ si et seulement si ξ n'a pas d'antécédent par l'application P, soit si et seulement ξ n'appartient pas à l'image de la fonction P. L'ensemble $\nu^{-1}\{0\}$ est donc égal au complémentaire de l'image de la fonction P. Comme cet ensemble est fermé par la question 3.a, l'ensemble $\nu^{-1}\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

4.a. Comme $\nu = \nu(\xi)$ est strictement positif, nous pouvons trouver des nombres complexes distincts $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ tels que

$$P^{-1}\{\xi\} = \Big\{\zeta_i, 1 \leq i \leq \nu\Big\}.$$

Comme ξ n'appartient pas à K, nous savons que toutes les différentielles $dP(\zeta_i)$ sont non nulles, ce qui revient à affirmer d'après la preuve de la question 2.a, que les nombres ζ_i ne sont pas des racines du polynôme dérivé P'. Dans ce cas, les différentielles $dP(\zeta_i)$ sont inversibles d'inverses données par les formules

$$\forall h \in \mathbb{C},\, dP(\zeta_i)^{-1}(h) = \frac{h}{P'(\zeta_i)}.$$

Par le théorème d'inversion locale, nous pouvons donc trouver des ouverts U_i et V_i de $\mathbb{C}$, qui contiennent les nombres ζ_i, respectivement le nombre ξ, et tels que l'application P réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, noté P_i, de U_i sur V_i.

Comme les nombres ζ_i sont distincts, nous pouvons alors trouver un nombre $r > 0$ tel que

$$\forall 1 \leq i \leq \nu,\, D(\zeta_i, r) \subset U_i, \quad \text{et} \quad \forall j \neq i,\, D(\zeta_j, r) \cap D(\zeta_i, r) = \emptyset.$$

Notons ensuite

$$\forall 1 \leq i \leq \nu,\, W_i = P\big(D(\zeta_i, r)\big), \quad \text{et} \quad W = \bigcap_{i=1}^{\nu} W_i.$$

Sachant que $P = P_i$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_i sur V_i, nous constatons que

$$\begin{aligned}\big(P_i^{-1}\big)^{-1}\big(D(\zeta_i, r)\big) &= \big\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } P_i^{-1}(z) \in D(\zeta_i, r)\big\} \\ &= \big\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z \in P_i(D(\zeta_i, r))\big\} = W_i.\end{aligned}$$

Comme l'application P_i^{-1} est continue, et que le disque $D(\zeta_i, r)$ est ouvert, le sous-ensemble W_i est aussi ouvert, de sorte que par intersection finie d'ouverts, le sous-ensemble W est ouvert. En particulier, il existe un nombre $\varrho > 0$ tel que le disque $D(\xi, \varrho)$ est inclus dans W. Les applications P_i sont alors des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes de $\omega_i = P_i^{-1}(D(\xi, \varrho))$ sur $D(\xi, \varrho)$. Comme les ensembles ω_i sont inclus dans les disques $D(\zeta_i, r)$ lesquels sont deux à deux disjoints, tout nombre z du disque $D(\xi, \varrho)$ possède au moins ν antécédents par l'application P : un dans chacun des ensembles ω_i. Nous concluons donc que

$$\forall z \in D(\xi, \varrho),\, \nu(z) \geq \nu = \nu(\xi).$$

b. Vérifions par l'absurde qu'il existe un nombre $0 < \rho < \varrho$ tel que

$$\forall z \in D(\xi, \rho),\, \nu(z) = \nu(\xi).$$

Sinon, nous pouvons trouver une suite $(\rho_n)_{n \geq 0}$ de limite nulle, et des nombres $z_n \in D(\xi, \rho_n)$ tels que

$$\forall n \geq 0,\, \nu(z_n) > \nu = \nu(\xi).$$

Cette dernière propriété signifie qu'il existe des suites de nombres complexes $(\zeta_n^1)_{n \geq 0}, \ldots, (\zeta_n^{\nu+1})_{n \geq 0}$ tels que

$$\forall n \geq 0,\, \forall 1 \leq i \leq \nu + 1,\, P(\zeta_n^i) = z_n, \quad \text{et} \quad \forall j \neq i,\, \zeta_n^j \neq \zeta_n^i.$$

Sachant que $\rho_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, et que $z_n \in D(\xi, \rho_n)$, nous avons

$$z_n \underset{n \to +\infty}{\to} \xi.$$

Chacune des suites $(P(\zeta_n^i))_{n \geq 0}$ est donc bornée. Comme à la question 3.a, nous déduisons du fait que

$$|P(z)| \underset{|z| \to +\infty}{\to} +\infty,$$

que chacune des suites $(\zeta_n^i)_{n \geq 0}$ est aussi bornée. Nous pouvons donc trouver une première sous-suite $(\zeta_{\phi_1(n)}^1)_{n \geq 0}$ et un nombre $\zeta_\infty^1 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\zeta_{\phi_1(n)}^1 \underset{n \to +\infty}{\to} \zeta_\infty^1.$$

