

### Corrigé de l'examen

#### Exercice 1.

1.a. Le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de la matrice  $A$  est égal à

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3),$$

de sorte que le spectre de cette matrice vaut

$$\sigma(A) = \{-3, 3\}.$$

De plus, si  $X = (x, y)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 3, alors,

$$\begin{cases} -x + 2y = 3x, \\ 4x + y = 3y, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que  $y = 2x$ . L'espace propre  $E_3(A)$  est donc engendré par le vecteur propre

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De même, si  $X = (x, y)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $-3$ , alors,

$$\begin{cases} -x + 2y = -3x, \\ 4x + y = -3y, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que  $y = -x$ . L'espace propre  $E_{-3}(A)$  est donc engendré par le vecteur propre

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Considérons la matrice des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 1.a, nous avons

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que

$$e^{tA} = \exp \left( P \begin{pmatrix} 3t & 0 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} P^{-1} \right) = P \exp \begin{pmatrix} 3t & 0 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Sachant que

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

nous concluons que

$$e^{tA} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{3t} + 2e^{-3t} & e^{3t} - e^{-3t} \\ 2e^{3t} - 2e^{-3t} & 2e^{3t} + e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

2.a. D'après la question 1.a, la matrice  $A$  possède une valeur propre 3 strictement positive. L'origine n'est donc ni stable, ni asymptotiquement stable pour le système linéaire associé à la matrice  $A$ .

b. Considérons la solution  $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  de donnée initiale  $X(0) = X_0$ , et supposons que le vecteur  $X_0$  s'écrive sous la forme  $X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2$  dans la base de vecteurs propres  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ . Nous savons alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} X_0 = x_0 e^{tA} e_1 + y_0 e^{tA} e_2 = x_0 e^{3t} e_1 + y_0 e^{-3t} e_2.$$

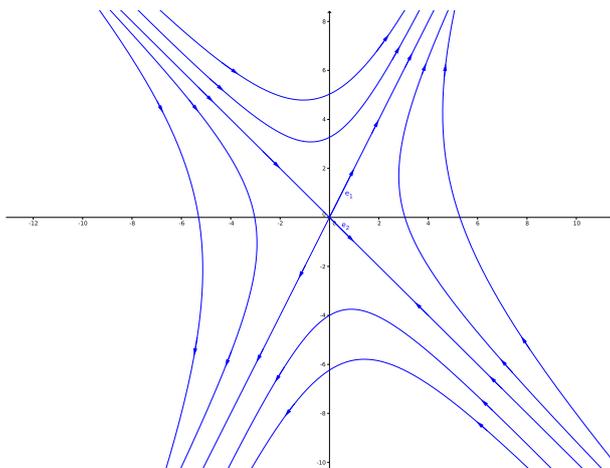
Par conséquent, les coordonnées  $(x(t), y(t))$  de  $X(t)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont donnés par les formules

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{3t}, \\ y(t) = y_0 e^{-3t}. \end{cases}$$

En particulier, nous observons que

$$x(t)y(t) = x_0 y_0,$$

de sorte que les solutions parcourent les droites d'équations  $x = 0$  ou  $y = 0$ , ou bien les hyperboles d'équations  $xy = x_0 y_0$ , lorsque  $x_0$  et  $y_0$  sont non nuls. Nous aboutissons au tracé suivant des solutions



Il s'agit d'un portrait de phase de type point selle ou point col.

3.a. Pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , nous observons que l'application  $A_\varepsilon$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Par la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz, quelle que soit la condition initiale  $X_0 \in \mathbb{R}^2$ , il existe donc une unique solution globale  $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t) X_\varepsilon(t), \\ X_\varepsilon(0) = X_0. \end{cases}$$

b. Soit  $\tau > 0$  fixé. Considérons l'application  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  définie par

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \mathcal{A}(\varepsilon) = A_\varepsilon.$$

L'application  $\mathcal{A}$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ . De plus, il s'agit d'une application affine en la variable  $\varepsilon$ , puisque

$$\forall (\varepsilon, t) \in \mathbb{R}, \mathcal{A}(\varepsilon)(t) = A + \varepsilon B(t),$$

où

$$\forall t \in \mathbb{R}, B(t) = tI_2.$$

L'application  $\mathcal{A}$  est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , avec

