

Corrigé de l'examen de rattrapage

Exercice 1.

1.a. Le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A est égal à

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2),$$

de sorte que le spectre de cette matrice vaut

$$\sigma(A) = \{-2, -1\}.$$

De plus, si $X = (x, y)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -2 , alors,

$$\begin{cases} 2y = -2x, \\ -x - 3y = -2y, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $y = -x$. L'espace propre $E_{-2}(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De même, si $X = (x, y)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 , alors,

$$\begin{cases} 2y = -x, \\ -x - 3y = -y, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que $x = -2y$. L'espace propre $E_{-1}(A)$ est donc engendré par le vecteur propre

$$e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la matrice des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 1.a, nous avons

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que

$$e^{tA} = \exp \left(P \begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} P^{-1} \right) = P \exp \begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Sachant que $\det(P) = 1$, et

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

nous concluons que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

2.a. D'après la question 1.a, toutes les valeurs propres de la matrice A sont strictement négatives. L'origine est donc à la fois stable et asymptotiquement stable pour le système linéaire associé à la matrice A .

b. Considérons la solution $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de donnée initiale $X(0) = X_0$, et supposons que le vecteur X_0 s'écrive sous la forme $X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2$ dans la base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Nous savons alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} X_0 = x_0 e^{tA} e_1 + y_0 e^{tA} e_2 = x_0 e^{-2t} e_1 + y_0 e^{-t} e_2.$$

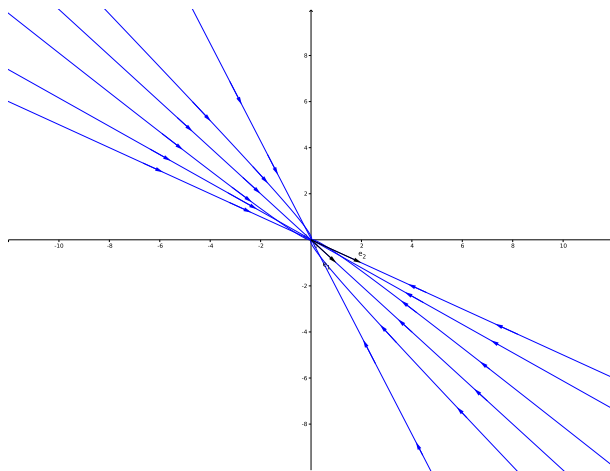
Par conséquent, les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $X(t)$ dans la base \mathcal{B} sont donnés par les formules

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-2t}, \\ y(t) = y_0 e^{-t}. \end{cases}$$

En particulier, nous observons que

$$x_0 y(t)^2 - y_0^2 x(t) = (x_0 y_0^2 - x_0 y_0^2) e^{-2t} = 0,$$

de sorte que les solutions parcourent les droites d'équations $x = 0$ ou $y = 0$, ou bien les paraboles d'équations $x = x_0 y^2 / y_0^2$, lorsque x_0 et y_0 sont non nuls. Nous aboutissons au tracé suivant des solutions



Il s'agit d'un portrait de phase de type nœud stable.

3.a. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, nous observons que l'application A_ε est bien définie et continue sur \mathbb{R} , à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz, quelle que soit la condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe donc une unique solution globale $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t) X_\varepsilon(t), \\ X_\varepsilon(0) = X_0. \end{cases}$$

b. Soit $\tau > 0$ fixé. Considérons l'application $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \mathcal{A}(\varepsilon) = A_\varepsilon.$$

L'application \mathcal{A} est bien définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. De plus, il s'agit d'une application affine en la variable ε , puisque

$$\forall(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{A}(\varepsilon)(t) = A + \varepsilon \mathfrak{B}(t),$$

où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathfrak{B}(t) = tB.$$

L'application \mathcal{A} est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , avec

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \mathcal{A}'(\varepsilon) = \mathfrak{B}, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, \mathcal{A}^{(k)}(\varepsilon) = 0.$$