Par récurrence sur l'entier $1 \leq i \leq \nu + 1$, nous pouvons construire de nouvelles sous-suites $(\zeta_{\phi_1(\phi_2(\ldots(\phi_i(n))))}^i)_{n \geq 0}$ et des limites $\zeta_\infty^i \in \mathbb{C}$ telles que

$$\zeta_{\phi_1(\phi_2(\ldots(\phi_i(n))))}^i \underset{n \to +\infty}{\to} \zeta_\infty^i,$$

pour chaque entier $1 \leq i \leq \nu + 1$. Notons alors

$$\forall n \geq 0, \, \phi(n) = \phi_1(\phi_2(\ldots(\phi_{\nu+1}(n)))),$$

et observons que la suite $(\phi(n))_{n \geq 0}$ est une extraction de chacun des suites extraites $(\phi_1(\phi_2(\ldots(\phi_i(n)))))_{n \geq 0}$. En particulier, nous obtenons

$$\zeta_{\phi(n)}^i \underset{n \to +\infty}{\to} \zeta_\infty^i,$$

pour tout $1 \leq i \leq \nu + 1$. Comme $z_n \to \xi$ lorsque $n \to +\infty$, et $P(\zeta_n^i) = z_n$, nous déduisons à la limite $n \to +\infty$ de la continuité de l'application polynomiale P que

$$\forall 1 \leq i \leq \nu + 1, \, P(\zeta_\infty^i) = \xi,$$

Rappelons alors que $\nu(\xi) = \nu$, de sorte que nous pouvons écrire

$$P^{-1}(\xi) = \Big\{ \zeta_j, 1 \leq j \leq \nu \Big\},$$

comme à la question 4.a. En particulier, il existe deux entiers $1 \leq i_1, i_2 \leq \nu + 1$, et un entier $1 \leq j \leq \nu$ tels que

$$\zeta_\infty^{i_1} = \zeta_\infty^{i_2} = \zeta_j.$$

Par convergence des suites $(\zeta_{\phi(n)}^{i_1})_{n \geq 0}$ et $(\zeta_{\phi(n)}^{i_2})_{n \geq 0}$, il existe donc un entier $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \, \zeta_{\phi(n)}^{i_1} \in \omega_j, \quad \text{et} \quad \zeta_{\phi(n)}^{i_2} \in \omega_j,$$

où ω_j désigne l'ensemble introduit pour la preuve de la question 4.a. Puisque P est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de ω_j sur $D(\xi, \varrho)$, et que $P(\zeta_{\phi(n)}^{i_1}) = P(\zeta_{\phi(n)}^{i_1}) = z_n$, nous concluons par injectivité que

$$\forall n \geq N, \, \zeta_{\phi(n)}^{i_1} = \zeta_{\phi(n)}^{i_2},$$

ce qui est absurde. Il existe donc un nombre $\rho > 0$ tel que

$$\forall z \in D(\xi, \rho), \, \nu(z) = \nu = \nu(\xi).$$

c. Soit $\xi \in \mathbb{C} \setminus K$. Deux cas se présentent. Si $\nu(\xi) = 0$, alors ξ appartient à l'intersection des ensembles $\nu^{-1}\{0\}$ et $\mathbb{C} \setminus K$. D'après les questions 2.a et 3.b, ces deux ensembles sont ouverts, et leur intersection est donc ouverte. En particulier, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que le disque $D(\xi, \rho)$ soit inclus dans cette intersection. Nous concluons que

$$\forall z \in D(\xi, \rho),\ \nu(z) = 0 = \nu(\xi),$$

ce qui assure que l'application ν est localement constante en ξ.

Sinon, nous savons que $\nu(\xi) > 0$, auquel cas la question 3.b fournit l'existence d'un nombre $\rho > 0$ tel que

$$\forall z \in D(\xi, \rho),\ \nu(z) = \nu(\xi).$$

L'application ν est aussi localement constante au voisinage de ξ, et elle est donc localement constante sur $\mathbb{C} \setminus K$.

5.a. D'après la preuve de la question 2.a, l'ensemble K est soit vide, soit fini. Lorsque cet ensemble est vide, son complémentaire $\mathbb{C}$ est connexe par arcs, car convexe.

Supposons désormais que cet ensemble K soit fini, soit de la forme $K = \{\xi_i, 1 \leq i \leq m\}$, et considérons deux nombres z_0 et z_1 de son complémentaire. Deux cas se présentent. Lorsqu'aucun des points ξ_i n'appartient au segment $[z_0, z_1]$, celui-ci forme un chemin dans $\mathbb{C} \setminus K$ entre les points z_0 et z_1.