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \mathcal{A}'(\varepsilon) = B, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, \mathcal{A}^{(k)}(\varepsilon) = 0.$$

Par la version affine du théorème de dépendance continue, nous savons par ailleurs que l'application qui à une fonction  $A \in \mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ , associe la solution  $X \in \mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  dans  $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$ . Par composition, l'application qui à un nombre  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , associe la solution  $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$ , est également de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$ . En particulier, les fonctions

$$Y_0 = (X_\varepsilon)|_{\varepsilon=0}, \quad \text{et} \quad Y_1 = \frac{d}{d\varepsilon}(X_\varepsilon)|_{\varepsilon=0},$$

sont bien définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[-\tau, \tau]$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Sachant que le nombre  $\tau$  est arbitraire, elles sont en fait de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Enfin, par la formule de Taylor-Young, elles satisfont

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, X_\varepsilon = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon R_\varepsilon,$$

avec

$$\|R_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

4.a. D'après la question 3.b, la fonction  $Y_0$  est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, Y_0'(t) = A_0(t)Y_0(t) = AY_0(t), \\ Y_0(0) = X_0, \end{cases}$$

de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_0(t) = e^{tA}X_0.$$

b. Comme le développement de la question 3.b est valable dans  $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)$  pour tout nombre  $\tau > 0$ , nous savons que

$$X'_\varepsilon = Y'_0 + \varepsilon Y'_1 + \varepsilon R'_\varepsilon,$$

avec

$$\|R'_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Il suffit donc de développer l'équation satisfaite par la fonction  $X_\varepsilon$  pour obtenir

$$\forall t \in [-\tau, \tau], Y_0'(t) + \varepsilon Y_1'(t) + \varepsilon R'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t)Y_0(t) + \varepsilon A_\varepsilon(t)Y_1(t) + \varepsilon A_\varepsilon(t)R_\varepsilon(t).$$

Sachant que  $A_\varepsilon(t) = A + \varepsilon B(t)$ , nous arrivons au développement

$$Y_0'(t) + \varepsilon Y_1'(t) + \varepsilon R'_\varepsilon(t) = AY_0(t) + \varepsilon(B(t)Y_0(t) + AY_1(t)) + \varepsilon(A_\varepsilon(t)R_\varepsilon(t) + \varepsilon B(t)Y_1(t)).$$

L'identification du terme d'ordre un de ce développement conduit à l'équation

$$\forall t \in [-\tau, \tau], Y_1'(t) = B(t)Y_0(t) + AY_1(t).$$

Sachant que le nombre  $\tau$  est ici arbitraire, cette équation est en fait valable sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour  $t = 0$ , nous avons

$$X_0 = X_\varepsilon(0) = Y_0(0) + \varepsilon Y_1(0) + \varepsilon R_\varepsilon(0).$$

Sachant que  $Y_0(0) = X_0$  par la question 3.b, l'identification du terme d'ordre un de ce développement fournit la condition initiale

$$Y_1(0) = 0,$$

et puisque  $B(t) = tI_2$ , la fonction  $Y_1$  est bien solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, Y_1'(t) = AY_1(t) + tY_0(t), \\ Y_1(0) = 0. \end{cases}$$

c. D'après la question 4.b, nous pouvons appliquer la méthode de variation de la constante afin d'obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_1(t) = e^{tA}Y_1(0) + \int_0^t s e^{(t-s)A} Y_0(s) ds.$$

Comme  $Y_1(0) = 0$  et  $Y_0(s) = e^{sA}X_0$  par les questions 4.a et 4.b, nous concluons que

$$Y_1(t) = \int_0^t s e^{(t-s)A} e^{sA} X_0 ds = \int_0^t s e^{tA} X_0 ds = \frac{t^2}{2} e^{tA} X_0.$$

5. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_\varepsilon(t) = e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}} e^{tA} X_0.$$

Par produit, la fonction  $Y_\varepsilon$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . De plus, elle satisfait

$$Y_\varepsilon(0) = X_0,$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_\varepsilon'(t) = \varepsilon t e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}} e^{tA} X_0 + e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}} A e^{tA} X_0 = (A + \varepsilon t I_2) e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}} e^{tA} X_0 = A_\varepsilon(t) Y_\varepsilon(t).$$