Par la version affine du théorème de dépendance continue, nous savons par ailleurs que l'application qui à une fonction $A \in \mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, associe la solution $X \in \mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ de $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ dans $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$. Par composition, l'application qui à un nombre $\varepsilon \in \mathbb{R}$, associe la solution $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$, est également de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$. En particulier, les fonctions

$$Y_0 = (X_\varepsilon)|_{\varepsilon=0}, \quad \text{et} \quad Y_1 = \frac{d}{d\varepsilon}(X_\varepsilon)|_{\varepsilon=0},$$

sont bien définies et de classe \mathcal{C}^1 de $[-\tau, \tau]$ dans \mathbb{R}^2 . Sachant que le nombre τ est arbitraire, elles sont en fait de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 . Enfin, par la formule de Taylor-Young, elles satisfont

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, X_\varepsilon = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon R_\varepsilon,$$

avec

$$\forall \tau > 0, \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

4.a. D'après la question 3.b, la fonction Y_0 est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, Y_0'(t) = A_0(t)Y_0(t) = AY_0(t), \\ Y_0(0) = X_0, \end{cases}$$

de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_0(t) = e^{tA}X_0.$$

b. Comme le développement de la question 3.b est valable dans $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$ pour tout nombre $\tau > 0$, nous savons que

$$X'_\varepsilon = Y'_0 + \varepsilon Y'_1 + \varepsilon R'_\varepsilon,$$

avec

$$\|R'_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Il suffit donc de développer l'équation satisfaite par la fonction X_ε pour obtenir

$$\forall t \in [-\tau, \tau], Y_0'(t) + \varepsilon Y_1'(t) + \varepsilon R'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t)Y_0(t) + \varepsilon A_\varepsilon(t)Y_1(t) + \varepsilon A_\varepsilon(t)R_\varepsilon(t).$$

Sachant que $A_\varepsilon(t) = A + \varepsilon tB$, nous arrivons au développement

$$Y_0'(t) + \varepsilon Y_1'(t) + \varepsilon R'_\varepsilon(t) = AY_0(t) + \varepsilon (AY_1(t) + tBY_0(t)) + \varepsilon (A_\varepsilon(t)R_\varepsilon(t) + \varepsilon tBY_1(t)).$$

L'identification du terme d'ordre un de ce développement conduit à l'équation

$$\forall t \in [-\tau, \tau], Y_1'(t) = AY_1(t) + tBY_0(t).$$

Sachant que le nombre τ est ici arbitraire, cette équation est en fait valable sur \mathbb{R} . Nous pouvons ainsi appliquer la méthode de variation de la constante afin d'obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_1(t) = e^{tA}Y_1(0) + \int_0^t s e^{(t-s)A} B Y_0(s) ds.$$

Pour $t = 0$, nous développons de même

$$X_0 = X_\varepsilon(0) = Y_0(0) + \varepsilon Y_1(0) + \varepsilon R_\varepsilon(0).$$

Sachant que $Y_0(0) = X_0$ par la question 3.b, l'identification du terme d'ordre un de ce développement fournit la condition initiale

$$Y_1(0) = 0.$$

Comme $Y_0(s) = e^{sA}X_0$ par la question 4.a, nous concluons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_1(t) = \int_0^t s e^{(t-s)A} B e^{sA} X_0 ds.$$

Exercice 2.

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. Comme $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$, la résolvante définit une fonction $t \mapsto R(t, s)$ de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ qui satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt}(R(t, s)) = A(t)R(t, s).$$

Sachant que la transposition $\mathcal{T} : M \mapsto {}^tM$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, elle est également de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, et sa différentielle en une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est donnée par l'expression

$$\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), d\mathcal{T}(M)(H) = {}^tH.$$

Par composition, l'application $t \mapsto {}^tR(t, s)$ est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt}({}^tR(t, s)) = {}^t(A(t)R(t, s)) = {}^tR(t, s){}^tA(t).$$

2.a. Rappelons que le produit $\mathcal{P} : (M_1, M_2) \mapsto M_1M_2$ est bilinéaire de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Cette application est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$, et sa différentielle en un couple $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$ vaut

$$\forall (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2, d\mathcal{P}(M_1, M_2)(H_1, H_2) = H_1M_2 + M_1H_2.$$

