GRAVEJAT Philippe — 5/1/26

Master 2

Transformation de Fourier

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étendre à des fonctions de la variable réelle quelconques, la démarche de décomposition sur des fonctions élémentaires entreprise pour les fonctions périodiques dans le cadre de la théorie des séries de Fourier. Étant donnée une fonction T-périodique, à valeurs réelles ou complexes, pour une période $T>0$, rappelons qu'il s'agit de décomposer cette fonction comme une somme ou une série de fonctions plus faciles à manipuler, en l'occurence les fonctions sinusoïdales T-périodiques de la forme:

$$\text{ou} \begin{cases} \forall n \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \\ \forall n \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g_n(x) = \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \end{cases}$$

ou encore les fonctions exponentielles complexes T-périodiques:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \ e_n(x) = e^{\frac{2i\pi n x}{T}}.$$

C'est sur cette deuxième classe de fonctions que s'appuie la transformation de Fourier, puisque nous cherchons à décomposer une fonction f quelconque sur les fonctions exponentielles complexes:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ e_\xi(x) = e^{i\xi x}.$$

Observons que cette famille de fonctions élémentaires ne dépend plus d'une variable discrète $n \in \mathbb{Z}$, mais d'une variable continue $\xi \in \mathbb{R}$. Il s'agira donc d'écrire la fonction f non plus comme une somme ou une série des fonctions exponentielles complexes, mais comme une intégrale de ces fonctions : la transformation de Fourier.

En pratique, la décomposition de la fonction f suivant sa transformée de Fourier se déroulera en deux étapes. D'abord l'analyse qui consistera à déterminer cette transformée de Fourier, définie tout comme les coefficients de Fourier par une formule intégrale:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx,$$

puis la synthèse qui cherchera à établir sous quelles conditions, en particulier d'intégrabilité, la fonction f peut s'écrire comme une intégrale de sa transformée de Fourier, via la formule de Fourier inverse :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire un cadre fonctionnel qui permet de définir et de manipuler la transformation de Fourier : celui des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \geq 1$. Nous définirons ensuite la transformée de Fourier d'une fonction intégrable et énoncerons les propriétés élémentaires de cette transformation. Puis nous introduirons l'opération de convolution afin d'établir la formule de Fourier inverse. Nous achèverons enfin ce chapitre par l'extension de la transformation de Fourier à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ via le théorème de Plancherel.

I Transformation de Fourier des fonctions intégrables

1. Rappels sur les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \geq 1$

Nous commençons par rappeler la définition et les principales propriétés des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \geq 1$. Dans la suite, toutes les fonctions considérées seront supposées mesurables au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Nous renvoyons au cours de théorie de la mesure pour la définition de cette notion de fonction mesurable. Rappelons que les fonctions continues ou continues par morceaux sont des fonctions mesurable sur $\mathbb{R}$. Rappelons aussi que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive a toujours un sens, et que sa valeur est soit égale à un nombre réel positif, auquel cas cette fonction est dite intégrable, soit égale à $+\infty$.

a. Définition des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$

Déf: Soit $p \geq 1$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est de puissance p intégrable sur $\mathbb{R}$ ssi elle est mesurable sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx$ est finie. L'espace des fonctions de puissance p intégrable sur $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$. La fonction f est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p|x|} dx = \frac{2}{p} < +\infty$, donc elle appartient à tous les espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Rem: Pour $p = 1$, l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ correspond à l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$; pour $p = 2$, l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ correspond à l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ - espace vectoriel pour l'addition et le produit externe définis par:

$$\begin{cases} \forall (f, g) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ (f+g](x) = f(x) + g(x), \\ \text{et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda f](x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Cette affirmation résulte en particulier de l'inégalité:

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2,\ |a+b|^p \leq 2^{p-1}\left[|a|^p + |b|^p\right].$$

Il est naturel de chercher à munir cet espace vectoriel d'une structure d'espace vectoriel normé. La quantité N_p définie par:

$$\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\quad N_p(f) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

est bien définie sur l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elle satisfait:

(i) $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $N_p(f) \geq 0$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $N_p(\lambda f) = |\lambda|\, N_p(f)$.

Elle vérifie de plus l'inégalité triangulaire. Cette propriété résulte de l'inégalité de Hölder lorsque $p > 1$.

Inégalité de Hölder: Soit $p > 1$, et $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Quelles que soient les fonctions $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, la fonction fg appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et satisfait:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) g(x)|\, dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

<u>Rem:</u> Cette inégalité demeure valable dans le cas où $p = 1$ lorsque la fonction f est donc supposée intégrable sur $\mathbb{R}$, et la fonction g est supposée bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) g(x)|\, dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx\right) \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|,$$

lorsque la quantité $N_q(g)$ est remplacée par la quantité :

$$N_\infty(g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

<u>Dém:</u> La preuve repose sur l'inégalité de Young :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Comme f et g sont mesurables sur $\mathbb{R}$, leur produit fg est mesurable sur $\mathbb{R}$, et par l'inégalité de Young :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0, \quad |f(x) g(x)| \leq \frac{\alpha^{p-1}}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{\alpha q} |g(x)|^q,$$

d'où l'inégalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) g(x)|\, dx \leq \frac{\alpha^{p-1}}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx + \frac{1}{\alpha q} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^q\, dx.$

Lorsque $N_p(f) > 0$ et $N_q(g) > 0$, il suffit de poser $\alpha = \dfrac{N_q(g)^{\frac{q}{p}}}{N_p(f)}$ pour obtenir l'inégalité de Hölder ; dans les cas où $N_p(f) = 0$ ou $N_p(g)$, les fonctions f ou g sont nulles presque partout, donc leur produit également, et l'inégalité de Hölder reste valable.

L'inégalité de Hölder conduit à l'inégalité de Minkowski, qui n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire pour la quantité N_p.

<u>Inégalité de Minkowski</u> : Soit $p \geq 1$. $\forall (f, g) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$, $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

<u>Dém:</u> Pour $p = 1$, cette inégalité résulte directement de l'inégalité triangulaire pour des nombres réels ; pour $p > 1$, sachant que $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$, la fonction $|f+g|^{p-1}$ est dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ lorsque $(f, g) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$. Nous déduisons de cette propriété par l'inégalité de Hölder que :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)+g(x)|^p\, dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, |f(x)+g(x)|^{p-1}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, |f(x)+g(x)|^{p-1}\, dx \\ &\leq N_p(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)+g(x)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + N_p(g) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)+g(x)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

Dans le cas où $N_p(f+g) = 0$, l'inégalité de Minkowski est vraie, et sinon, elle découle de l'inégalité précédente.

Une fois l'inégalité triangulaire établie pour la quantité N_p, nous observons néanmoins que:

$$\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ N_p(f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow \text{p.p. t. } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0,$$

de sorte que l'application N_p n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, puisqu'elle peut s'annuler sans que la fonction considérée ne soit nulle.

Afin de contourner cette difficulté, nous introduisons la relation d'équivalence:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2,\ f \sim g \Leftrightarrow \text{p.p. t. } x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x),$$

et nous notons $\dot{f}$ la classe d'équivalence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour cette relation, soit l'ensemble:

$$\dot{f} = \{ g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ t.q. } g \sim f \}.$$

Nous définissons alors l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation:

$$L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \{ \dot{f},\ f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \}.$$

Cet ensemble conserve une structure de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ - espace vectoriel pour la somme et le produit externe:

$$\begin{cases} \forall (\dot{f}, \dot{g}) \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2,\ \dot{f} + \dot{g} = (\dot{f+g}), \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},\ \forall \dot{f} \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \lambda \dot{f} = (\dot{\lambda f}). \end{cases}$$

Observons ici que ces deux opérations sont bien définies, puisque:

$$\begin{cases} \forall (f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^4,\ f_1 \sim f_2 \text{ et } g_1 \sim g_2 \Rightarrow f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2, \\ \text{et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},\ \forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2,\ f_1 \sim f_2 \Rightarrow \lambda f_1 \sim \lambda f_2. \end{cases}$$

De façon similaire, l'application $\| \ \|_p$ définie par:

$$\forall \dot{f} \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \| \dot{f} \|_p = N_p(f),$$

est bien définie. En effet, lorsque deux fonctions f_1 et f_2 de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ satisfont $f_1 \sim f_2$, nous avons:

$$\text{p.p. t. } x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = f_2(x),$$

de sorte que:

$$N_p(f_1) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = N_p(f_2).$$

De plus, cette application continue à satisfaire:

(i) $\forall \dot{f} \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \| \dot{f} \|_p = N_p(f) \geq 0,$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},\ \forall \dot{f} \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \| \lambda \dot{f} \|_p = N_p(\lambda f) = |\lambda|\, N_p(f) = |\lambda|\, \| \dot{f} \|_p,$

(iii) $\forall (\dot{f}, \dot{g}) \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2,\ \| \dot{f} + \dot{g} \|_p = N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g) = \| \dot{f} \|_p + \| \dot{g} \|_p.$

Par contre, elle vérifie aussi :

$$\forall \dot{f} \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \|\dot{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow N_p(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.} \Leftrightarrow \dot{f} = \dot{0}.$$

Comme la classe d'équivalence $\dot{0}$ est le vecteur nul de l'espace vectoriel $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, l'application $\| \ \|_p$ est une norme sur le $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, qui le munit donc d'une structure d'espace vectoriel normé.

En pratique, il n'est pas si facile de manipuler les classes de fonctions qui constituent l'espace $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Il est préférable de continuer à manipuler les fonctions qui composent ces classes. Dans la suite, nous identifions ces classes avec l'une des fonctions (en principe la plus simple possible) qui les compose. Autrement dit, nous considérons l'espace $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ non pas comme un espace de classes de fonctions, mais comme un espace de fonctions. Une fonction f dans cet espace est connue dès que sa valeur sur un ensemble de mesure pleine est connue, et deux fonctions f et g sont égales dès qu'elles sont égales presque partout.

Ex : Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon. Comme $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable, donc de mesure nulle de $\mathbb{R}$, la fonction f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$. Elle est donc égale à la fonction nulle dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Avec cet abus de langage, l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ satisfait :

Thm : Soit $p \geq 1$. L'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ - espace vectoriel normé pour la norme :

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dém : Voir les explications ci-dessus pour la preuve du théorème.

Rem : Soit Ω, un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle). Pour $p \geq 1$, la définition et le théorème précédents s'étendent à l'espace de Lebesgue :

$$L^p(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ t.q. } f \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\},$$

qui est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ - espace vectoriel normé pour la norme :

$$\forall f \in L^p(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ex : Soit $\forall x \in [-1,0[\cup]0,1]$, $f(x) = \ln|x|$. La fonction f est bien définie et mesurable (car continue) sur $[-1,0[\cup]0,1]$, et elle satisfait : $\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx = 2\int_0^1 |\ln|x||^p dx < +\infty$. Elle définit donc sans ambiguïté une fonction de $L^p([-1,1],\mathbb{R})$ (même si sa valeur en 0 n'est pas donnée), puisque $[-1,0[\cup]0,1]$ est un sous-ensemble de mesure pleine de $[-1,1]$.

b. Théorème de convergence dominée et intégrales à paramètres

Dans la suite, la transformation de Fourier d'une fonction intégrable est définie comme une intégrale à paramètres. L'analyse des propriétés de continuité et de dérivabilité de cette intégrale repose sur le théorème de convergence dominée (de Lebesgue).