Sinon, il existe des points ξ_{j_1}, …, ξ_{j_p} qui appartiennent au segment $[z_0, z_1]$. Comme l'ensemble K est fini, nous pouvons trouver un nombre $r > 0$ tel que

$$\forall 1 \leq q \leq p,\ D(\xi_{j_q}, r) \cap K = \{\xi_{j_q}\}.$$

Puisque les extrémités z_0 et z_1 du segment $[z_0, z_1]$ ne sont pas dans K, il existe des nombres $(r_{j_q})_{1 \leq q \leq p}$, avec

$$\forall 1 \leq q \leq p,\ 0 < r_{j_q} < r,$$

tels que les cercles $\mathcal{C}_{j_q}$ de centre ξ_{j_q} et de rayon r_{j_q} intersectent le segment $[z_0, z_1]$ en exactement deux points α_{j_q} et β_{j_q}. Au lieu de relier ces deux points via le segment $[z_0, z_1]$, nous les relions via une portion du cercle $\mathcal{C}_{j_q}$. Sachant que $0 < r_{j_q} < r$, et que $D(\xi_{j_q}, r) \cap K = \{\xi_{j_q}\}$, cette portion de cercle forme un chemin entre ces points dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus K$. Nous relions enfin les points z_0 et z_1 via le segment $[z_0, z_1]$ en dehors des portions entre les points α_{j_q} et β_{j_q}, et via les cercles $\mathcal{C}_{j_q}$ entre ces points. Nous obtenons un chemin dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus K$ entre les points z_0 et z_1. Puisque ces deux points sont arbitraires dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus K$, nous concluons que cet ensemble est connexe par arcs.

b. Rappelons qu'une application localement constante sur un ensemble connexe est constante. D'après la question 4.c, l'application ν est localement constante sur $\mathbb{C} \setminus K$, et d'après la question 5.a, cet ensemble est connexe par arcs, donc connexe. Il s'ensuit que l'application ν est constante sur $\mathbb{C} \setminus K$.

Vérifions alors que cette application n'est pas identiquement nulle. D'après la preuve de la question 2.a, l'ensemble K est soit vide, soit fini. En particulier, cet ensemble est borné. Par ailleurs, la preuve de la question 3.a assure que

$$\big|P(z)\big| \underset{|z| \to +\infty}{\to} +\infty.$$

Nous pouvons donc déterminer un nombre complexe ζ assez grand tel que $\xi = P(\zeta)$ n'appartienne pas à K. Autrement dit, le nombre ξ est dans $\mathbb{C} \setminus K$, et comme ce nombre possède au moins un antécédent ζ par l'application P, nous savons que

$$\nu(\xi) \geq 1.$$

L'application ν ne peut donc être identiquement nulle sur $\mathbb{C} \setminus K$. Comme elle est constante et à valeurs entières sur cet ensemble, nous obtenons

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus K,\ \nu(z) \geq 1,$$

ce qui signifie que tout nombre de $\mathbb{C} \setminus K$ possède au moins un antécédent par l'application P. Par définition, tout nombre de K possède aussi un antécédent par l'application P, ce qui suffit à conclure que tout nombre complexe possède un antécédent par l'application P, autrement dit que cette application est surjective.

c. D'après la question 5.b, l'application polynomiale P est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. En particulier, il existe un nombre $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $P(\zeta) = 0$. Le polynôme P possède donc au moins une racine ζ.

6. Dans le cas du corps des nombres réels $\mathbb{R}$, la preuve n'est plus valable, car l'ensemble $\mathbb{R} \setminus K$ n'est en général plus connexe par arcs. Considérons par exemple le polynôme $Q(X) = X^2 + 1$, dont le polynôme dérivé est égal à $2X$. Comme ce dernier polynôme a une unique racine 0, et que $Q(0) = 1$, l'ensemble K se réduit au singleton $\{1\}$. Dans ce cas, le complémentaire $\mathbb{R} \setminus K =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ n'est pas connexe arcs.

Supposons en effet qu'il existe un chemin $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R} \setminus K)$ qui relie les points 0 et 2. Comme ce chemin est continu sur $[0,1]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un nombre $0 < x < 1$ tel que $\gamma(x) = 1 \notin \mathbb{R} \setminus K$, ce qui est absurde.

En général, nous ne pouvons donc établir la surjectivité d'un polynôme réel non constant à partir du fait que l'application ν associée est localement constante sur $\mathbb{R} \setminus K$, et la preuve précédente du théorème de d'Alembert-Gauss ne peut fournir l'existence d'une racine réelle pour tout polynôme réel non constant.

Exercice 2.