Par ailleurs, la question 1 assure que les applications $t \mapsto R(t, s)$ et $t \mapsto {}^tR(t, s)$ sont de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Par composition, la fonction $t \mapsto {}^tR(t, s)R(t, s)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et elle satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt}({}^tR(t, s)R(t, s)) = \frac{d}{dt}({}^tR(t, s))R(t, s) + {}^tR(t, s)\frac{d}{dt}(R(t, s)).$$

D'après les formules de la question 1, nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt}({}^tR(t, s)R(t, s)) = {}^tR(t, s)({}^tA(t) + A(t))R(t, s).$$

Cette dérivée est nulle, puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}, {}^tA(t) = -A(t).$$

b. Pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, nous savons que $R(s, s) = I_N$, de sorte que

$${}^tR(s, s)R(s, s) = I_N.$$

Il suffit d'intégrer la formule de la question 2.a pour obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R}, {}^tR(t, s)R(t, s) = {}^tR(s, s)R(s, s) = I_N.$$

Comme toutes les résolvantes sont inversibles, leurs inverses sont égaux aux matrices transposées ${}^tR(t, s)$, et nous concluons que toutes ces résolvantes sont bien orthogonales.

3.a. Considérons l'application inverse $\mathcal{I} : M \mapsto M^{-1}$ qui est bien définie de l'ouvert $\mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, et fixons une matrice $P \in \mathcal{GL}_N(\mathbb{R})$. Étant donnée une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, nous savons que

$$\| -HP^{-1} \| \leq \|H\| \|P^{-1}\| < 1,$$

lorsque la matrice $H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ satisfait l'inégalité $\|H\| < 1/\|P^{-1}\|$. Dans ce cas, la série $\sum_{n \geq 0} (-HP^{-1})^n$ est absolument convergente, donc convergente, et nous vérifions que

$$(I_N + HP^{-1}) \sum_{n=0}^{+\infty} (-HP^{-1})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-HP^{-1})^n (I_N + HP^{-1}) = I_N.$$

La matrice $I_N + HP^{-1}$ est donc inversible d'inverse donné par la somme de cette série. Il suffit de multiplier par P pour en déduire que la matrice $P + H$ est inversible d'inverse donné par

$$(P + H)^{-1} = P^{-1}(I_N + HP^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{-1}(-HP^{-1})^n.$$

En particulier, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|(P + H)^{-1} - P^{-1} + P^{-1}HP^{-1}\| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|P^{-1}(-HP^{-1})^n\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|P^{-1}\|^{n+1} \|H\|^n \\ &\leq \frac{\|P^{-1}\|^3 \|H\|^2}{1 - \|P^{-1}\| \|H\|}, \end{aligned}$$

d'où nous déduisons que

$$(P + H)^{-1} - P^{-1} + P^{-1}HP^{-1} = o_{\|H\| \rightarrow 0}(\|H\|).$$

L'application inverse est donc différentiable en la matrice P de différentielle égale à

$$\forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), d\mathcal{I}(P)(H) = -P^{-1}HP^{-1}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, il s'ensuit par composition que l'application $t \mapsto R(t, s)^{-1}$ est dérivable sur \mathbb{R} , et que sa dérivée vaut

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt}(R(t, s)^{-1}) = -R(t, s)^{-1} \frac{d}{dt}(R(t, s)) R(t, s)^{-1}.$$

Il découle alors de la question 1 que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt}(R(t, s)^{-1}) = -R(t, s)^{-1} A(t) R(t, s) R(t, s)^{-1} = -R(t, s)^{-1} A(t).$$

b. Lorsque toutes les résolvantes sont orthogonales, nous savons que

$$\forall(s, t) \in \mathbb{R}^2, R(t, s)^{-1} = {}^t R(t, s).$$

D'après les questions 1 et 3.a, nous pouvons dériver cette identité afin d'obtenir

$$-R(t, s)^{-1} A(t) = {}^t R(t, s)^t A(t).$$

Il suffit alors de multiplier cette formule par $R(t, s)$ et d'utiliser le fait que cette matrice est orthogonale pour obtenir