Théorème de convergence dominée (de Lebesgue) : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Supposons que :

(i) Il existe une fonction $f_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :

p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_\infty(x)$.

(ii) Il existe une fonction $F \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ telle que :

$\forall n \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq F(x)$.

Alors la fonction f_∞ est mesurable sur $\mathbb{R}$, et définit une fonction de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. De même, les fonctions f_n définissent des fonctions de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ qui satisfont :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\infty(x)\,dx.$$

Dém : (i) Comme $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ p.p. sur $\mathbb{R}$, la fonction f_∞ est mesurable sur $\mathbb{R}$. Sachant que p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq F(x)$, à la limite $n \to +\infty$, $|f_\infty(x)| \leq F(x)$; comme $F \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, $\forall n \geq 0$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et $f_\infty \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(ii) Soit $\forall n \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = 2F(x) - |f_n(x) - f(x)|$; les fonctions g_n appartiennent à $L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) \geq 2F(x) - |f_n(x)| - |f(x)| \geq 0$; par le lemme de Fatou, $\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\lim}_{n\to+\infty} g_n(x)dx \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx$; par convergence presque partout, $\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\lim}_{n\to+\infty} g_n(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$, tandis que : $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx - \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx$, d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)-f_\infty(x)|\,dx = 0$, puis : $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_\infty(x)\,dx\right|$ $\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)-f_\infty(x)|\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Ex : Soit $\forall n\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{e^{\frac{ix}{2n}}}{1+x^2}$; les fonctions f_n sont continues, donc mesurables sur $\mathbb{R}$, et elles satisfont : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_\infty(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, et $\forall n\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq f_\infty(x)$; comme la fonction f_∞ appartient à $L^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, par le théorème de convergence dominée, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \pi.$

Rem : (i) L'hypothèse (ii) du théorème de convergence dominée est appelé hypothèse de domination. La fonction F qui domine la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ doit être indépendante de n.

(ii) La preuve du théorème de convergence dominée assure que :
$\|f_n - f_\infty\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)-f_\infty(x)|\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est donc convergente dans l'espace $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ de limite égale à la fonction f_∞.

(iii) Le théorème de convergence dominée reste valable lorsque les fonctions f_n, f_∞ et F sont définies sur un sous-ensemble mesurable Ω de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle).

Ex : Soit $\forall n\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = 2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) e^{-x}$; les fonctions f_n sont continues, donc mesurables sur $\mathbb{R}_+$, et elles satisfont : $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_\infty(x) = x e^{-x}$, et $\forall n\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leq x e^{-x} = F(x)$; comme la fonction F appartient à $L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, par le théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx = 1.$

Le théorème de convergence dominée permet d'établir la continuité de certaines intégrales à paramètres.

Théorème de continuité des intégrales à paramètres : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Considérons une fonction $f : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall t\in I$, l'application $f(t,\cdot) : x\mapsto f(t,x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$.

(ii) p.p.t. $x\in\mathbb{R}$, l'application $f(\cdot,x) : t\mapsto f(t,x)$ est continue sur I.

(iii) Il existe une fonction $G\in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ telle que :

$\forall t \in I$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)| \leq G(x)$.

La fonction F donnée par :

$\forall t \in I$, $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,dx$,

est alors bien définie et continue sur l'intervalle I.

Dém : (i) Comme $G \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et $\forall t \in I$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)| \leq G(x)$, les fonctions $f(t,.)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, de sorte que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,dx$ ont un sens, et la fonction F est bien définie sur I.

(ii) Soit alors $t_* \in I$ et $(t_n)_{n\geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ t.q. $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} t_*$; comme p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(t_n,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t_*,x)$, et $\forall n \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f(t_n,x)| \leq G(x)$, par le théorème de convergence dominée, $F(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(t_*)$ $\Rightarrow$ F est continue en t_*, donc sur I.

Ex : Soit $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = \dfrac{e^{itx}}{1+x^2}$; les fonctions $f(t,.)$ sont continues, donc mesurables sur $\mathbb{R}$, tandis que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $f(.,x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$; comme $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t,x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$, et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Rem : Le théorème de continuité des intégrales à paramètres reste valable lorsque les fonctions f et G sont définies sur $I \times \Omega$, respectivement Ω, où Ω est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle).

Ex : Soit $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$, $f(t,x) = \sin(x)\,e^{itx}$; les fonctions $f(t,.)$ sont continues, donc mesurables sur $[-1,1]$, tandis que, quel que soit $x \in [-1,1]$, les fonctions $f(.,x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$; comme $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$, $|f(t,x)| \leq 1$, et la fonction $x \mapsto 1$ appartient à $L^1([-1,1], \mathbb{R}_+)$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{-1}^{1} \sin(x)\,e^{itx}\,dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de convergence dominée permet aussi de démontrer la dérivabilité de certaines intégrales à paramètres.

Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres: Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Considérons une fonction $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que:

(i) $\forall t \in I$, l'application $f(t,.) : x \mapsto f(t,x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$.

(ii) p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(.,x) : t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I.

(iii) Il existe une fonction $G \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que:

$\forall t \in I$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)| + \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq G(x)$.

La fonction F donnée par:

$\forall t \in I$, $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,dx$,

est alors bien définie, continue et dérivable sur I, avec:

$\forall t \in I$, $F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$.

De plus, si p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(.,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Dém: (i) Comme $G \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et $\forall t \in I$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)| \leq G(x)$, les fonctions $f(t,.)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et la fonction F est bien définie sur I.

(ii) Comme p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(.,x)$ est dérivable, donc continue sur I, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, F est continue sur I.

(iii) Soit alors $t_* \in I$ et $(t_n)_{n \geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ t.q. $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} t_*$; comme p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(t_n,x) - f(t_*,x)}{t_n - t_*} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\partial f}{\partial t}(t_*,x)$, et par le théorème des accroissements finis, $\forall n \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{f(t_n,x) - f(t_*,x)}{t_n - t_*}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\theta_n,x)\right| \leq G(x)$, par le théorème de convergence dominée, $\frac{F(t_n) - F(t_*)}{t_n - t_*} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t_*,x)\,dx \Rightarrow F$ est dérivable sur I, avec: $\forall t \in I$, $F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$

(iv) Lorsque p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(.,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ sont continues sur I pour presque tout $x \in \mathbb{R}$; comme $\forall t \in I$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq G(x)$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F' est continue sur I, de sorte que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Ex: Soit $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = e^{-x^2} e^{itx}$; les fonctions $f(t,.)$ sont continues, donc mesurables sur $\mathbb{R}$, tandis que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $f(.,x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; comme $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t,x)| + \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|$

$\leq (1+|x|)\, e^{-x^2}$, et la fonction $x \mapsto (1+|x|)\, e^{-|x|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction E donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{itx}\, dx$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix\, e^{-x^2} e^{itx}\, dx$.

Rem : Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres reste valable lorsque les fonctions f et G sont définies sur $I \times \Omega$, respectivement sur Ω, où Ω est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle).

Ex : Soit $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$, $f(t,x) = \cos(x^3)\, e^{itx}$; les fonctions $f(t,.)$ sont continues, donc mesurables sur $[-1,1]$, tandis que, quel que soit $x \in [-1,1]$, les fonctions $f(.,x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; comme $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$, $|f(t,x)| + \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq 1 + |x|$, et la fonction $x \mapsto 1 + |x|$ appartient à $L^1([-1,1], \mathbb{R}_+)$, par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, la fonction E donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(t) = \int_{-1}^{1} \cos(x^3)\, e^{itx}\, dx$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E'(t) = \int_{-1}^{1} ix \cos(x^3)\, e^{itx}\, dx$.

4. Propriétés fonctionnelles des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$

Nous commençons par démontrer que l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_p$ est complet.

Théorème de Riesz-Fischer : Soit $p \geq 1$. L'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_p$.

Dém : (i) Considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; par définition, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 0$ t.q. $\forall m \geq N$, $\forall n \geq N$, $\|f_m - f_n\|_p \leq \varepsilon$; par récurrence sur $i \geq 0$, nous construisons une suite strictement croissante $(N_i)_{i \geq 0}$ t.q. $\forall i \geq 0$, $\forall m \geq N_i$, $\forall n \geq N_i$, $\|f_m - f_n\|_p \leq 2^{-i} \Rightarrow \forall i \geq 0$, $\|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}\|_p \leq 2^{-i}$.

(ii) Posons : $\forall i \geq 0$, $E_i = \sum_{k=0}^{i} |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}|$. Les fonctions E_i appartiennent à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et satisfont par l'inégalité triangulaire : $\|E_i\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{i} \|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_p \leq \sum_{k=0}^{i} 2^{-k} \leq 2$; par le lemme de Fatou, la fonction $E = \sum_{k=0}^{+\infty} |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}|$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |E(x)|^p dx \leq \lim_{i \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_i(x)|^p dx$

$\leq 2^p$; en particulier, la fonction F est finie presque partout et appartient à l'espace $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

(iii) Sachant que F est finie presque partout, la série $f_{N_0} + \sum_{i \geq 0} (f_{N_{i+1}} - f_{N_i})$ est absolument convergente, donc convergente presque partout sur $\mathbb{R}$; notons f_∞ sa limite, qui est donc bien définie presque partout et mesurable sur $\mathbb{R}$ (et qui définit donc une classe de fonctions à égalité presque partout près) ; comme $\forall i \geq 0$, p.p.t $x \in \mathbb{R}$, $\left| f_{N_0}(x) + \sum_{k=0}^{i} (f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)) \right| \leq |f_{N_0}(x)| + F(x)$, à la limite $i \to +\infty$, $|f_\infty(x)| \leq |f_{N_0}(x)| + F(x)$; sachant que f_{N_0} et F sont dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $f_\infty \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(iv) Sachant que $|f_n(x) - f_{N_k}(x)|^p = \left| f_n(x) - f_{N_0}(x) - \sum_{i=0}^{k-1} (f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)) \right|^p \xrightarrow[k \to +\infty]{} |f_n(x) - f_\infty(x)|^p$ p.p., et p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f_{N_k}(x)|^p \leq 2^{p-1} (|f_n(x) - f_{N_0}(x)|^p + F(x)^p)$, avec $f_n - f_{N_0}$ et F dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, par le théorème de convergence dominée, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_{N_k}(x)|^p dx \xrightarrow[k \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_\infty(x)|^p dx$, d'où, puisque $\forall i \geq 0$, $\forall n \geq N_i$, $\forall k \geq i$, $\|f_n - f_{N_k}\|_p \leq 2^{-i}$, $\forall n \geq N_i$, $\|f_n - f_\infty\|_p \leq 2^{-i} \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f_\infty$ dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, ce qui assure la complétude de cet espace.

