

Examen

La durée de cet examen est de trois heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Exercice 1. (10 points)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.a. Déterminer le spectre et les espaces propres de la matrice A .

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de la matrice e^{tA} .

2. Considérons le système linéaire

$$X'(t) = AX(t).$$

a. L'origine est-elle asymptotiquement stable pour ce système linéaire ? Est-elle stable ?

b. Esquisser le portrait de phase associé à ce système linéaire.

3. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, A_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon t & 2 \\ 4 & 1 + \varepsilon t \end{pmatrix},$$

a. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t)X_\varepsilon(t), \\ X_\varepsilon(0) = X_0, \end{cases}$$

possède une unique solution $X_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

b. Montrer qu'il existe des fonctions $Y_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et $Y_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ telles que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, X_\varepsilon = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon R_\varepsilon,$$

avec

$$\|R_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

pour tout nombre $\tau > 0$.

4.a. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_0(t) = e^{tA}X_0.$$

b. Montrer que la fonction Y_1 est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'_1(t) = AY_1(t) + tY_0(t), \\ Y_1(0) = 0. \end{cases}$$

c. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_1(t) = \frac{t^2}{2}e^{tA}X_0.$$

5. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X_\varepsilon(t) = e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}} e^{tA} X_0.$$

Exercice 2. (5 points)

Soit $\omega > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Considérons l'équation différentielle

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t).$$

1.a. Écrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel du premier ordre.

b. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \\ x(0) = x_0, \text{ et } x'(0) = x_1, \end{cases}$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.a. Déterminer la résolvante du système du premier ordre associé à l'équation différentielle homogène

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

b. Déterminer la valeur de la solution x du problème de Cauchy précédent, et de sa dérivée x' , en fonction des nombres x_0 et x_1 , et de la fonction f .

3. Soit $T = 2\pi/\omega$. Supposons que la fonction f est T -périodique. Montrer que toute solution x de l'équation différentielle est T -périodique si et seulement si

$$\int_0^T f(s) \sin(\omega s) ds = \int_0^T f(s) \cos(\omega s) ds = 0.$$

Exercice 3. (5 points)

Soit $N \geq 1$. Nous définissons le commutateur $[A, B]$ de deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})^2$ comme la matrice égale à

$$[A, B] = AB - BA.$$

1. Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(t) = e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)}.$$

a. Vérifier que la fonction Φ est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , à valeurs dans $\mathcal{GL}_N(\mathbb{C})$.

b. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t) \Phi(t)^{-1} = e^{tA} (A - e^{tB} A e^{-tB}) e^{-tA}.$$

2. Nous supposons que les matrices A et B commutent avec leur commutateur $[A, B]$, soit que

$$A[A, B] = [A, B]A, \quad \text{et} \quad B[A, B] = [A, B]B.$$

a. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{tB} [A, B] = [A, B] e^{tB}.$$

b. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{tB} A e^{-tB} = A - t[A, B].$$

c. Conclure que

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}.$$