$$-A(t) = -R(t, s) R(t, s)^{-1} A(t) = R(t, s)^t R(t, s)^t A(t) = {}^t A(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Étant donnés deux nombres strictement positifs T_- et T_+ , considérons une solution $Q \in \mathcal{C}^2(]-T_-, T_+[, \mathbb{R})$ du problème de Cauchy considéré, et posons

$$\forall -T_- < t < T_+, \mathcal{Q}(t) = (Q(t), Q'(t)).$$

Le problème de Cauchy considéré équivaut alors au problème de Cauchy défini par

$$\begin{cases} \forall -T_- < 0 < T_+, \mathcal{Q}'(t) = \mathcal{F}(\mathcal{Q}(t)), \\ \mathcal{Q}(0) = (0, \alpha), \end{cases}$$

où nous avons noté

$$\forall \mathcal{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}(\mathcal{Q}) = (Q_2, -Q_1 + Q_1^3).$$

Comme la fonction \mathcal{F} est de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 , le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que ce problème de Cauchy possède une unique solution maximale \mathcal{Q}_α définie et de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle de la forme $] -T_\alpha^-, T_\alpha^+]$, avec $T_\alpha^\pm > 0$ ou $T_\alpha^\pm = +\infty$. Sachant que ce problème équivaut au problème de Cauchy considéré, ce problème possède également une unique solution maximale $Q_\alpha \in \mathcal{C}^2(]-T_\alpha^-, T_\alpha^+], \mathbb{R})$.

2.a. D'après la question 1, la solution Q_α est de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $] -T_\alpha^-, T_\alpha^+]$. Par composition, la fonction e_α est de classe \mathcal{C}^1 sur cet intervalle, et nous pouvons calculer

$$\forall x \in] -T_\alpha^-, T_\alpha^+], e'_\alpha(x) = Q'_\alpha(x) (Q''_\alpha(x) + Q_\alpha(x) - Q_\alpha(x)^3) = 0.$$

En conclusion, la fonction e_α est constante sur l'intervalle $] -T_\alpha^-, T_\alpha^+]$.

b. Supposons qu'il existe une solution globale $Q_\alpha \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle telle que

$$Q_\alpha(x) \rightarrow 1, \quad \text{et} \quad Q'_\alpha(x) \rightarrow 0,$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$. Par composition, nous obtenons alors

$$e_\alpha(x) \rightarrow 0,$$

dans cette limite. D'après la question 2.a, la fonction e_α est constante sur \mathbb{R} , ce qui suffit pour affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e_\alpha(x) = 0.$$

Pour $x = 0$, nous déduisons des conditions initiales satisfaites par la solution Q_α que

$$e_\alpha(0) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4},$$

de sorte que

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{4}.$$

Comme le nombre α est strictement positif, il est donc égal à $\alpha_* = 1/\sqrt{2}$, et ce nombre est l'unique valeur possible de α pour laquelle il peut exister une solution globale Q_{α_*} telle que

$$Q_{\alpha_*}(x) \rightarrow 1, \quad \text{et} \quad Q'_{\alpha_*}(x) \rightarrow 0,$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3.a. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{T} = \left\{ x \in [0, T_{\alpha_*}^+ [\text{ tel que } \forall 0 \leq y \leq x, Q'_{\alpha_*}(y) > 0 \right\},$$

et notons $T = \sup \mathcal{T}$. Comme $Q'_{\alpha_*}(0) = \alpha_* = 1/\sqrt{2} > 0$, nous savons par continuité de la dérivée Q'_{α_*} sur l'intervalle $[0, T_{\alpha_*}^+ [$ que le nombre T est strictement positif ou (égal à $+\infty$ lorsque $T_{\alpha_*}^+ = +\infty$).