Pour $p = 1$, la preuve de la complétude de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ conduit à la réciproque suivante du théorème de convergence dominée.

Cor: Considérons une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ convergente de limite f_∞ ($\in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$). Alors il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ et une fonction $F \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telles que :

(i) $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f_\infty$ p.p. sur $\mathbb{R}$,

(ii) $\forall n \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f_{\varphi(n)}(x)| \leq F(x)$.

Dém: Comme la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, elle est de Cauchy dans cet espace ; avec les notations de la preuve du théorème précédent, l'extraction φ définie par : $\forall i \geq 0$, $\varphi(i) = N_i$ satisfait : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f_{\varphi(i)}(x) \xrightarrow[i \to +\infty]{} f_\infty(x)$, et $|f_{\varphi(i)}(x)| \leq |f_{\varphi(0)}(x)| + F(x)$; il suffit de choisir la fonction F comme le second membre de cette inégalité (avec un changement de notation ad hoc) pour conclure la preuve du corollaire.

Rem: Soit $p \geq 1$. Lorsque Ω est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle), l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ demeure un espace de Banach pour la norme $\| \ \|_p$, et la réciproque précédente du théorème de convergence dominée reste aussi valable.

Il n'est pas toujours simple de manipuler des fonctions mesurables arbitraires de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et il est parfois plus facile de se restreindre dans un premier temps à des fonctions plus régulières, par exemple au moins continues. Cette approche est permise par le fait que le sous-ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Déf: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La fonction f est continue à support compact sur $\mathbb{R}$ ssi :

(i) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Il existe un nombre $R > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[, \ f(x) = 0.$$

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si $x \leq -1$, $x+1$ si $-1 \leq x \leq 0$, $1-x$ si $0 \leq x \leq 1$, et 0 si $x \geq 1$. La fonction f est bien définie et continue à support compact sur $\mathbb{R}$, puisque : $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f(x) = 0$.

Rem: Quel que soit $p \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. En pratique, lorsqu'une fonction de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ admet un représentant continu à support compact, il est en effet naturel de l'identifier à ce représentant (qui est le meilleur possible en terme de régularité).

Thm: Le sous-espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est dense dans l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour la norme $\| \ \|_p$ quel que soit $p \geq 1$. Autrement dit, quelle que soit la fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ continues à support compact sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\| f_n - f \|_p \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Dém: La preuve de ce résultat repose sur des propriétés fines de la mesure de Lebesque et sera ici admise.

<u>Rem</u>: (i) Ce résultat demeure vrai dans un ouvert Ω (non vide) de $\mathbb{R}$: le sous-espace $\mathcal{C}_c^0(\Omega, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ reste dense dans l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour la norme $\| \ \|_p$ quel que soit $p \geq 1$.

(ii) Par contre, le sous-espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ n'est pas dense dans l'espace de Lebesgue $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour sa norme canonique $\| \ \|_\infty$ (dont nous ne traiterons pas dans la suite). L'adhérence de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans cet espace est en effet l'ensemble $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ des fonctions continues de limites nulles en $+\infty$ et $-\infty$.

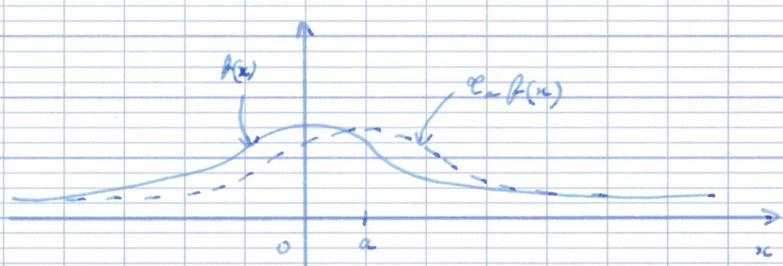
La densité des fonctions continues à support compact permet d'établir la continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ par un argument dit de densité.

<u>Déf</u>: Soit $p \geq 1$. Etant donnés un nombre $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, la translatée de paramètre a de la fonction f est définie par:

p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\tau_a f(x) = f(x-a)$.

La fonction $\tau_a f$ est bien définie par cette expression et appartient à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

<u>Dém</u>:



Comme f est mesurable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\tau_a f$ est bien définie (presque partout) et mesurable sur $\mathbb{R}$; par le changement de variables $y = x-a$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau_a f(x)|^p dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^p dy < +\infty \Rightarrow \tau_a f$ définit une fonction de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

<u>Ex</u>: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$; la fonction f appartient à tous les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tau_a f(x) = e^{-(x-a)^2}$.

<u>Thm</u>: Soit $p \geq 1$. Quelle que soit la fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, l'application translation $a \mapsto \tau_a f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; autrement dit :

$$\forall a_0 \in \mathbb{R},\ \| \tau_a f - \tau_{a_0} f \|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-a) - f(x-a_0)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \underset{a \to a_0}{\longrightarrow} 0.$$

Dém : (i) Supposons d'abord que f est continue à support compact sur $\mathbb{R}$; il existe $R>0$ t.q. $\forall |x| > R$, $f(x) = 0$; si $|a - a_0| \leq 1$, alors : $\forall x \in]-\infty, a_0 - R - 1[\cup]a_0 + R + 1, +\infty[$, $f(x-a) = f(x-a_0) = 0 \Rightarrow \| \tau_a f - \tau_{a_0} f \|_p^p = \int_{a_0 - R - 1}^{a_0 + R + 1} |f(x-a) - f(x-a_0)|^p dx$; comme f est continue sur $[-R-1, R+1]$, elle est uniformément continue sur ce segment $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $\forall (y,z) \in [-R-1, R+1]^2$, $|z - y| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2(R+1)} \right)^{\frac{1}{p}}$; si $\delta < 1$, alors, en fait, $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^2$, $|z-y| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2(R+1)} \right)^{\frac{1}{p}}$; lorsque $|a - a_0| \leq \delta$, $\forall x \in [a_0 - R - 1, a_0 + R + 1]$, $|x - a - (x - a_0)| = |a - a_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x - a_0) - f(x-a)|^p \leq \frac{\varepsilon}{2(R+1)} \Rightarrow \| \tau_a f - \tau_{a_0} f \|_p^p \leq \frac{\varepsilon}{2(R+1)} \int_{a_0 - R - 1}^{a_0 + R + 1} dx = \varepsilon \Rightarrow$ L'application $a \mapsto \tau_a f$ est continue en a_0, donc sur $\mathbb{R}$.

(ii) Dans le cas général, le théorème de densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ assure que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ t.q. $\| f - f_\varepsilon \|_p \leq \varepsilon$; comme $\forall a \in \mathbb{R}$, $\| \tau_a f - \tau_{a_0} f \|_p \leq \| \tau_a f - \tau_a f_\varepsilon \|_p + \| \tau_a f_\varepsilon - \tau_{a_0} f_\varepsilon \|_p + \| \tau_{a_0} f_\varepsilon - \tau_{a_0} f \|_p$, et $\| \tau_{a_{(0)}} f - \tau_{a_0} f_\varepsilon \|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x - a_{(0)}) - f_\varepsilon(x - a_{(0)}) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \| f - f_\varepsilon \|_p$, par les changements de variables $y = x - a_{(0)}$, $\| \tau_a f - \tau_{a_0} f \|_p \leq 2\varepsilon + \| \tau_a f_\varepsilon - \tau_{a_0} f_\varepsilon \|_p$; par la première étape, sachant que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall a \in [a_0 - \delta, a_0 + \delta]$, $\| \tau_a f_\varepsilon - \tau_{a_0} f_\varepsilon \|_p \leq \varepsilon \Rightarrow \| \tau_a f - \tau_{a_0} f \|_p \leq 3\varepsilon \Rightarrow$ L'application $a \mapsto \tau_a f$ est continue en a_0, donc sur $\mathbb{R}$.

2. Définition et propriétés de la transformation de Fourier des fonctions intégrables

a. Définition et exemples

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est définie comme l'intégrale à paramètre :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$, bornée, continue et de limite nulle en $\pm\infty$.

Thm : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Posons :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

La transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait :

(i) $\forall \xi \in \mathbb{R}, \ |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$,

(ii) $\hat{f}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>Dém</u> : (i) Soit $\forall \xi \in \mathbb{R}$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g(\xi, x) = f(x)\, e^{-i\xi x}$; comme f est mesurable sur $\mathbb{R}$, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto g(\xi, x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, et par continuité de la fonction exponentielle, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \mapsto g(\xi, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; sachant que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|g(\xi, x)| \leq |f(x)|$, et que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la transformée de Fourier $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait : $\forall \xi \in \mathbb{R}, |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\, e^{-i\xi x}|\, dx$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$.

(ii) Soit $\xi \neq 0$; comme $e^{-i\pi} = -1$, $\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} e^{-i\pi}\, dx$ $= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi(x + \frac{\pi}{\xi})}\, dx$, d'où par le changement de variables $y = x + \frac{\pi}{\xi}$, $\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y - \frac{\pi}{\xi})\, e^{-i\xi y}\, dy \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(y) - f(y - \frac{\pi}{\xi}) \right) e^{-i\xi y}\, dy \Rightarrow |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) - f(y - \frac{\pi}{\xi})|\, dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \times$ $\|f - \tau_{\frac{\pi}{\xi}} f\|_1$; sachant que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\|f - \tau_{\frac{\pi}{\xi}} f\|_1 \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$ $\hat{f}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>Rem</u> : (i) Soulignons que, bien que la valeur de la fonction f ne soit connue que presque partout, la valeur de sa transformée de Fourier $\hat{f}$ a un sens en tout point de $\mathbb{R}$.

(ii) Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ qui apparaît dans la définition de la transformée de Fourier $\hat{f}$ est un coefficient de normalisation qui permet une écriture symétrique de la formule de Fourier inverse ; d'autres choix sont possibles, en particulier celui où ce coefficient est omis, autrement dit lorsque la transformée de Fourier est définie via la formule :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

<u>Ex</u> : (i) <u>Fonction caractéristique du segment $[-1, 1]$</u> : Soit p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $-1 \leq x \leq 1$, 0 sinon ; la fonction f appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier vaut : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ si $\xi = 0$,

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ si $\xi \neq 0$; à l'aide de la fonction sinus cardinal définie par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sinc}(\xi) = 1$ si $\xi = 0$, $\frac{\sin(\xi)}{\xi}$ si $\xi \neq 0$, cette expression est égale à : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \operatorname{sinc}(\xi)$.

(ii) <u>Fonction exponentielle décroissante</u> : Soit $\alpha > 0$; considérons la fonction f_α définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$; la fonction f_α appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier vaut : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\xi)x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-(\alpha + i\xi)x}\, dx \Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\alpha - i\xi} + \frac{1}{\alpha + i\xi} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$.

Un exemple important de transformée de Fourier est donné par celle de la fonction gaussienne définie par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2},$$

pour un paramètre $\alpha > 0$. Afin de calculer cette transformée de Fourier, nous commençons par déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss.