1. Comme l'intervalle I et l'ensemble Ω sont non vides et ouverts, nous pouvons trouver un nombre $R > 0$ tel que

$$]t_0 - R, t_0 + R[\subset I, \quad \text{et} \quad B(x_0, R) \subset \Omega,$$

où $B(x_0, R)$ désigne la boule ouverte de centre x_0 et de rayon R pour la norme $\| \cdot \|$. Il suffit alors de choisir un nombre $0 < r < R$ pour obtenir

$$[t_0 - r, t_0 + r] \subset I, \quad \text{et} \quad B_f(x_0, r) \subset \Omega.$$

Notons ensuite que l'ensemble $[t_0 - r, t_0 + r] \times B_f(x_0, r)$ est compact en tant que produit de deux ensembles compacts. Comme la fonction f est continue sur $I \times \Omega$, elle est bornée sur le compact $[t_0 - r, t_0 + r] \times B_f(x_0, r)$, et il existe donc un nombre $M \geq 0$ tel que

$$\forall (t, x) \in [t_0 - r, t_0 + r] \times B_f(x_0, r),\ \big| f(t, x) \big| \leq M.$$

2.a. Vérifions d'abord par récurrence sur $0 \leq i \leq n$ que les vecteurs $y_{\pm i}$ sont bien définis et appartiennent aux boules fermées $B_f(x_0, ir/n)$. Au rang $i = 0$, $y_0 = x_0$ est bien défini dans la boule $B_f(x_0, ir/n)$. Supposons que cette propriété est vraie jusqu'au rang i. Au rang $i+1$, les couples $(t_{\pm i}, y_{\pm i})$ sont dans $[t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(x_0, ir/n) \subset I \times \Omega$, de sorte que les quantités $f(t_{\pm i}, y_{\pm i})$, puis les nombres $y_{\pm(i+1)}$ sont bien définis. De plus, nous déduisons de la question 1. que

$$\big\| y_{\pm(i+1)} - y_{\pm i} \big\| \leq h_n M = \frac{r}{n},$$

d'où par l'hypothèse de récurrence,

$$\big\|y_{\pm(i+1)} - x_0\big\| \leq \big\|y_{\pm i} - x_0\big\| + \frac{r}{n} \leq \frac{(i+1)r}{n}.$$

Par récurrence, nous concluons que tous les nombres $(y_i)_{-n\leq i\leq n}$ sont bien définis et appartiennent à la boule fermée $B_f(x_0, r)$.

La fonction Y_n est alors bien définie, avec

$$\forall -n \leq i \leq n,\, Y_n(t_i) = y_i.$$

En particulier, nous remarquons que $Y_n(t_0) = y_0 = x_0$. Pour $-n \leq i \leq n-1$, nous vérifions ensuite que

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}],\, Y_n(t) - x_0 = \frac{t - t_i}{h_n}\big(y_{i+1} - x_0\big) + \frac{t_{i+1} - t}{h_n}\big(y_i - x_0\big),$$

d'où par l'inégalité triangulaire

$$\big\|Y_n(t) - x_0\big\| \leq \frac{t - t_i}{h_n}\big\|y_{i+1} - x_0\big\| + \frac{t_{i+1} - t}{h_n}\big\|y_i - x_0\big\| \leq \frac{t - t_i + t_{i+1} - t}{h_n} r = r,$$

et le fait que la fonction Y_n est à valeurs dans la boule $B_f(x_0, r)$.

b. Soit $(\tau_1, \tau_2) \in [t_0 - T, t_0 + T]^2$. Par définition des nombres $(t_i)_{-n\leq i\leq n}$, nous pouvons trouver des entiers $-n \leq i, j \leq n-1$ tels que

$$t_i \leq \tau_1 \leq t_{i+1}, \quad \text{et} \quad t_j \leq \tau_2 \leq t_{j+1}.$$

Quitte à permuter les nombres τ_1 et τ_2, nous pouvons de plus supposer que $\tau_1 \leq \tau_2$, de sorte que $i \leq j$. Lorsque $i = j$, nous calculons

$$Y_n(\tau_2) - Y_n(\tau_1) = \frac{\tau_2 - \tau_1}{h_n}\big(y_{i+1} - y_i\big).$$

Sachant que

$$\big\|y_{i+1} - y_i\big\| \leq h_n M,$$

d'après la preuve de la question 2.a, nous arrivons à

$$\big\|Y_n(\tau_2) - Y_n(\tau_1)\big\| \leq M\big(\tau_2 - \tau_1\big).$$

Lorsque $j > i$, nous déduisons du cas précédent que

$$\big\|Y_n(\tau_2) - y_j\big\| = \big\|Y_n(\tau_2) - Y_n(t_j)\big\| \leq M\big(\tau_2 - t_j\big),$$

et de même,

$$\big\|Y_n(\tau_1) - y_{i+1}\big\| = \big\|Y_n(\tau_1) - Y_n(t_{i+1})\big\| \leq M\big(t_{i+1} - \tau_1\big).$$

Il résulte alors de l'inégalité triangulaire que

$$\big\|Y_n(\tau_2) - Y_n(\tau_1)\big\| \leq \big\|Y_n(\tau_2) - y_j\big\| + \sum_{k=i+1}^{j-1} \big\|y_{k+1} - y_k\big\| + \big\|Y_n(\tau_1) - Y_n(t_{i+1})\big\|,$$

d'où d'après la preuve de la question 2.a,

$$\big\|Y_n(\tau_2) - Y_n(\tau_1)\big\| \leq M\Big(\tau_2 - t_j + \sum_{k=i+1}^{j-1} h_n + t_{i+1} - \tau_1\Big) = M\big(\tau_2 - \tau_1\big).$$