Supposons alors par l'absurde que $T < T_{\alpha_*}^+$. Dans ce cas, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0, x_n \in \mathcal{T}, \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T.$$

Par définition de l'ensemble \mathcal{T} , nous avons

$$\forall n \geq 0, \forall 0 \leq y \leq x_n, Q'_{\alpha_*}(y) > 0.$$

Comme $x_n \rightarrow T$ quand $n \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\forall 0 \leq x < T, Q'_{\alpha_*}(x) > 0.$$

Par continuité de Q_{α_*} sur $[0, T_{\alpha_*}^+ [$, nous avons aussi

$$Q'_{\alpha_*}(T) \geq 0.$$

Dans le cas où $Q'_{\alpha_*}(T) > 0$, la continuité de la fonction Q_{α_*} assure l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\forall T \leq x \leq T + \delta, Q'_{\alpha_*}(x) > 0.$$

Nous en déduisons que le nombre $T + \delta$ appartient à l'ensemble \mathcal{T} , ce qui contredit la définition de la borne supérieure T . Par l'absurde, nous obtenons donc

$$Q'_{\alpha_*}(T) = 0.$$

Sachant que

$$\forall x \in [0, T_{\alpha_*}^+[, e_{\alpha_*}(x) = e_{\alpha_*}(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

d'après les questions 2.a et 2.b, nous avons aussi

$$\frac{1}{4}(1 - Q_{\alpha_*}(T))^2 = \frac{1}{2}Q'_{\alpha_*}(T)^2 = 0,$$

d'où le fait que $Q_{\alpha_*}(T) = -1$ ou $Q_{\alpha_*}(T) = 1$.

Nous avons ainsi établi que Q_{α_*} est une solution locale de l'un des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} Q''_{\alpha_*}(x) + Q_{\alpha_*}(x) - Q_{\alpha_*}(x)^3 = 0, \\ Q_{\alpha_*}(T) = -1 \text{ ou } 1, \\ Q'_{\alpha_*}(T) = 0. \end{cases}$$

Sachant que les fonctions constantes égales à -1 et 1 sont solutions de l'un, respectivement de l'autre de ces problèmes, nous pouvons invoquer comme à la question 1 le théorème de Cauchy-Lipschitz afin d'affirmer que

$$\forall x \in]-T_{\alpha_*}^-, T_{\alpha_*}^+[, Q_{\alpha_*}(x) = -1, \quad \text{ou} \quad \forall x \in]-T_{\alpha_*}^-, T_{\alpha_*}^+[, Q_{\alpha_*}(x) = 1,$$

ce qui conduit au fait que

$$Q'_{\alpha_*}(0) = 0.$$

Cette égalité contredit la définition de la solution Q_{α_*} . Par l'absurde, nous avons donc établi que

$$T = T_{\alpha_*}^+,$$

ce qui signifie que $\mathcal{T} = [0, T_{\alpha_*}^+[$, soit que

$$\forall 0 \leq x < T_{\alpha_*}^+, Q'_{\alpha_*}(x) > 0.$$

b. D'après la question 3.a, nous savons que

$$\forall x \in [0, T_{\alpha_*}^+[, Q'_{\alpha_*}(x) > 0,$$

de sorte que la fonction Q_{α_*} est strictement croissante sur $[0, T_{\alpha_*}^+[$. Sachant que $Q_{\alpha_*}(0) = 0$, il s'ensuit que

$$\forall x \in [0, T_{\alpha_*}^+[, Q_{\alpha_*}(x) > 0.$$

Supposons alors par l'absurde qu'il existe un nombre $0 \leq x_1 < T_{\alpha_*}^+$ tel que

$$Q_{\alpha_*}(x_1) \geq 1.$$

Sachant que $Q_{\alpha_*}(0) = 0$, la continuité de la solution Q_{α_*} sur l'intervalle $[0, x_1]$ assure l'existence d'un nombre $0 < x_2 \leq x_1$ tel que

$$Q_{\alpha_*}(x_2) = 1.$$

D'après les questions 2.a et 2.b, nous savons de plus que

$$\forall x \in [0, T_{\alpha_*}^+[, e_{\alpha_*}(x) = e_{\alpha_*}(0) = \frac{\alpha_*^2}{2} - \frac{1}{4} = 0,$$

de sorte que

$$\frac{1}{2}Q'_{\alpha_*}(x_2)^2 = \frac{1}{4}(1 - Q_{\alpha_*}(x_2)^2)^2 = 0.$$