<u>Prop</u> : Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$. La fonction gaussienne g appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

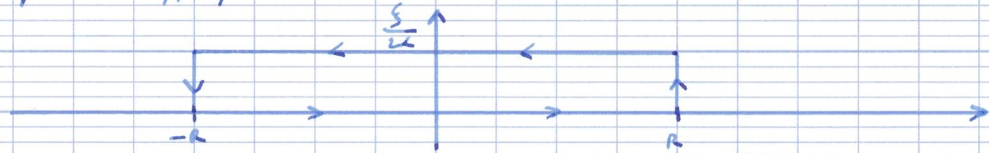
<u>Dém</u> : Considérons la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\, dt$; comme la fonction $(t, x) \mapsto \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1] \times \mathbb{R}$, le théorème de dérivation sous le signe intégral assure que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\, dt \overset{y = tx}{=} -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-y^2}\, dy = -\left(\left[\int_0^x e^{-y^2}\, dy \right]^2 \right)'$ $\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(0) - \left(\int_0^x e^{-y^2}\, dy \right)^2$; sachant que $\varphi(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$, et $|\varphi(x)| \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \right)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = 2\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}$.

<u>Thm</u> : Soit $\alpha > 0$. La fonction gaussienne g_α appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier est égale à :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$$

<u>Dém</u> : (i) Comme g_α est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nous pouvons écrire : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(x + \frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2}\, dx$.

(ii) Sachant que la fonction g_α s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, nous pouvons appliquer le théorème des résidus au contour :



afin d'obtenir : $\int_{-R}^{R} e^{-\alpha\left(x+\frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} dx = \int_{-R}^{R} e^{-\alpha x^2} dx + i\int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R+yi)^2} dy$ $- i\int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha\left(-R+i\left(\frac{\xi}{2\alpha}-y\right)\right)^2} dy$; sachant que $\left| i\int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R+yi)^2} dy \right| \leq \frac{\xi}{2\alpha} e^{\frac{\xi^2}{4\alpha}} e^{-\alpha R^2}$ $\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$, et de même, $\left| i\int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha\left(-R+i\left(\frac{\xi}{2\alpha}-y\right)\right)^2} dy \right| \leq \frac{\xi}{2\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} e^{-\alpha R^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ lorsque $\xi > 0$, nous obtenons à la limite $R \to +\infty$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(x+\frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} dx =$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Rightarrow \hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$.

(iii) La preuve est identique lorsque $\xi < 0$; dans le cas où $\xi = 0$, nous avons directement : $\hat{g}_\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

<u>Rem</u> : À un facteur multiplicatif près, la transformée de Fourier $\hat{g}_\alpha$ de la fonction gaussienne g_α est donc une gaussienne : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} g_{\frac{1}{4\alpha}}(\xi)$.

b. <u>Propriétés élémentaires de la transformation de Fourier</u>

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ définie par :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \mathcal{F}(f) = \hat{f},$$

est une application linéaire continue.

<u>Thm</u> : Soit $\forall f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\ \|_1$ dans l'espace des fonctions continues de limite nulle en $\pm\infty$, $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, muni de la norme uniforme :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

<u>Dém</u> : (i) L'application $\mathcal{F}$ est bien définie de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et par linéarité de l'intégrale, $\mathcal{F}$ est linéaire.

(ii) Soit $f_0 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$; $\forall f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_0) = \mathcal{F}(f - f_0)$ $\Rightarrow \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_0)\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{(f-f_0)}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - f_0\|_1 \xrightarrow[f\to f_0]{} 0$, d'où la continuité de $\mathcal{F}$ en f_0, puis sur $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|} - 3e^{-x^2}$; la fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et par linéarité de la transformation de Fourier : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

La transformation de Fourier satisfait de plus aux propriétés de symétrie suivantes.

Prop: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. La fonction $\bar{f}$ appartient aussi à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elle satisfait :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

En particulier, si la fonction f est à valeurs réelles, alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

Dém: En effet : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} \, dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)}$; lorsque f est réelle, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2|x|}$; la fonction f est à valeurs réelles, et sa transformée de Fourier satisfait : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2+4} = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

Prop: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(i) Posons : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$. La fonction g appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et sa transformée de Fourier est égale à :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}(\xi) = \hat{f}(-\xi).$$

(ii) Si f est paire, respectivement impaire, alors, $\hat{f}$ est paire, respectivement impaire.

(iii) Si f est paire et à valeurs réelles, alors, $\hat{f}$ est paire et à valeurs réelles.

Dém: En effet : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{-i\xi x} \, dx \overset{y=-x}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\xi y} \, dy = \hat{f}(-\xi)$; si f est (im)paire, alors, $f = (-)g \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = -\hat{f}(-\xi) \Rightarrow \hat{f}$ est (im)paire ; si f est paire et réelle, alors : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ et $\hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} = \overline{\hat{f}(\xi)} \Rightarrow \hat{f}$ est paire et réelle.

Ex: Soit p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $-1 \leq x \leq 1$, 0 sinon ; f est réelle et paire, avec : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}(\xi)$; en particulier, $\hat{f}$ est aussi réelle et paire.

Les transformées de Fourier d'une fonction translatée ou d'une fonction dilatée sont données par les formules suivantes.

Prop: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(i) Posons: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \tau_a f(x) = f(x-a)$.

Les fonctions $\tau_a f$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et leurs transformées de Fourier sont égales à:

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$.

(ii) Posons: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \Phi_a f(x) = e^{iax} f(x)$.

Les fonctions $\Phi_a f$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et leurs transformées de Fourier sont égales à:

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\Phi_a f}(\xi) = \tau_a \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$.

(iii) Posons: $\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Lambda_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Les fonctions $\Lambda_\lambda f$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et leurs transformées de Fourier sont égales à:

$\forall \lambda > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\Lambda_\lambda f}(\xi) = \lambda \hat{f}(\lambda \xi)$.

Dém: Nous calculons:

(i) $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\tau_a f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-i\xi x} dx \underset{y=x-a}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i(y+a)\xi} dy = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$.

(ii) $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\Phi_a f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) e^{-i\xi x} dx = \hat{f}(\xi - a)$.

(iii) $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\Lambda_\lambda f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-i\xi x} dx \underset{y=\frac{x}{\lambda}}{=} \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\xi\lambda y} dy = \lambda \hat{f}(\lambda \xi)$.

Ex: Considérons un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, et la fonction caractéristique $f_{a,b}$ de ce segment; la fonction $f_{a,b}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et elle satisfait:

$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}_{a,b}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\xi x} dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}$ si $\xi = 0$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\frac{a+b}{2}\xi} \times \frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi}$, autrement dit: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}_{a,b}(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-i\frac{a+b}{2}\xi} \operatorname{sinc}\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)$.

Rem: Lorsqu'une fonction f est dilatée d'un paramètre $\lambda > 0$, observons que sa transformée de Fourier est dilatée d'un paramètre inverse $\frac{1}{\lambda}$, autrement dit, lorsqu'une fonction f est contractée autour de l'origine, respectivement étalée à l'infini, sa transformée de Fourier est étalée à l'infini, respectivement concentrée autour de l'origine. Cette propriété permet d'expliquer le principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique.

L'une des propriétés les plus utiles de la transformation de Fourier est de transformer l'opération de dérivation en une opération de multiplication.

Thm: Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Alors:

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$.

Dém: Par définition : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f'(x) e^{-i\xi x} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \to +\infty} \left\{ \left[f(x) e^{-i\xi x} \right]_{-R}^{R} + i\xi \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\xi x} dx \right\}$; comme $f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)\,dy \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(y)\,dy$; comme $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, les limites de la fonction f en $\pm\infty$ sont nécessairement égales à $0 \Rightarrow f(\pm R) e^{-i\xi(\pm R)} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; comme $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\xi x} dx \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$, d'où à la limite $R \to +\infty$, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$.

Rem: (i) Par récurrence sur $k \geq 1$, nous vérifions que, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec $(f, \dots, f^{(k)}) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^{k+1}$, alors :

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$.

(ii) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec $(f, \dots, f^{(k)}) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^{k+1}$, nous savons que: $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où : $|\xi|^k \hat{f}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que: $\hat{f}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)$.

Plus une fonction f est régulière, plus sa transformée de Fourier est donc décroissante à l'infini.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$; g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2x\, e^{-x^2}$; comme g et g' sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{g'}(\xi) = \frac{i\xi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

De façon symétrique, lorsqu'une fonction f possède une décroissance algébrique suffisante à l'infini, sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est régulière.

Thm: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Posons :

p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (-ix) f(x)$,

et supposons que la fonction g appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée $\hat{f}'$ est égale à :

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(\xi) = \hat{g}(\xi)$.

Dém: Posons : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $h(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x}$; p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto h(\xi, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)(-ix) e^{-i\xi x}$, tandis que, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h(\xi, x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, avec : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|h(\xi, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |f(x)|$ et $\left|\frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |g(x)|$; comme f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, x)\, dx = \hat{g}(\xi)$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$; comme les fonctions g et $x \mapsto (-ix) g(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, la transformée de Fourier $\hat{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce que nous pouvons vérifier via la formule : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

Rem: (i) Par récurrence sur $k \geq 1$, nous vérifions que, si f appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et si la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall\, 0 \leq l \leq k$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}^{(l)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^l f(x) e^{-i\xi x}\, dx$.

(ii) En particulier, plus une fonction f sera décroissante à l'infini, plus sa transformée de Fourier sera régulière.

II Produit de convolution de fonctions intégrables

Dans la preuve de la formule de Fourier inverse, comme dans celle du théorème de Plancherel, nous ferons appel au produit de convolution de deux fonctions. Étant données des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, cette opération est définie par l'expression :

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Le fait que cette expression soit bien définie n'est pas immédiat, et nous appliquerons le théorème de Fubini pour lui donner un sens, avant d'insister sur la notion d'approximations de l'identité que nous utiliserons pour les preuves de la formule de Fourier inverse et du théorème de Plancherel.

1. Définitions et exemples

a. Rappels sur le théorème de Fubini

Le théorème de Fubini est l'outil fondamental pour la manipulation des intégrales multiples. La preuve repose sur le théorème de Tonelli que nous admettons, et dont voici une version simplifiée dans le cas de l'espace produit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Théorème de Tonelli: Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable.

(i) p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,+\infty]$, et mesurable.
p.p.t. $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,+\infty]$, et mesurable.

(ii) Les fonctions $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ et $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ sont définies presque partout sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,+\infty]$, et mesurables.

(iii) L'égalité suivante est valable dans $[0,+\infty]$:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Dém: La preuve de ce résultat repose sur des propriétés fines de la théorie de la mesure. Il sera ici admis.

Ex: Soit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$; comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est mesurable sur $\mathbb{R}^2$; sachant qu'elle est à valeurs positives, et que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx = +\infty$, elle satisfait : $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx \right) dy = +\infty$.

