

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de deux heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Exercice 1. (8 points)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- 1.a. Déterminer le spectre et les espaces propres de la matrice A .
- b. Soit $t \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de la matrice e^{tA} .
2. Considérons le système linéaire

$$X'(t) = AX(t).$$

- a. L'origine est-elle asymptotiquement stable pour ce système linéaire ? Est-elle stable ?
- b. Esquisser le portrait de phase associé à ce système linéaire.
3. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, A_\varepsilon(t) = A + \varepsilon t B, \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t)X_\varepsilon(t), \\ X_\varepsilon(0) = X_0, \end{cases}$$

possède une unique solution $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

- b. Montrer qu'il existe des fonctions $Y_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et $Y_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ telles que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, X_\varepsilon = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon R_\varepsilon,$$

avec

$$\forall \tau > 0, \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1([- \tau, \tau], \mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

- 4.a. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_0(t) = e^{tA} X_0.$$

- b. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_1(t) = \int_0^t s e^{(t-s)A} B e^{sA} X_0 ds.$$

Exercice 2. (5 points)

Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$. Considérons le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A(t)X(t),$$

et notons $R(t, s)$ les résolvantes de ce système.

1. Vérifier que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{d}{dt}({}^t R(t, s)) = {}^t R(t, s) {}^t A(t).$$

2. Supposons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, {}^t A(t) = -A(t).$$

a. Montrer que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{d}{dt}({}^t R(t, s) R(t, s)) = 0.$$

b. En déduire que toutes les résolvantes $R(t, s)$ sont orthogonales.

3. Supposons réciproquement que toutes les résolvantes $R(t, s)$ sont orthogonales.

a. Montrer que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{d}{dt}(R(t, s)^{-1}) = -R(t, s)^{-1} A(t).$$

b. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, {}^t A(t) = -A(t).$$

Exercice 3. (7 points)

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale Q_α du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q''_\alpha(x) + Q_\alpha(x) - Q_\alpha(x)^3 = 0, \\ Q_\alpha(0) = 0, \\ Q'_\alpha(0) = \alpha. \end{cases}$$

2. Soit $] - T_\alpha^-, T_\alpha^+]$ l'intervalle de définition de la solution Q_α .

a. Soit

$$\forall x \in] - T_\alpha^-, T_\alpha^+ [, e_\alpha(x) = \frac{1}{2} Q'_\alpha(x)^2 - \frac{1}{4} (1 - Q_\alpha(x)^2)^2.$$

Vérifier que la fonction e_α est constante sur l'intervalle $] - T_\alpha^-, T_\alpha^+]$.

b. En déduire qu'il existe un unique nombre α_* pour lequel il peut exister une solution globale Q_{α_*} telle que

$$Q_{\alpha_*}(x) \rightarrow 1, \quad \text{et} \quad Q'_{\alpha_*}(x) \rightarrow 0,$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3.a. Montrer que la solution Q_{α_*} vérifie

$$\forall x \in [0, T_{\alpha_*}^+[, Q'_{\alpha_*}(x) > 0.$$

b. En déduire qu'elle vérifie

$$\forall x \in]0, T_{\alpha_*}^+[, 0 < Q_{\alpha_*}(x) < 1.$$

c. Vérifier que

$$\forall x \in [0, T_{\alpha_*}^+[, Q'_{\alpha_*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - Q_{\alpha_*}(x)^2).$$

d. Conclure qu'il existe une unique solution globale Q_{α_*} , et qu'elle vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q_{\alpha_*}(x) = \text{th}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$