En conclusion, la fonction Y_n est bien M-lipschitzienne sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

3.a. Commençons par traiter le cas où $t_i \leq s \leq t_{i+1}$. Dans ce cas, nous savons que

$$\forall t_i \leq s \leq t_{i+1},\ Y_n(s) - y_i = \frac{s - t_i}{h_n}\big(y_{i+1} - y_i\big) = (s - t_i) f(t_i, y_i).$$

D'après la question 1, nous obtenons

$$\big\|Y_n(s) - y_i\big\| \leq M(s - t_i) \leq M h_n,$$

ce qui assure que

$$\big|s - t_i\big| + \big\|Y_n(s) - y_i\big\| \leq (M + 1) h_n.$$

Rappelons alors que la fonction f est continue sur le sous-ensemble compact $[t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(x_0, r)$. Par le théorème de Heine, elle est donc uniformément continue sur cet ensemble : étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, quels que soient $t_0 - T \leq t_2, t_1 \leq t_0 + T$ et $(x_1, x_2) \in B_f(x_0, r)^2$,

$$\big|t_2 - t_1\big| + \big\|x_2 - x_1\big\| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \big\|f(t_2, x_2) - f(t_1, x_1)\big\| \leq \varepsilon.$$

Sachant que

$$(M + 1) h_n = \frac{(M + 1) T}{n},$$

nous pouvons trouver un nombre $N_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon,\ (M + 1) h_n \leq \delta_\varepsilon.$$

Nous déduisons alors de l'uniforme continuité de la fonction f que

$$\forall t_i \leq s \leq t_{i+1},\ \big\|f(s, Y_n(s)) - f(t_i, y_i)\big\| \leq \varepsilon,$$

inégalité qu'il suffit d'intégrer pour arriver à

$$\Big\|\int_{t_i}^{t} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_i, y_i)\big)\, ds\Big\| \leq \varepsilon\big(t - t_i\big).$$

La preuve est identique dans le cas où $t_{-i-1} \leq s \leq t_{-i}$. Dans ce cas, nous avons

$$\forall t_{-i-1} \leq s \leq t_{-i},\ Y_n(s) - y_{-i} = \frac{t_{-i} - s}{h_n}\big(y_{-i-1} - y_{-i}\big) = -(t_{-i} - s) f(t_{-i}, y_{-i})$$

d'où, d'après la question 1,

$$\big|s - t_{-i}\big| + \big\|Y_n(s) - y_{-i}\big\| \leq (M + 1) h_n \leq \delta_\varepsilon,$$

lorsque $n \geq N_\varepsilon$. Par uniforme continuité de la fonction f, nous obtenons donc de même

$$\Big\|\int_{t}^{t_{-i}} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_{-i}, y_{-i})\big)\, ds\Big\| \leq \int_{t}^{t_{-i}} \big\|f(s, Y_n(s)) - f(t_{-i}, y_{-i})\big\|\, ds \leq \varepsilon\big(t_{-i} - t\big).$$

b. Commençons par le cas où il existe un entier $0 \leq i \leq n - 1$ tel que

$$t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Dans ce cas, nous déduisons de la formule de Chasles que

$$\begin{aligned}
Y_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, Y_n(s))\, ds &= Y_n(t) - y_0 - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, Y_n(s))\, ds - \int_{t_i}^{t} f(s, Y_n(s))\, ds \\
&= Y_n(t) - y_0 - \sum_{j=0}^{i-1} h_n f(t_j, y_j) - (t - t_i) f(t_i, y_i) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_j, y_j) \big)\, ds \\
&\quad - \int_{t_i}^{t} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_i, y_i) \big)\, ds.
\end{aligned}$$

Par récurrence sur $0 \leq i \leq n$, nous déduisons de la définition des nombres $(y_i)_{-n \leq i \leq n}$ que

$$y_0 + \sum_{j=0}^{i-1} h_n f(t_j, y_j) = y_i.$$

Sachant que

$$Y_n(t) = \frac{t_{i+1} - t_i}{h_n} y_i + \frac{t - t_i}{h_n} h_n f(t_i, y_i) = y_i + (t - t_i) f(t_i, y_i),$$

nous arrivons à

$$Y_n(t) - y_0 - \sum_{j=0}^{i-1} h_n f(t_j, y_j) - (t - t_i) f(t_i, y_i) = Y_n(t) - y_i - (t - t_i) f(t_i, y_i) = 0.$$