Le théorème de Fubini s'énonce alors de la façon suivante dans le cas simplifié de l'espace produit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Théorème de Fubini: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(i) p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.
et p.p.t. $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) Les fonctions $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ et $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ sont définies presque partout sur $\mathbb{R}$ et appartiennent à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(iii) L'égalité suivante est valable :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

<u>Dém</u> : (i) Notons $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$; comme $|g| \leq |f|$ et $|h| \leq |f|$, les fonctions g et h sont dans $L^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(ii) Considérons alors les parties positives g_+ et h_+, et négatives g_- et h_- des fonctions g et h, de sorte que $g = g_+ - g_-$ et $h = h_+ - h_-$; comme $|g_+| + |g_-| \leq |g|$ et $|h_+| + |h_-| \leq |h|$, les fonctions g_+, g_-, h_+ et h_- sont dans $L^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(iii) Appliquons le théorème de Tonelli à la fonction g_+ ; comme $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g_+(x,y)\,dx\,dy$ est fini, $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x,y)\,dy\right)dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x,y)\,dx\right)dy < +\infty$ $\Rightarrow$ les fonctions $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x,y)\,dy$ et $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x,y)\,dx$ sont définies presque partout sur $\mathbb{R}$ et appartiennent à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ $\Rightarrow$ p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto g_+(x,y)$ et p.p.t. $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g_+(x,y)$ sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

(iv) Comme (iii) reste valable pour les fonctions g_-, h_+ et h_-, et puisque $f = g_+ - g_- + i(h_+ - h_-)$, les points (i) et (ii) du théorème de Fubini sont vérifiés, et le point (iii) découle des mêmes égalités pour les fonctions g_+, g_-, h_+ et h_-.

<u>Rem</u> : En pratique, appliquer le théorème de Fubini à une fonction f requiert de vérifier qu'elle est dans $L^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, ce qui passe en général par le fait de démontrer que la fonction $|f|$ vérifie les hypothèses de Tonelli, avec ou bien $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\right)dy < +\infty$, ou bien $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\right)dx < +\infty$.

<u>Ex</u> : Soit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{y^2+1}\,e^{-x^2}$; comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$, f et $|f|$ sont mesurables sur $\mathbb{R}^2$, avec : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leq \dfrac{e^{-x^2}}{y^2+1}$; comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-x^2}}{y^2+1}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{y^2+1}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dy}{y^2+1} = \pi$, par le théorème de Tonelli, $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\right)dy = \pi^{\frac{3}{2}} < +\infty \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, d'où par le théorème de Fubini, $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin(xy)\,e^{-x^2}}{y^2+1}\,dx\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin(xy)\,e^{-x^2}}{y^2+1}\,dy\right)dx$.

b. <u>Produit de convolution de deux fonctions intégrables</u>

Considérons deux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. À l'aide du théorème de Fubini, nous pouvons définir rigoureusement leur produit de convolution donné par la formule :

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

Déf: Soit $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$.

(i) p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) Le produit de convolution $f * g$ donné par :

p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$,

est bien définie presque partout sur $\mathbb{R}$, et appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec :

$\| f*g \|_1 \leq \|f\|_1 \ \|g\|_1$.

Dém: Considérons la fonction h définie par : p.p.t. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = f(x-y)\, g(y)$.

Supposons que f et g soient des représentants boréliens des fonctions f et g ; dans ce cas, par produit et composition, la fonction h est borélienne, donc mesurable, d'où la mesurabilité de la fonction $|h|$; comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)|\, dx \right) dy \underset{z = x-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|\, dz \right) |g(y)|\, dy = \|f\|_1 \ \|g\|_1 < +\infty$, par le théorème de Tonelli, $h \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$, auquel cas par le théorème de Fubini, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et la fonction $f*g$ est bien définie presque partout et appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec : $\int_{-\infty}^{+\infty} |f*g(x)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx \right) dy = \|f\|_1 \ \|g\|_1 \Rightarrow \|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \ \|g\|_1$

Ex: Soit $(a,b) \in]0, +\infty[^2$. Considérons les fonctions g_a et g_b définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = e^{-ax^2}$, et $g_b(x) = e^{-bx^2}$.

Les fonctions g_a et g_b sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de sorte que leur produit de convolution $g_a * g_b$ est bien défini presque partout, et appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec :

p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g_a * g_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-y)^2} e^{-by^2}\, dy = e^{-ax^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+b)y^2 + 2axy}\, dy$

$= e^{-ax^2}\, e^{\frac{a^2}{a+b}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+b)\left(y - \frac{a}{a+b}x\right)^2} dy \underset{z = \sqrt{a+b}\left(y - \frac{a}{a+b}x\right)}{=} e^{-\left(a - \frac{a^2}{a+b}\right)x^2} \times \frac{1}{\sqrt{a+b}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz$

$= \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\ e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}$, d'où la formule :

p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g_a * g_b(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\ g_{\frac{ab}{a+b}}(x)$,

qui est en fait valable sur $\mathbb{R}$, compte tenu du fait que les fonctions à gauche et à droite de cette identité sont continues.

Le produit de convolution possède les propriétés élémentaires suivantes.

Prop: (i) Le produit de convolution est une application bilinéaire de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$:

$\forall(\lambda,\mu) \in (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$, $\forall(f_1,f_2,g_1,g_2) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^4$, $(\lambda f_1+g_1) * (\mu f_2 + g_2) = \lambda\mu\, f_1 * f_2 + \lambda f_1 * g_2 + \mu\, g_1 * f_2 + g_1 * g_2$.

(ii) Le produit de convolution est une opération commutative sur $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$:

$\forall(f,g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$, $f*g = g*f$.

Dém : (i) résulte de la linéarité de l'intégrale.

(ii) Par définition du produit de convolution, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ et $y \mapsto g(x-y)\,f(y)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et : $f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy \overset{z=x-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,g(x-z)\,dz = g*f(x)$.

Ex : Soit $\forall a>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = e^{-a x^2}$; d'après la formule précédente, $\forall(a,b) \in \,]0,+\infty[^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a * g_b(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\; g_{\frac{ab}{a+b}}(x) = g_b * g_a(x)$.

La transformation de Fourier transforme le produit de convolution de deux fonctions intégrables en produit (classique) de leurs transformées de Fourier (à un coefficient près).

Thm : Soit $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$. La transformée de Fourier du produit de convolution $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait :

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f*g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$.

Dém : Comme $f*g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\widehat{f*g}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f*g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy \right) e^{-i\xi x}\,dx$; comme f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par le théorème de Tonelli, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)\,g(y)\,e^{-i\xi x}|\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\,dx \right) dy \overset{z=x-y}{=} \|f\|_1\, \|g\|_1 < +\infty$; par le théorème de Fubini, il vient alors : $\widehat{f*g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, e^{-i\xi(x-y)}\,dx \right) e^{-i\xi y}\,dy \overset{z=x-y}{=} \hat{f}(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-i\xi y}\,dy = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$.

Ex : Soit $\forall a>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = e^{-a x^2}$; sachant que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$, et que $\forall(a,b) \in \,]0,+\infty[^2$, $g_a * g_b = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\; g_{\frac{ab}{a+b}}$, nous vérifions que : $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$\widehat{g_a * g_b}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\; \hat{g}_{\frac{ab}{a+b}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \sqrt{\frac{a+b}{2ab}}\; e^{-\frac{a+b}{4ab}\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}}\; e^{-\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\right)\xi^2}$

$= \sqrt{2\pi}\; \hat{g}_a(\xi)\, \hat{g}_b(\xi)$.

Rem : À l'aide de la formule de Fourier inverse, il est possible de montrer (sous des hypothèses à préciser) que la transformée de Fourier d'un produit (classique) de deux fonctions est (à un coefficient près) le produit de convolution de leurs transformées de Fourier.

rier.

c. Extension du produit de convolution aux espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Il est possible d'étendre la définition du produit de convolution à deux fonctions f et g qui appartiennent à des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour la première, et $L^q(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour la seconde, lorsque les exposants p et q satisfont une relation du type

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

avec $r \geq 1$. Le premier exemple d'une telle extension consiste à définir le produit de convolution $f * g$ d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour $p \geq 1$, et d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Thm: Soit $p \geq 1$. Considérons deux fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(i) p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(ii) Le produit de convolution $f * g$ donné par:

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy,$$

est bien défini presque partout sur $\mathbb{R}$, et appartient à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, avec:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p\, \|g\|_1.$$

Dém: (i) Supposons que f et g soient des représentants boréliens des fonctions f et g ; dans ce cas, par produit et composition, la fonction h définie par : p.p.t. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = f(x-y)\, g(y)$ est borélienne, donc mesurable, d'où la mesurabilité de la fonction h.

(ii) Soit $q \geq 1$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec $q \neq +\infty$, puisque nous avons déjà traité le cas où $p = 1$) ; par l'inégalité de Hölder, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|^{\frac{1}{p}}\, |g(y)|^{\frac{1}{q}}\, dy \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^p\, |g(y)|\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy\right)^{\frac{p-1}{p}}$

$\Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy\right)^p \leq \|g\|_1^{p-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^p\, |g(y)|\, dy$; comme $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $|g| \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, le produit de convolution $|f|^p * |g|$ est bien défini presque partout et appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$; en particulier, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy < +\infty$, et : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy\right)^p dx \leq \|g\|_1^{p-1} \times \| |f|^p * |g| \|_1 \leq \|g\|_1^p\, \| |f|^p \|_1 = \|g\|_1^p\, \|f\|_p^p$.

(iii) En particulier, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, avec:

$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right|^p \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right)^p \Rightarrow x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$ appartient à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec : $\| f * g \|_p^p \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right)^p dx \leq \| f \|_p^p \, \| g \|_1^p \Rightarrow \| f * g \|_p \leq \| f \|_p \, \| g \|_1$.

Ex : Soit $\forall a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = e^{-a x^2}$; étant donnés $a > 0$ et $b > 0$, g_a et g_b sont dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, respectivement $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et nous vérifions bien que $g_a * g_b = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \times g_{\frac{ab}{a+b}}$ appartient bien à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Rem : De façon symétrique, le produit de convolution $f * g$ de fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour $p \geq 1$ est bien défini presque partout sur $\mathbb{R}$ et appartient à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. De plus, ce produit de convolution reste commutatif au sens où : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f * g(x) = g * f(x)$.

Il est aussi permis d'étendre la définition du produit de convolution $f * g$ à des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et $g \in L^q(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ lorsque les exposants $p, q \geq 1$ satisfont l'identité : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Thm : Soit $p \geq 1$ et $q \geq 1$ tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Considérons deux fonctions f et g de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, respectivement $L^q(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(i) p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) Le produit de convolution $f * g$ donné par :

p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$

définit une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, qui satisfait :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f * g(x)| \leq \| f \|_p \, \| g \|_q$.

Dém : (i) Supposons que f et g soient des représentants boréliens des fonctions f et g ; dans ce cas, par composition et produit, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ est borélienne, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, tout comme la fonction $y \mapsto |f(x-y)\, g(y)|$.