D'après la question 3.a, l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction  $X_\varepsilon$ , de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X_\varepsilon(t) = Y_\varepsilon(t) = e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}} e^{tA} X_0.$$

## Exercice 2.

1.a. Supposons que la fonction  $x$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur son intervalle de définition  $I$ , et posons

$$\forall t \in I, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

La fonction  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et si la fonction  $x$  est solution de l'équation différentielle, alors

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ f(t) - \omega^2 x(t) \end{pmatrix} = AX(t) + B(t),$$

où nous avons noté

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si  $X = (X_1, X_2) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$  est solution de ce système différentiel, alors, les fonctions  $X_1$  et  $X_2$  satisfont

$$\forall t \in I, X_1'(t) = X_2(t), \quad \text{et} \quad X_2'(t) = -\omega^2 X_1(t) + f(t).$$

Par la première de ces formules, la fonction  $x = X_1$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , et par la seconde, elle satisfait

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t).$$

Cette équation différentielle est donc bien équivalente au système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

b. Comme la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $B$  est également continue sur  $\mathbb{R}$ . Il résulte donc de la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t), \\ X(0) = (x_0, x_1), \end{cases}$$

possède une unique solution globale  $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ . D'après l'équivalence établie à la question 1.a, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \\ x(0) = x_0, \text{ et } x'(0) = x_1, \end{cases}$$

possède donc une unique solution globale  $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

2.a. D'après la question 1.a, le système du premier ordre associé à l'équation différentielle homogène

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

s'écrit

$$X'(t) = AX(t).$$

Comme la matrice  $A$  est à coefficients constants, la résolvante  $R(t, s)$  de ce système est donnée par la formule

$$R(t, s) = e^{(t-s)A},$$

quels que soient les nombres  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ . Afin de calculer les exponentielles de matrices dans cette formule, nous calculons le polynôme caractéristique de la matrice  $A$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = (\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega).$$

Le spectre complexe de cette matrice est donc égal à

$$\sigma(A) = \{ -i\omega, i\omega \}.$$

Si  $X = (x, y)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $i\omega$ , alors,

$$\begin{cases} y = i\omega x, \\ -\omega^2 x = i\omega y, \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que  $y = i\omega x$ . L'espace propre  $E_{i\omega}(A)$  est donc engendré par le vecteur propre

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice  $A$  est réelle, l'espace propre  $E_{-i\omega}(A)$  associé à la valeur propre conjuguée  $-i\omega$  est engendré par le vecteur propre

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}.$$

Pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix},$$

nous concluons que

$$A = P \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Quel que soit le nombre  $\tau \in \mathbb{R}$ , il s'ensuit que

$$e^{\tau A} = \exp \left( P \begin{pmatrix} i\omega\tau & 0 \\ 0 & -i\omega\tau \end{pmatrix} P^{-1} \right) = P \begin{pmatrix} e^{i\omega\tau} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega\tau} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Sachant que

$$P^{-1} = \frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ i\omega & -1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons

$$e^{\tau A} = \begin{pmatrix} \cos(\omega\tau) & \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} \\ -\omega \sin(\omega\tau) & \cos(\omega\tau) \end{pmatrix},$$

d'où la formule

$$R(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-s)) & \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} \\ -\omega \sin(\omega(t-s)) & \cos(\omega(t-s)) \end{pmatrix}.$$

b. Par la méthode de variation de la constante, nous savons que l'unique solution  $X$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t), \\ X(0) = (x_0, x_1), \end{cases}$$

s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = R(t, 0)X(0) + \int_0^t R(t, s)B(s) ds,$$

soit

$$X(t) = e^{tA}X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s) ds.$$

D'après la question 1.a, cette solution est égale à

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix},$$

où  $x$  est la solution du problème de Cauchy considéré. Nous obtenons donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega t) + x_1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} f(s) ds, \\ x'(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t) + x_1 \cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) f(s) ds. \end{cases}$$