Par ailleurs, nous déduisons de la question 3.a que

$$\forall 0 \leq j \leq i - 1, \; \Big\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_j, y_j) \big)\, ds \Big\| \leq \varepsilon (t_{j+1} - t_j),$$

et de façon similaire,

$$\Big\| \int_{t_i}^{t} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_i, y_i) \big)\, ds \Big\| \leq \varepsilon (t - t_i),$$

lorsque $n \geq N_\varepsilon$. Nous concluons que

$$\Big\| Y_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, Y_n(s))\, ds \Big\| \leq \varepsilon \Big(\sum_{j=0}^{i-1} \big(t_{j+1} - t_j \big) + t - t_i \Big) = \varepsilon \big(t - t_0 \big) \leq \varepsilon T.$$

La preuve est identique lorsqu'il existe un entier $0 \leq i \leq n - 1$ tel que

$$t_{-i-1} \leq t \leq t_{-i}.$$

Dans ce cas, nous vérifions par récurrence sur $0 \leq i \leq n - 1$ que

$$y_{-i} = y_0 - \sum_{j=0}^{i-1} h_n f(t_{-j}, y_{-j}),$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
&Y_n(t) - y_0 + \sum_{j=0}^{i-1} h_n f(t_{-j}, y_{-j}) + (t_{-i} - t) f(t_{-i}, y_{-i}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = Y_n(t) - y_{-i} + (t_{-i} - t) f(t_{-i}, y_{-i}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = Y_n(t) - \frac{t_{-i} - t_{-i-1}}{h_n} y_{-i} - \frac{t - t_{-i}}{h_n} \big(y_{-i} - y_{-i-1} \big) = 0.
\end{aligned}
$$

Par le théorème de Chasles, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
&Y_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, Y_n(s))\, ds \\
&\quad = Y_n(t) - y_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_{-j-1}}^{t_{-j}} f(s, Y_n(s))\, ds + \int_{t}^{t_{-i}} f(s, Y_n(s))\, ds \\
&\quad = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_{-j-1}}^{t_{-j}} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_{-j}, y_{-j}) \big)\, ds + \int_{t}^{t_{-i}} \big(f(s, Y_n(s)) - f(t_{-i}, y_{-i}) \big)\, ds,
\end{aligned}
$$

d'où d'après la question 3.a,

$$
\Big\| Y_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, Y_n(s))\, ds \Big\| \leq \varepsilon \Big(\sum_{j=0}^{i-1} \big(t_{-j} - t_{-j-1} \big) + t_{-i} - t \Big) = \varepsilon \big(t_0 - t \big) \leq \varepsilon T,
$$

lorsque $n \geq N_\varepsilon$. En conclusion, nous avons bien établi que

$$
\sup_{t_0 - T \leq t \leq t_0 + T} \Big\| Y_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, Y_n(s))\, ds \Big\| \leq \varepsilon T,
$$

quand $n \geq N_\varepsilon$.

4.a. Rappelons que $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable qui est dense dans $\mathbb{R}$, puisque

$$
\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a < b, \ \exists q \in \mathbb{Q} \text{ t.q. } a < q < b.
$$

Nous déduisons de cette propriété que l'ensemble $Q = [t_0 - T, t_0 + T] \cap \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $[t_0 - T, t_0 + T]$. Il est de plus dénombrable en tant que sous-ensemble d'un ensemble dénombrable.

b. Nous utilisons le procédé diagonal de Cantor. Sachant que Q est dénombrable, nous pouvons l'écrire sous la forme $Q = (q_p)_{p \geq 0}$. Rappelons alors que les fonctions Y_n sont à valeurs dans l'ensemble compact $B_f(x_0, r)$. En particulier, la suite $(Y_n(q_0))_{n \geq 0}$ est à valeurs dans ce compact, et nous pouvons donc extraire une sous-suite $(Y_{\phi_0(n)}(q_0))_{n \geq 0}$ qui converge vers un élément $X(q_0)$ de $B_f(x_0, r)$. Par récurrence sur $p \geq 0$, nous pouvons de façon similaire construire des extractions $(\phi_p)_{p \geq 0}$ et des limites $(X(q_p))_{p \geq 0}$ telles que

$$
Y_{\phi_0(\phi_1(\ldots(\phi_p(n))))}(q_p) \underset{n \to +\infty}{\to} X(q_p).
$$

Nous introduisons alors l'extraction diagonale

$$
\forall n \geq 0, \ \phi(n) = \phi_0(\phi_1(\ldots(\phi_n(n)))),
$$

qui est une sous-suite de chacune des extractions $(\phi_0(\phi_1(\ldots(\phi_p(n)))))_{n \geq 0}$, et qui satisfait donc

$$
\forall p \geq 0, \ Y_{\phi(n)}(q_p) \underset{n \to +\infty}{\to} X(q_p),
$$

soit le résultat recherché.

c. La preuve repose sur le fait que les fonctions Y_n sont M-lipschitziennes sur $[t_0-T, t_0+T]$. Nous commençons par étendre cette propriété à la fonction X. Étant donnés deux nombres $(q_{p_1}, q_{p_2}) \in Q^2$, nous déduisons de la question 2.b que

$$\forall n \geq 0,\ \big\|Y_{\phi(n)}(q_{p_2}) - Y_{\phi(n)}(q_{p_1})\big\| \leq M\big|q_{p_2} - q_{p_1}\big|,$$

d'où d'après la question 4.b,

$$\big\|X(q_{p_2}) - X(q_{p_1})\big\| \leq M\big|q_{p_2} - q_{p_1}\big|,$$

à la limite $n \to +\infty$.