(ii) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, par l'inégalité d'Young, $|f(x-y)\, g(y)| \leq \frac{1}{p} |f(x-y)|^p + \frac{1}{q} |g(x-y)|^q$; comme $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et $g \in L^q(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par composition, et par l'inégalité précédente, la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(iii) En particulier, le produit de convolution $f * g$ est bien défini sur $\mathbb{R}$ et par l'inégalité d'Hölder : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f * g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \leq$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \overset{z=x-y}{\leq} \|f\|_p\,\|g\|_q \Rightarrow f*g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.$$

(iv) Enfin, par linéarité de l'intégrale : $\forall (x,x_0)\in\mathbb{R}^2$, $|f*g(x)-f*g(x_0)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y) - f(x_0-y)|\,|g(y)|\,dy$, d'où par l'inégalité d'Hölder et le changement de variables $z=x_0-y$, $|f*g(x)-f*g(x_0)| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(z+(x-x_0))-f(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$
$\leq \|\tau_{x_0-x} f - f\|_p\,\|g\|_q \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex : Soit $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=1$ si $|x|\leq 1$, 0 sinon ; la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et appartient à $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Rightarrow f*f$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, avec :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $f*f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,f(y)\,dy = \int_{-1}^{1} f(x-y)\,dy = |[-1,1]\cap[x-1,x+1]|$
$= 2-|x|$ si $|x|\leq 2$, et 0 sinon.

Rem : (i) Lorsque les fonctions f et g sont dans $L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, respectivement $L^q(\mathbb{R},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, leur produit de convolution définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui est donc, en général, plus régulière que les fonctions, seulement mesurables, f et g.

(ii) De façon symétrique, le produit de convolution $f*g$ de fonctions $f\in L^q(\mathbb{R},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $g\in L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour $p,q\geq 1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ est bien défini, continu et borné sur $\mathbb{R}$. De plus, ce produit de convolution demeure commutatif au sens où : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f*g(x)=g*f(x)$.

Les deux extensions précédentes sont des cas particuliers du théorème de Young qui affirme que le produit de convolution $f*g$ est bien défini (au moins presque partout) lorsque la fonction f est dans $L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et la fonction g appartient à $L^q(\mathbb{R},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ avec $p,q\geq 1$ tels que : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1$.

Théorème de Young : Soit $p\geq 1$ et $q\geq 1$ tels que : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1$. Considérons deux fonctions f et g de $L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, respectivement $L^q(\mathbb{R},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(i) Si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors le produit de convolution $f*g$ donné par :
p.p.t. $x\in\mathbb{R}$, $f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy$,
est bien défini sur $\mathbb{R}$, et définit une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, qui satisfait :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $|f*g(x)|\leq \|f\|_p\,\|g\|_q$.

(ii) Si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$, avec $r\geq 1$, alors, le produit de convolution $f*g$ est bien défini presque partout sur $\mathbb{R}$, appartient à $L^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et satisfait :

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

<u>Dém</u> : (i) est exactement l'énoncé du théorème précédent.

(ii) La preuve repose sur l'inégalité intégrale de Minkowski que nous admettons ici :

<u>Inégalité intégrale de Minkowski</u> : Soit $p \geq 1$. Considérons une fonction F mesurable sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs positives. Alors :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,dx\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} dx .$$

Supposons alors que f et g sont des représentants boréliens des fonctions f et g ; dans ce cas, par produit et composition, la fonction h définie par : p.p.t. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = f(x-y)\,g(y)$ est borélienne, donc mesurable sur $\mathbb{R}^2$, d'où la mesurabilité de la fonction $|h|$; soit alors $q' \geq 1$ t.q. $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, auquel cas $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q'}$; p.p.t. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|h(x,y)| \leq |f(x-y)|^{\frac{p}{q'}} \times F(x,y)$, où $F(x,y) = |f(x-y)|^{\frac{p}{r}}\,|g(y)|$, d'où par l'inégalité de Hölder, $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)|\,dy \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \overset{z = x-y}{\leq} \|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)|\,dy\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)^q\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{1}{r}}$; sachant que $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1 - \frac{1}{p} \geq \frac{1}{r}$, de sorte que $\frac{r}{q} \geq 1$, et comme F^q est mesurable sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs positives, par l'inégalité intégrale de Minkowski, $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)^q\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)^r\,dx\right)^{\frac{q}{r}} dy\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^p\,|g(y)|^r\,dx\right)^{\frac{q}{r}} dy\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p^{\frac{p}{r}}\,\|g\|_q \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)|\,dy\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_p\,\|g\|_q$; en particulier, la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)|\,dy$ est bien défini presque partout sur $\mathbb{R}$, et appartient à $L^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ $\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\,dy$ est bien définie presque partout sur $\mathbb{R}$, avec : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f*g(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\,dy\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)|\,dy \Rightarrow f*g$ appartient à $L^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, avec : $\|f*g\|_r \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)|\,dy\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_p\,\|g\|_q$.

<u>Ex</u> : Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, 0 sinon. Comme la fonction f est dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ quel que soit $p \geq 1$, le produit de convolution $f*f$ donné par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f*f(x) = 2 - |x|$ si $|x| \leq 2$, 0 sinon, appartient aussi à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ quel que soit $p \geq 1$.

<u>Dém</u> : Comme pour les énoncés précédents, le produit de convolution $f*g$ demeure commutatif dans le cadre du théorème de Young : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f*g(x) = g*f(x)$.

2. Approximations de l'identité

a. Définition et exemples

Déf: Soit $(\rho_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. La suite $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité (ou une unité approchée) de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ ssi :

(i) $\forall n \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = 1$

(ii) Il existe un nombre $C \geq 0$ tel que :

$\forall n \geq 0, \quad \|\rho_n\|_1 \leq C.$

(iii) Quel que soit le nombre $\delta > 0$,

$\int_{|x|\geq\delta} |\rho_n(x)|\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Ex: Soit $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \rho_n(x) = \frac{n+1}{2} e^{-(n+1)|x|}$. Les fonctions $(\rho_n)_{n\geq 0}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et satisfont :

(i) $\forall n \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx \overset{y=(n+1)x}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = 1.$

(ii) $\forall n \geq 0, \quad \|\rho_n\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = 1.$

(iii) $\forall \delta > 0, \forall n \geq 0, \int_{|x|\geq\delta} |\rho_n(x)|\,dx \overset{y=(n+1)x}{=} \frac{1}{2}\int_{|y|\geq(n+1)\delta} e^{-|y|}\,dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

La suite $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est donc une approximation de l'identité, appelée approximation de Laplace.

Rem: La condition (ii) de la définition précédente est parfois remplacée par la propriété que les fonctions $(\rho_n)_{n\geq 0}$ sont positives. Dans ce cas, la condition (ii) est une conséquence de la condition (i), puisqu'alors :

$\forall n \geq 0, \|\rho_n\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = 1.$

L'exemple précédent appartient à la classe générale suivante d'approximations de l'identité.

Prop: Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que :

$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1.$

Considérons une suite strictement positive $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et posons :

$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \rho_n(x) = \lambda_n \rho(\lambda_n x).$

La suite $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

<u>Dém</u>: Comme ρ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les fonctions ρ_n sont aussi dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec : $\forall n \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx \underset{y=\lambda_n x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1$, et $\|\rho_n\|_1 \underset{y=\lambda_n x}{=} \|\rho\|_1$; enfin, $\forall \delta > 0$, $\int_{|x|\geq\delta} |\rho_n(x)|\,dx \underset{y=\lambda_n x}{=} \int_{|y|\geq\lambda_n\delta} |\rho(y)|\,dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$ $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité.

<u>Ex</u>: Soit $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-(n+1)x^2}$; sachant que la fonction ρ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$ est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1$, et que $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la suite $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité, appelée approximation de Gauss.

b. <u>Théorème de convergence des approximations de l'identité</u>

Le terme d'approximation de l'identité provient du théorème de convergence suivant.

<u>Thm</u>: Soit $p \geq 1$. Considérons une approximation de l'identité $(\rho_n)_{n\geq 0}$ de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Etant donnée une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les fonctions $f * \rho_n$ sont bien définies dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elles satisfont :

$$\|f * \rho_n - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

<u>Dém</u>: (i) Comme f est dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et que les fonctions ρ_n sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les fonctions $f * \rho_n$ sont bien définies dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) $\forall n \geq 0$, $\|f * \rho_n - f\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, \rho_n(y)\,dy - f(x) \right|^p dx$, d'où puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(y)\,dy = 1$, $\|f * \rho_n - f\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-y) - f(x))\, \rho_n(y)\,dy \right|^p dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)|\, |\rho_n(y)|\,dy \right)^p dx$.

(iii) Lorsque $p = 1$, $\|f * \rho_n - f\|_1 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |\rho_n(y)|\,dy \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y|\geq\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |\rho_n(y)|\,dy \right) dx$; par le théorème de Fubini, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y|\geq\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |\rho_n(y)|\,dy \right) dx \underset{z=x-y}{\leq} \int_{|y|\geq\delta} |\rho_n(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|f(x-y)| + |f(x)|)\,dx \right) dy \leq 2\|f\|_1 \int_{|y|\geq\delta} |\rho_n(y)|\,dy$; de même, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |\rho_n(y)|\,dy \right) \leq \int_{|y|\leq\delta} |\rho_n(y)|\, \|\tau_y f - f\|_1\,dy \leq \|\rho_n\|_1 \|\tau_y f - f\|_1$; comme la fonction $y \mapsto \tau_y f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\sup_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_1 \leq \varepsilon$ $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |\rho_n(y)|\,dy \right) dx \leq \varepsilon \|\rho_n\|_1$; comme il existe

$C \geq 0$ tel que $\forall n \geq 0$, $\|\rho_n\|_1 \leq C$, nous concluons que : $\|f * \rho_n - f\|_1 \leq C\varepsilon + 2 \|f\|_1 \int_{|y| \geq \delta} |\rho_n(y)|\, dy$; sachant que $\int_{|y|\geq\delta} |\rho_n(y)|\, dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \geq 0$ t.q. $\forall n \geq N$, $\|f * \rho_n - f\|_1 \leq (C + 2\|f\|_1)\,\varepsilon \Rightarrow \|f*\rho_n - f\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(iv) Lorsque $p > 1$, introduisons le nombre $q > 1$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; comme $\|f * \rho_n - f\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)|\, |\rho_n(y)|^{\frac{1}{p}}\, |\rho_n(y)|^{\frac{1}{q}}\, dy \right)^p dx$, par l'inégalité de Hölder, $\|f * \rho_n - f\|_p^p \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)|^p\, |\rho_n(y)|\, dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\rho_n(y)|\, dy \right)^{\frac{p}{q}} dx = \|\rho_n\|_1^{p-1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|^p |\rho_n(y)|\, dy + \int_{|y|\geq\delta} |f(x-y) - f(x)|^p\, |\rho_n(y)|\, dy \right) dx \right]$; par le théorème de Fubini, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y|\geq\delta} |f(x-y) - f(x)|^p\, |\rho_n(y)|\, dy \right) dx \underset{z = x-y}{\leq} 2^{p-1} \left(\int_{|y|\geq\delta} |\rho_n(y)|\, dy \right) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^p\, dz + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx \right] \leq 2^p \|f\|_p^p \int_{|y|\geq\delta} |\rho_n(y)|\, dy$; de même, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|^p |\rho_n(y)|\, dy \right) dx \leq \int_{|y|\leq\delta} |\rho_n(y)|\, \|\tau_y f - f\|_p^p\, dy \leq C \|\tau_y f - f\|_p^p$; comme la fonction $y \mapsto \tau_y f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. $\sup_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p \leq \varepsilon^p \Rightarrow \|f * \rho_n - f\|_p^p \leq C\varepsilon^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y|\geq\delta} |\rho_n(y)|\, dy$; sachant que $\int_{|y|\geq\delta} |\rho_n(y)|\, dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \geq 0$ t.q. $\forall n \geq N$, $\|f * \rho_n - f\|_p^p \leq (C + 2^p \|f\|_p^p)\,\varepsilon^p \Rightarrow \|f * \rho_n - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