3. Supposons d'abord que la solution  $x$  est  $T$ -périodique. Dans ce cas, sa dérivée  $x'$  est aussi  $T$ -périodique, ce qui signifie que

$$x(T) = x(0), \quad \text{et} \quad x'(T) = x'(0).$$

D'après les formules de la question 2.b, nous obtenons

$$\begin{cases} x_0 \cos(\omega T) + x_1 \frac{\sin(\omega T)}{\omega} + \int_0^T \frac{\sin(\omega(T-s))}{\omega} f(s) ds = x_0, \\ -x_0 \omega \sin(\omega T) + x_1 \cos(\omega T) + \int_0^T \cos(\omega(T-s)) f(s) ds = x_1. \end{cases}$$

Sachant que  $T = 2\pi/\omega$ , nous calculons

$$\cos(\omega T) = \cos(2\pi) = 1, \quad \text{et} \quad \sin(\omega T) = \sin(2\pi) = 0,$$

ainsi que, pour  $0 \leq s \leq T$ ,

$$\cos(\omega(T-s)) = \cos(2\pi - \omega s) = \cos(\omega s), \quad \text{et} \quad \sin(\omega(T-s)) = \sin(2\pi - \omega s) = -\sin(\omega s).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} x_0 - \frac{1}{\omega} \int_0^T \sin(\omega s) f(s) ds = x_0, \\ x_1 + \int_0^T \cos(\omega s) f(s) ds = x_1, \end{cases}$$

ce qui assure que

$$\int_0^T f(s) \sin(\omega s) ds = \int_0^T f(s) \cos(\omega s) ds = 0.$$

Réciproquement, supposons que ces deux intégrales soient nulles. D'après les formules de la question 2.b, nous savons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t+T) = x_0 \cos(\omega(t+T)) + x_1 \frac{\sin(\omega(t+T))}{\omega} + \int_0^{t+T} \frac{\sin(\omega(t+T-s))}{\omega} f(s) ds.$$

Sachant que  $T = 2\pi/\omega$ , nous vérifions que

$$\cos(\omega(t+T)) = \cos(\omega t), \quad \text{et} \quad \sin(\omega(t+T)) = \sin(\omega t).$$

Nous avons également

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \sin(\omega(t+T-s)) = \sin(\omega(t-s)) = \sin(\omega t) \cos(\omega s) - \sin(\omega s) \cos(\omega t),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x_0 \cos(\omega t) + x_1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \int_0^{t+T} \cos(\omega s) f(s) ds \\ &\quad - \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \int_0^{t+T} \sin(\omega s) f(s) ds. \end{aligned}$$

La relation de Chasles assure alors que

$$\int_0^{t+T} \cos(\omega s) f(s) ds = \int_0^T \cos(\omega s) f(s) ds + \int_T^{t+T} \cos(\omega s) f(s) ds.$$

La première intégrale à droite de cette égalité est nulle par hypothèse. Par le changement de variable  $u = s - T$ , la deuxième est égale à

$$\int_T^{t+T} \cos(\omega s) f(s) ds = \int_0^t \cos(\omega(u+T)) f(u+T) du.$$

Comme la fonction  $f$  est  $T$ -périodique, la fonction  $u \mapsto \cos(\omega u) f(u)$  est aussi  $T$ -périodique, ce qui assure que

$$\int_T^{t+T} \cos(\omega s) f(s) ds = \int_0^t \cos(\omega u) f(u) du,$$

et nous aboutissons à

$$\int_0^{t+T} \cos(\omega s) f(s) ds = \int_0^t \cos(\omega u) f(u) du.$$

De façon similaire, nous calculons

$$\begin{aligned} \int_0^{t+T} \sin(\omega s) f(s) ds &= \int_0^T \sin(\omega s) f(s) ds + \int_T^{t+T} \sin(\omega s) f(s) ds \\ &= \int_0^t \sin(\omega u) f(u) du, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x_0 \cos(\omega t) + x_1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \int_0^t \cos(\omega u) f(u) du \\ &\quad - \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \int_0^t \sin(\omega u) f(u) du. \end{aligned}$$