Nous étendons ensuite la fonction X au segment $[t_0 - T, t_0 + T]$. Soit $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Par densité du sous-ensemble Q, il existe une suite $(q_{p_n})_{n\geq 0}$ de Q telle que

$$q_{p_n} \underset{n\to+\infty}{\to} t.$$

Comme la fonction X est M-lipschitzienne sur Q, nous savons que

$$\forall m, n \geq 0,\ \big\|X(q_{p_n}) - X(q_{p_m})\big\| \leq M\big|q_{p_n} - q_{p_m}\big|.$$

Sachant que la suite $(q_{p_n})_{n\geq 0}$ est convergente, il s'agit d'une suite de Cauchy. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geq 0$ tel que

$$\forall m, n \geq N,\ \big|q_{p_n} - q_{p_m}\big| \leq \varepsilon.$$

Il vient donc

$$\forall m, n \geq N,\ \big\|X(q_{p_n}) - X(q_{p_m})\big\| \leq M\varepsilon,$$

de sorte que la suite $(X(q_{p_n}))_{n\geq 0}$ est aussi de Cauchy, donc convergente vers une limite $X(t)$. Sachant que les vecteurs $(X(q_{p_n}))_{n\geq 0}$ appartiennent à la boule $B_f(x_0, r)$, et que cette boule est fermée, la limite $X(t)$ reste dans cette boule.

Montrons maintenant que cette limite $X(t)$ ne dépend pas du choix de la suite $(q_{p_n})_{n\geq 0}$. Considérons une seconde suite $(q_{r_n})_{n\geq 0}$ convergente de limite t, et introduisons la suite $(q_{s_n})_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0,\ q_{s_n} = \begin{cases} q_{p_m}, & \text{si } n = 2m, \\ q_{r_m}, & \text{si } n = 2m + 1. \end{cases}$$

La suite $(q_{s_n})_{n\geq 0}$ est bien définie, et les nombres q_{s_n} appartiennent à Q. Comme les suites $(q_{p_n})_{n\geq 0}$ et $(q_{r_n})_{n\geq 0}$ sont convergentes de limite t, la suite $(q_{s_n})_{n\geq 0}$ est aussi convergente de limite t. Par l'argument précédent, il existe donc un vecteur $Z(t) \in B_f(x_0, r)$ tel que

$$X(q_{s_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} Z(t).$$

Puisque les suites $(q_{p_n})_{n\geq 0}$ et $(q_{r_n})_{n\geq 0}$ sont des sous-suites de la suite $(q_{s_n})_{n\geq 0}$, nous obtenons

$$X(q_{p_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} Z(t), \quad \text{et} \quad X(q_{r_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} Z(t).$$

Par unicité de la limite de la suite $(X(q_{p_n}))_{n\geq 0}$, la limite $Z(t)$ est égale à la limite $X(t)$, ce qui assure que

$$X(q_{r_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} X(t).$$

En conclusion, la limite $X(t)$ ne dépend pas du choix de la suite $(X(q_{p_n}))_{n\geq 0}$, mais uniquement du nombre t.

Nous avons donc étendu de façon univoque la fonction X au segment $[t_0 - T, t_0 + T]$, et cette fonction est à valeurs dans la boule fermée $B_f(x_0, r)$. Elle est de plus M-lipschitzienne sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. En effet, si t_1 et t_2 sont deux nombres du segment $[t_0 - T, t_0 + T]$, et si $(q_{p_n})_{n\geq 0}$ et $(q_{r_n})_{n\geq 0}$ désignent deux suites de Q convergentes de limite t_1, respectivement t_2, alors nous déduisons de la question 2.b que

$$\forall n \geq 0,\ \big\|X(q_{r_n}) - X(q_{p_n})\big\| \leq M\big|q_{r_n} - q_{p_n}\big|,$$

d'où à la limite $n \to +\infty$,

$$\big\|X(t_2) - X(t_1)\big\| \leq M\big|t_2 - t_1\big|.$$

Aussi la fonction X est-elle M-lipschitzienne, donc continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Il nous reste à établir la convergence uniforme sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ de la suite de fonctions $(Y_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ vers la fonction X. Nous utilisons la densité du sous-ensemble Q et la compacité du segment $[t_0 - T, t_0 + T]$ pour recouvrir ce segment par un nombre fini d'intervalles ouverts $(I_j)_{1\leq j\leq J}$ de la forme

$$I_j = [q_{p_j} - \varepsilon, q_{p_j} + \varepsilon] \cap [t_0 - T, t_0 + T],$$