__Ex:__ Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho(x) = \frac{1}{2}$ si $|x| \leq 1$, 0 sinon ; comme $\rho \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et satisfait $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx = 1$, les fonctions ρ_n définies par : $\forall n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = \rho((n+1)x)\,(n+1)$ forment une approximation de l'identité ; en particulier, quel que soit $p \geq 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\|f * \rho_n - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui équivaut à : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{n+1}{2} \int_{x - \frac{1}{n+1}}^{x + \frac{1}{n+1}} f(y)\, dy - f(x) \right|^p dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

__Rem:__ (i) La suite $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité au sens où les convolutions $f * \rho_n$ convergent vers la fonction f dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ lorsque $n \to \infty$. Dans cette limite, convoler avec les fonctions ρ_n approche donc l'application identité.

(ii) Le théorème de convergence des approximations de l'identité s'étend à l'espace des fonctions continues de limite nulle en $\pm\infty$; si $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$, alors, les fonctions $f * \rho_n$ sont bien définies, continues et de limite nulle, et elles satisfont :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f * \rho_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c. Densité des fonctions régulières à support compact dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

Le théorème de convergence des approximations de l'identité permet d'établir la densité du sous-espace des fonctions régulières à support compact dans les espaces $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour $p \geq 1$.

<u>Déf</u>: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou régulière) à support compact sur $\mathbb{R}$ ssi :

(i) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Il existe un nombre $R > 0$ tel que :

$\forall x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$, $f(x) = 0$.

<u>Ex</u>: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $|x| < 1$, 0 sinon ; la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, et $]1, +\infty[$; par récurrence sur $n \geq 0$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\forall x \in]-1, 1[$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} \Rightarrow$ $f^{(n)}(x) \underset{x \to \pm 1}{\to} 0 \Rightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et par définition, à support compact.

<u>Rem</u>: Quel que soit $p \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. En pratique, lorsqu'une fonction de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ admet un représentant dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, il est en effet naturel de l'identifier à ce représentant.

Il est possible de construire des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante.

<u>Lem</u>: Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, le produit de convolution $f * \rho$ est bien défini, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur $\mathbb{R}$.

<u>Dém</u>: Comme f et ρ sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, le produit de convolution $f * \rho$ est bien défini, continue et bornée sur $\mathbb{R}$; soit alors $R \geq 0$ et $R' \geq 0$ t.q. $\forall |x| > R$, $f(x) = 0$ et $\forall |x| > R'$, $\rho(x) = 0$; si $|x| > R + R'$, alors $\forall |y| \leq R'$, $|x - y| \geq |x| - |y| > R \Rightarrow f * \rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,\rho(y)\,dy = \int_{-R'}^{R'} f(x-y)\,\rho(y)$ [illegible] dy

$= 0$ puisque $\forall\, |x-y| > R$, $f(x-y) = 0 \Rightarrow f$ est à support compact dans $\mathbb{R}$; par le changement de variable $z = x-y$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f * \rho(x) = \int_{-R}^{R} f(z)\, \rho(x-z)\, dz$, puisque $\forall\, |z| > R$, $f(z) = 0$; soit alors $\forall (x,z) \in \mathbb{R} \times [-R,R]$, $h(x,z) = f(z)\rho(x-z)$; quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $z \mapsto h(x,z)$ est continue, donc mesurable sur $[-R,R]$; quel que soit $z \in [-R,R]$, $x \mapsto h(x,z)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall k \geq 0$, $\forall (x,z) \in \mathbb{R} \times [-R,R]$, $\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,z) \right| = |f(z)\, \rho^{(k)}(x-z)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\rho^{(k)}(t)| \times |f(z)|$; comme f est intégrable sur $[-R,R]$, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $f * \rho$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall k \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $[f * \rho]^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, \rho^{(k)}(x-z)\, dz$.

Ex : Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$, 0 sinon, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $|x| \leq 1$, 0 sinon ; comme f est continue à support compact sur $\mathbb{R}$, et ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$, l'application $f * \rho$ donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f * \rho(x) = \int_{-1}^{1} (1 - |x-y|)\, e^{\frac{1}{y^2-1}}\, dy$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$, et à support compact sur $\mathbb{R}$.

Thm : Soit $p \geq 1$. Le sous-espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est dense dans l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour la norme $\| \ \|_p$. Autrement dit, quelle que soit la fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Dém : (i) Soit $\varepsilon > 0$. Vérifions qu'il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ t.q. $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$; par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ t.q. $\|g - g_\varepsilon\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(ii) Soit alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho(x) = \frac{1}{I} e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $|x| < 1$, 0 sinon, où : $I = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x^2-1}} dx$; la fonction ρ est bien définie, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$, avec : $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx = \frac{1}{I} \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x^2-1}} dx = 1$; si nous posons $\forall n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = (n+1)\, \rho((n+1)x)$, alors la suite $(\rho_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité, de sorte que par le théorème de convergence des approximations de l'identité, $\|g_\varepsilon * \rho_n - g_\varepsilon\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$; soit alors $n_\varepsilon \geq 0$ t.q. $\|g_\varepsilon * \rho_{n_\varepsilon} - g_\varepsilon\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$; par le lemme précédent, la fonction $f_\varepsilon = g_\varepsilon * \rho_{n_\varepsilon}$ appartient au sous-espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elle satisfait : $\|f_\varepsilon - f\|_p \leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - f\|_p \leq \varepsilon$, d'où la densité du sous-espace $\mathcal{E}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Rem: (i) Ce résultat demeure vrai dans un ouvert Ω (non vide) de $\mathbb{R}$: le sous-espace $\mathcal{E}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ reste dense dans l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour la norme $\| \ \|_p$ quel que soit $p \geq 1$.

(ii) Par contre, le sous-espace $\mathcal{E}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ n'est pas dense dans l'espace de Lebesgue $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ pour sa norme canonique $\| \ \|_\infty$ (dont nous ne traiterons pas dans la suite). L'adhérence de $\mathcal{E}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans cet espace est en effet l'ensemble $\mathcal{E}_0^\circ(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ des fonctions continues de limites nulles en $+\infty$ et en $-\infty$.

III Formule de Fourier inverse et théorème de Plancherel

1. Formule de Fourier inverse et applications

Comme le théorème de Dirichlet dans le cas des séries de Fourier, la formule de Fourier inverse permet de reconstruire une fonction f de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ à partir de sa transformée de Fourier $\hat{f}$. La preuve repose sur la formule d'échange suivante.

Formule d'échange: Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^2$. Les transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$ satisfont :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\,g(x)\,dx.$$

Dém: (i) Comme les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, il existe un nombre $K \geq 0$ t.q. p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)\,\hat{g}(x)| \leq K\,|f(x)|$, et $|\hat{f}(x)\,g(x)| \leq K\,|g(x)|$; comme f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, les fonctions $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ sont aussi dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\,g(x)\,dx$ sont bien définies.

(ii) Soit alors p.p.t. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = f(x)\,g(y)\,\frac{e^{-iyx}}{\sqrt{2\pi}}$; la fonction h est mesurable sur $\mathbb{R}^2$, et elle satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)|\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|g(y)|\,dy \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$, d'où par le théorème de Fubini : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,e^{-ixy}\,dy \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx\right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, \hat{f}(y)\, dy.$$

Ex: Soit $\alpha > 0$. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$, et rappelons que : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}}{\sqrt{2\alpha}}$.

Par la formule d'échange, nous avons alors : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\, e^{-\alpha x^2} dx$.

Nous utilisons l'exemple précédent pour démontrer la formule de Fourier inverse.

Formule de Fourier inverse : Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Alors :

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Dém : (i) Soit $n \geq 0$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons : $\forall y \in \mathbb{R}$, $g_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}}$; la fonction g_n est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et elle satisfait : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} e^{i(x-\xi)y} dy = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-(n+1)(\xi - x)^2}$, d'où par la formule d'échange : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-(n+1)(x-\xi)^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy} \times e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} dy$.

(ii) Rappelons que les fonctions $(\rho_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-(n+1)x^2}$ forment une approximation de l'identité, de sorte que : $\|f * \rho_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; par le corollaire du théorème de Riesz - Fischer, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{\frac{\varphi(n)+1}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-(\varphi(n)+1)(x-\xi)^2} d\xi = \rho_{\varphi(n)} * f(x) = f * \rho_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

(iii) Comme $\forall y \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(y)\, e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(y)\, e^{ixy}$, et $\forall n \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(y)\, e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\hat{f}(y)|$, avec $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par le théorème de convergence dominée, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} dy \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy} dy$, d'où à la limite $n \to +\infty$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \times e^{ixy} dy$.

Ex : Soit $\alpha > 0$; considérons la fonction f_α définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$, et rappelons que : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$; comme les fonctions f_α et $\hat{f}_\alpha$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par la formule d'inversion de Fourier, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $e^{-\alpha|x|} = f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_\alpha(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi$.

Rem : Lorsque la fonction $\hat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, sa transformée de Fourier $\hat{\hat{f}}$ est bien définie par la formule : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-i\xi x} d\xi$; cette fonction est de plus continue sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$. Nous drirons que la formule de Fourier inverse s'écrit alors sous la forme : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$, ce qui conduit au corollaire suivant.

Cor: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. La fonction f possède un représentant continu sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$, qui satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Dém: Le corollaire résulte de la formule de Fourier inverse, et de la remarque précédente.

Ex: Soit $\alpha > 0$; considérons la fonction f_α définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$, et rappelons que : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\alpha}{\alpha^2+\xi^2}$; comme les fonctions f_α et $\hat{f}_\alpha$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, par le corollaire précédent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-\alpha|x|} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\alpha^2+\xi^2}\, d\xi$.

Rem: Il existe des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telles que la transformation de Fourier $\hat{f}$ n'appartienne pas à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Dans ce cas, la formule d'inversion de Fourier ne s'applique pas.