D'après la question 2.b, nous concluons que

$$x(t+T) = x_0 \cos(\omega t) + x_1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-u))}{\omega} f(u) du = x(t),$$

soit que la solution  $x$  est  $T$ -périodique. En définitive, nous avons bien démontré que cette propriété équivaut au fait que

$$\int_0^T f(s) \sin(\omega s) ds = \int_0^T f(s) \cos(\omega s) ds = 0.$$

### Exercice 3.

1.a. Rappelons que l'application exponentielle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , à valeurs dans  $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$ . Étant donnée une matrice  $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , la fonction  $t \mapsto e^{tM}$  est donc par composition de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donc  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$ . Comme une matrice produit de matrices inversibles est inversible, la fonction  $\Phi$  est, par produit, bien définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$ .

b. Rappelons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} (e^{tM}) = M e^{tM} = e^{tM} M.$$

Par définition de la fonction  $\Phi$ , nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t) &= e^{tA} A e^{tB} e^{-t(A+B)} + e^{tA} e^{tB} B e^{-t(A+B)} - e^{tA} e^{tB} (A+B) e^{-t(A+B)} \\ &= e^{tA} (A e^{tB} - e^{tB} A) e^{-t(A+B)}. \end{aligned}$$

Rappelons aussi que

$$\forall M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), (e^M)^{-1} = e^{-M},$$

de sorte que

$$\Phi(t)^{-1} = e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA},$$

puis

$$\Phi'(t)\Phi(t)^{-1} = e^{tA} \left( A e^{tB} - e^{tB} A \right) e^{-t(A+B)} e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA} = e^{tA} \left( A - e^{tB} A e^{-tB} \right) e^{-tA}.$$

2.a. Nous vérifions par récurrence que

$$\forall n \geq 0, B^n[A, B] = [A, B]B^n.$$

Cette formule est vraie au rang  $n = 0$  (car  $B^0 = I_N$ ), et si elle est vraie jusqu'au rang  $n$ , alors

$$B^{n+1}[A, B] = B B^n[A, B] = B[A, B]B^n = [A, B]B^{n+1},$$

d'où sa validité par récurrence. Par définition de la fonction exponentielle, nous obtenons alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{tB}[A, B] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} B^n[A, B] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} [A, B]B^n = [A, B] \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} B^n = [A, B]e^{tB}.$$

b. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \theta(t) = e^{tB} A e^{-tB}.$$

D'après la question 1.a, la fonction  $\theta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \theta'(t) = e^{tB} B A e^{-tB} - e^{tB} A B e^{-tB} = -e^{tB} [A, B] e^{-tB}.$$

Il découle donc de la question 2.a que

$$\theta'(t) = -[A, B] e^{tB} e^{-tB} = -[A, B].$$

Sachant que

$$\theta(0) = e^{0B} A e^{-0B} = A,$$

il suffit d'intégrer la dérivée  $\theta'$  pour obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \theta'(s) ds = A - \int_0^t [A, B] ds,$$

soit

$$e^{tB} A e^{-tB} = A - t[A, B].$$

c. Nous pouvons combiner les questions 1.b et 2.b pour obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} = t e^{tA} [A, B] e^{-tA}.$$

Sachant que

$$A[A, B] = [A, B]A,$$

nous déduisons comme à la question 2.a que

$$e^{tA} [A, B] = [A, B] e^{tA},$$

de sorte que

$$\Phi'(t)\Phi(t)^{-1} = t[A, B] e^{tA} e^{-tA} = t[A, B].$$

En particulier, la fonction  $\Phi$  est solution de l'équation différentielle linéaire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t) = t[A, B]\Phi(t),$$

avec de plus

$$\Phi(0) = e^{0A}e^{0B}e^{-0(A+B)} = I_N.$$

Nous remarquons alors que la fonction  $\nu$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \nu(t) = e^{\frac{t^2}{2}[A, B]},$$

satisfait également

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \nu'(t) = t[A, B]\nu(t), \\ \nu(0) = I_N. \end{cases}$$

Par la version affine du théorème de Cauchy-Lipschitz, il s'ensuit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(t) = \nu(t) = e^{\frac{t^2}{2}[A, B]}.$$

Pour  $t = 1$ , cette formule devient

$$e^A e^B e^{-(A+B)} = e^{\frac{1}{2}[A, B]},$$

soit

$$e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A, B]} e^{A+B}.$$

Sachant que

$$(A + B)[A, B] = [A, B](A + B),$$

nous savons que

$$e^{\frac{1}{2}[A, B]} e^{A+B} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]},$$

et nous concluons que

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}.$$