où ε est un nombre strictement positif, et les nombres $(q_{p_j})_{1\leq j\leq J}$ appartiennent à Q. D'après la question 4.b, nous savons que

$$\forall 1 \leq j \leq J,\ Y_{\phi(n)}(q_{p_j}) \underset{n\to+\infty}{\to} X(q_{p_j}),$$

d'où l'existence d'un entier $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N,\ \forall 1 \leq j \leq J,\ \big\|Y_{\phi(n)}(q_{p_j}) - X(q_{p_j})\big\| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors un nombre $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Nous pouvons trouver un nombre $1 \leq j \leq J$ tel que $t \in I_j$, ce qui signifie que $|t - q_{p_j}| < \varepsilon$. Nous déduisons alors du caractère M-lipschitzien des fonctions $Y_{\phi(n)}$ et X que

$$\begin{aligned}\big\|Y_{\phi(n)}(t) - X(t)\big\| &\leq \big\|Y_{\phi(n)}(q_{p_j}) - Y_{\phi(n)}(t)\big\| + \big\|Y_{\phi(n)}(q_{p_j}) - X(q_{p_j})\big\| + \big\|X(q_{p_j}) - X(t)\big\| \\ &\leq 2M\big|q_{p_j} - t\big| + \big\|Y_{\phi(n)}(q_{p_j}) - X(q_{p_j})\big\| \leq \big(2M + 1\big)\varepsilon,\end{aligned}$$

lorsque $n \geq N$. Nous concluons que

$$\sup_{t\in[t_0-T,t_0+T]} \big\|Y_{\phi(n)}(t) - X(t)\big\| \leq \big(2M + 1\big)\varepsilon,$$

sous cette condition, soit que

$$\sup_{t\in[t_0-T,t_0+T]} \big\|Y_{\phi(n)}(t) - X(t)\big\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

5.a. Soit $t_0 - T \leq t \leq t_0 + T$. Rappelons que la fonction f est uniformément continue sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(x_0, r)$: étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver un nombre $\delta > 0$ tel que, quels que soient $(t_1, t_2) \in [t_0 - T, t_0 + T]^2$ et $(x_1, x_2) \in B_f(x_0, r)^2$,

$$\big|t_2 - t_1\big| + \big\|x_2 - x_1\big\| \leq \delta \Longrightarrow \big\|f(t_2, x_2) - f(t_1, x_1)\big\| \leq \varepsilon.$$

D'après la question 4.c, il existe un entier $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} \left\| Y_{\phi(n)}(t) - X(t) \right\| \leq \delta.$$

Il s'ensuit que

$$\forall s \in [t_0, t], \ \left| s - s \right| + \left\| Y_{\phi(n)}(s) - X(s) \right\| \leq \delta,$$

de sorte que par uniforme continuité de la fonction f,

$$\left\| f(s, Y_{\phi(n)}(s)) - f(s, X(s)) \right\| \leq \varepsilon.$$

Il suffit alors d'intégrer cette inégalité pour obtenir

$$\begin{aligned}\forall n \geq N, \ \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, Y_{\phi(n)}(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds \right\| &\leq \int_{t_0}^{t} \left\| f(s, Y_{\phi(n)}(s)) - f(s, X(s)) \right\| ds \\ &\leq \varepsilon |t - t_0| \leq \varepsilon T,\end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$\int_{t_0}^{t} f(s, Y_{\phi(n)}(s))\, ds \underset{n \to +\infty}{\to} \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds.$$

b. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 3.b, il existe un nombre $N_\varepsilon \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \forall t_0 - T \leq t \leq t_0 + T, \ \left\| Y_{\phi(n)}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, Y_{\phi(n)}(s))\, ds \right\| \leq \varepsilon T.$$

D'après la question 4.c, nous savons que

$$Y_{\phi(n)}(t) \underset{n \to +\infty}{\to} X(t),$$

tandis que, par la question 5.a, nous avons

$$\int_{t_0}^{t} f(s, Y_{\phi(n)}(s))\, ds \underset{n \to +\infty}{\to} \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds.$$

À la limite $n \to +\infty$, nous en déduisons que

$$\left\| X(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds \right\| \leq \varepsilon T.$$

Comme le nombre ε dans cette inégalité est arbitrairement petit, nous concluons que

$$\left\| X(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds \right\| = 0,$$

soit que

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds.$$

c. D'après la question 4.c, la fonction X est continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, à valeurs dans $B_f(x_0, r)$. Comme la fonction f est continue sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(x_0, r)$, la fonction $s \mapsto f(s, X(s))$ est aussi continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. Cette propriété assure à son tour que la fonction $t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. Il découle donc de la question 5.b que la fonction X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, et que sa dérivée vaut

$$\forall t_0 - T \leq t \leq t_0 + T, \ X'(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds \right)' = f(t, X(t)).$$

Sachant que $X(t_0) = x_0$, nous concluons que la fonction X est bien solution du problème de Cauchy considéré.