Il s'ensuit que

$$Q'_{\alpha_*}(x_2) = 0.$$

La fonction Q_{α_*} est donc une solution locale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q''_{\alpha_*}(x) + Q_{\alpha_*}(x) - Q_{\alpha_*}(x)^3 = 0, \\ Q_{\alpha_*}(x_2) = 1, \\ Q'_{\alpha_*}(x_2) = 0. \end{cases}$$

Sachant que la fonction constante égale à 1 est solution de cette équation, il résulte à nouveau du théorème de Cauchy-Lipschitz que

$$\forall x \in]-T_{\alpha_*}^-, T_{\alpha_*}^+[, Q_{\alpha_*}(x) = 1,$$

ce qui est absurde, puisque $Q_{\alpha_*}(0) = 1$. En définitive, nous avons établi par l'absurde que

$$\forall x \in]0, T_{\alpha_*}^+[, Q_{\alpha_*}(x) < 1.$$

c. Nous déduisons des questions 2.a et 2.b que

$$\forall x \in]-T_{\alpha_*}^-, T_{\alpha_*}^+[, e_{\alpha_*}(x) = e_{\alpha_*}(0) = \frac{\alpha_*^2}{2} - \frac{1}{4} = 0,$$

de sorte que

$$\forall x \in]-T_{\alpha_*}^-, T_{\alpha_*}^+[, Q'_{\alpha}(x)^2 = \frac{1}{2}(1 - Q_{\alpha}(x)^2)^2.$$

D'après les questions 3.a et 3.b, nous savons que

$$\forall 0 < x < T_{\alpha_*}^+ , Q'_{\alpha_*}(x) > 0, \quad \text{et} \quad 1 - Q_{\alpha_*}(x)^2 > 0,$$

ce qui suffit à montrer que

$$\forall 0 < x < T_{\alpha_*}^+ , Q'_{\alpha_*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - Q_{\alpha_*}(x)^2).$$

Cette égalité reste valable pour $x = 0$, puisque $Q'_{\alpha_*}(0) = 0$ et $Q'_{\alpha_*}(0) = 1/\sqrt{2}$.

d. D'après la question 3.c, nous savons que la fonction Q_{α_*} est une solution locale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q'_{\alpha_*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - Q_{\alpha_*}(x)^2), \\ Q_{\alpha_*}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ Q'_{\alpha_*}(0) = 0. \end{cases}$$

Comme la fonction G définie par

$$\forall q \in \mathbb{R}, G(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - q^2),$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , nous déduisons du théorème de Cauchy-Lipschitz que ce problème de Cauchy possède une unique solution maximale.

Posons alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \text{th}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

La fonction Q est bien définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et elle satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \operatorname{th} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - Q(x)^2).$$

Sachant que $Q(0) = 0$ et $Q'(0) = 1/\sqrt{2}$, la fonction Q est solution du problème de Cauchy précédent. Par unicité, nous concluons que

$$\forall x \in]-T_{\alpha_*}^-, T_{\alpha_*}^+[, Q_{\alpha_*}(x) = Q(x) = \operatorname{th} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Dans le cas où par exemple $T_{\alpha_*}^+ < +\infty$, nous déduisons de la formule précédente que

$$Q_{\alpha_*}(x) \xrightarrow{x \rightarrow T_{\alpha_*}^+} Q(T_{\alpha_*}^+), \quad \text{et} \quad Q'_{\alpha_*}(x) \xrightarrow{x \rightarrow T_{\alpha_*}^+} Q'(T_{\alpha_*}^+),$$

ce qui contredit le principe de sortie de tout compact. Il s'ensuit que $T_{\alpha_*}^+ = +\infty$, et de même, $-T_{\alpha_*}^- = -\infty$. Nous obtenons donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q_{\alpha_*}(x) = \operatorname{th} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

D'après la question 2.b, nous savons qu'il existe au plus une solution globale Q_{α_*} , et nous venons d'établir que cette dernière solution est globale. En conclusion, il existe une unique solution globale

$$Q_{\alpha_*}(x) = \operatorname{th} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

des problèmes de Cauchy considérés.