Ex: Soit p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $|x| < 1$, 0 sinon ; rappelons que : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \operatorname{sinc}(\xi)$, et vérifions que la fonction $\hat{f}$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; dans le cas contraire, le corollaire précédent assure que la fonction f admet un représentant continu, ce qui est absurde ; en particulier, la fonction $\hat{f}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et la formule de Fourier inverse ne s'applique pas à la fonction f.

Lorsque la formule de Fourier inverse s'applique, la fonction considérée est égale (à une symétrie près) à la transformée de Fourier de sa transformée de Fourier. Lorsque la transformée de Fourier est explicite, la formule de Fourier inverse permet donc de calculer sa transformée de Fourier : il s'agit donc d'un outil très utile pour calculer la valeur de certaines transformées de Fourier.

Ex: (i) Soit $\alpha > 0$; considérons la fonction h_α définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$; la fonction h_α est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et elle satisfait : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\times \hat{f}_\alpha(x)$, où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$; par la formule de Fourier inverse, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{h}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \hat{\hat{f}}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ f_\alpha(-\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-\alpha|\xi|}$.

(ii) Soit $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telles que $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; par le corollaire précédent, la fonction g admet un représentant continu, de limite nulle en $\pm\infty$, ce qui assure l'existence d'un nombre $K \geq 0$ tel que : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq K \Rightarrow |f(x) g(x)| \leq K |f(x)|$; comme $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, la fonction fg est aussi dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) e^{-i\xi x}\, dx$; comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi$ par la formule de Fourier inverse, $\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y) e^{iyx}\, dy\right) e^{-i\xi x}\, dx$; sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) \hat{g}(y) e^{iyx} e^{-i\xi x}|\, dx\, dy = \|f\|_2 \|\hat{g}\|_2 < +\infty$, par le théorème de Fubini, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\xi - y)x}\, dx\right) dy$, d'où la formule : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi - y)\, \hat{g}(y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \hat{f} * \hat{g}(\xi)$.

La formule de Fourier inverse permet aussi de démontrer l'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Thm : Soit $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^2$. Si les transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont égales, alors : $f = g$ (p.p.).

Dém : Soit $h = f - g$; la fonction h est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, avec : $\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} = 0$; comme $0 \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, par la formule de Fourier inverse, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \times e^{ix\xi}\, d\xi = 0 \Rightarrow h = 0$ p.p. $\Rightarrow f = g$ p.p.

Ex : Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que la transformée de Fourier est nulle ; la fonction f est alors nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

Rem : (i) Soit $E = \{f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ t.q. $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})\}$. Par la formule de Fourier inverse, la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme linéaire de E sur E, dont la bijection réciproque est donnée par la formule :

$$\forall f \in E,\ \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \hat{f}(-x).$$

Cet énoncé est néanmoins limité au sens où, par le corollaire précédent, toute fonction $f \in E$ admet un représentant continu de limite nulle en $\pm\infty$, de sorte que E est un sous-espace strict de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Le théorème de Plancherel dont la preuve suit introduit un cadre fonctionnel, celui de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, dans lequel la transformation de Fourier est un isomorphisme linéaire, de plus isométrique.

(ii) Il est possible de montrer que la transformation de Fourier n'est par contre pas surjective, donc pas bijective, de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans l'espace $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des fonctions continues de limites nulles en $\pm\infty$.

2. Théorème de Plancherel

Avant d'étendre la transformation de Fourier à l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, rappelons que cet espace est un espace de Hilbert pour le produit scalaire réel ou complexe :

$$\forall (f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \ \langle f, g \rangle_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx,$$

et que la norme euclidienne ou hermitienne associée est donnée par l'expression :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \ \|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A l'aide de la formule de Fourier inverse, nous pouvons évaluer le produit scalaire $\langle f, g \rangle_2$ de deux fonctions $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ telles que $(\hat{f}, \hat{g}) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ en fonction du produit scalaire $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2$.

Prop: Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ telles que $(\hat{f}, \hat{g}) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$. Les fonctions f, g, $\hat{f}$ et $\hat{g}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elles satisfont :

$$\langle f, g \rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2.$$

En particulier :

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Dém: (i) Comme f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, la formule de Fourier inverse assure que ces fonctions sont continues de limite nulle en $\pm\infty$, donc sont bornées; en particulier, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx \le \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \times \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx \le \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{f}(x)| \times \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)| \, dx \Rightarrow (f, \hat{f}) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$, et de même, $(g, \hat{g}) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$.

(ii) Par la formule de Fourier inverse, $\langle f, g \rangle_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi)}\, e^{-i\xi x}\, d\xi\right) dx$; comme $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\, e^{-i\xi x}|\, d\xi\, dx$ $= \|f\|_1 \|\hat{g}\|_1 < +\infty$, par le théorème de Fubini, $\langle f, g\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx\right) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_2$.

(iii) Pour $g = f$, $\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{f}\rangle_2 = \|\hat{f}\|_2^2 \Rightarrow \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Ce résultat demeure vrai lorsque les fonctions f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, sans hypothèse supplémentaire sur les transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$.

__Cor:__ Soit $(f, g) \in [L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})]^2$. Les transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elles satisfont :

$\langle f, g\rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_2$.

En particulier :

$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

__Dém:__ (i) Considérons l'approximation de l'identité $(\rho_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-(n+1)x^2}$, et rappelons que : $\forall n \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\rho}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{\xi^2}{4(n+1)}}$; comme f est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et comme les fonctions ρ_n sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, les fonctions $f * \rho_n$ sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elles satisfont :

$\|f * \rho_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où par continuité de la norme $\|\ \|_2$,

$\|f * \rho_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_2$.

(ii) De plus, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f * \rho_n}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{\rho}_n(\xi)\, \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4(n+1)}}$; comme $\hat{f}$ est continue de limite nulle en $\pm\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$, de sorte que les fonctions $\widehat{f * \rho_n}$ sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; en particulier, par la proposition précédente : $\|f * \rho_n\|_2^2 = \|\sqrt{2\pi}\, \hat{f}\, \hat{\rho}_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, e^{-\frac{\xi^2}{2(n+1)}}\, d\xi$.

(iii) Par le lemme de Fatou, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\lim}_{n\to+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, e^{-\frac{\xi^2}{2(n+1)}}\, d\xi$ $\leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, e^{-\frac{\xi^2}{2(n+1)}}\, d\xi = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \|f * \rho_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 < +\infty$, ce qui assure que la transformée de Fourier $\hat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(iv) Comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(\xi)|^2\, e^{-\frac{\xi^2}{2(n+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\hat{f}(\xi)|^2$, et $\forall n \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\left||\hat{f}(\xi)|^2 \times e^{-\frac{\xi^2}{2(n+1)}}\right| \leq |\hat{f}(\xi)|^2$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi < +\infty$, par le théorème de convergence dominée, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-\frac{\xi^2}{2(n+1)}} d\xi \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2$, d'où à la limite $n \to +\infty$, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

(v) Lorsque $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et de même, $\|f \pm (i) g\|_2^2 = \|\hat{f} \pm i \hat{g}\|_2^2$, d'où par la formule de polarisation, $\langle f, g\rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_2$.

Ex: Soit $\alpha > 0$; posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$; les fonctions g_α sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elles satisfont : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$; en particulier, nous vérifions que : $\|g_\alpha\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha x^2} dx \underset{y=\sqrt{2\alpha}x}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$, et $\|\hat{g}_\alpha\|_2^2 = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\alpha}} d\xi \underset{y=\frac{\xi}{\sqrt{2\alpha}}}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$, d'où l'égalité : $\|g_\alpha\|_2 = \|\hat{g}_\alpha\|_2$.

Comme les fonctions continues à support compact appartiennent à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, le sous-espace $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et nous pouvons combiner cette propriété au corollaire précédent afin d'étendre la transformation de Fourier à tout l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Théorème de Plancherel: Il existe une unique application linéaire continue $\mathcal{F}$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que :

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

L'application $\mathcal{F}$ est appelée transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et :

(i) Elle réalise une isométrie de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, c'est-à-dire que :

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

(ii) Elle réalise un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, d'inverse égal à :

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$.

En particulier,

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x)$.

Dém : (i) Construction de l'application $\mathcal{F}$.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Comme les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et appartiennent à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; par le corollaire précédent, $\forall m, n \geq 0$, $\|\hat{f}_m - \hat{f}_n\|_2 = \|f_m - f_n\|_2 \Rightarrow (\hat{f}_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \Rightarrow \exists f_\infty \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ t.q. $\|\hat{f}_n - f_\infty\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; si $(\tilde{f}_n)_{n\geq 0}$ est une autre suite de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que $\|\tilde{f}_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors, la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \geq 0$, $g_{2n} = f_n$, et $\forall n \geq 0$, $g_{2n+1} = \tilde{f}_n$ vérifie encore $\|g_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \exists g_\infty \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ t.q. $\|\hat{g}_n - g_\infty\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\Rightarrow \|\hat{f}_n - g_\infty\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\|\hat{\tilde{f}}_n - g_\infty\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; par unicité de la limite, $f_\infty = g_\infty \Rightarrow \|\hat{\tilde{f}}_n - f_\infty\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui assure que la fonction f_∞ ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$, mais seulement de sa limite f ; posons donc : $\mathcal{F}(f) = f_\infty$; l'application $\mathcal{F}$ est alors bien définie de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et par continuité de la norme $\| \ \|_2$, elle satisfait : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$; cette égalité est en effet vraie sur $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et donc par passage à la limite sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; par passage à la limite également, l'application $\mathcal{F}$ demeure aussi linéaire sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, d'où : $\forall (f, f_0) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^2$, $\|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_0)\|_2 = \|\mathcal{F}(f - f_0)\|_2 = \|f - f_0\|_2 \longrightarrow 0$ lorsque $\|f - f_0\|_2 \to 0$; en conclusion, l'application $\mathcal{F}$ est aussi continue sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; comme $\forall f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, nous en déduisons l'existence d'une application $\mathcal{F}$ linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, qui satisfait cette propriété, et s'avère de plus isométrique.

(ii) <u>Unicité de l'application $\mathcal{F}$</u>

Supposons que $\tilde{\mathcal{F}}$ satisfasse les propriétés précédentes de $\mathcal{F}$, et considérons une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que : $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; comme $\forall n \geq 0$, $\tilde{\mathcal{F}}(f_n) = \hat{f}_n = \mathcal{F}(f_n)$, par continuité de $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(f)$, ce qui assure l'unicité de l'application $\mathcal{F}$.

(iii) <u>Propriétés de l'application $\mathcal{F}$</u>

Nous avons déjà établi que l'application $\mathcal{F}$ est linéaire, continue et isométrique de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; en particulier, l'application $\mathcal{G}$ définie par : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$ est bien définie, linéaire et isométrique, donc continue sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; considérons alors l'approximation de l'identité $(\rho_n)_{n\geq 0}$ définie par: $\forall n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-(n+1)x^2}$; étant donnée une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, les fonctions $f * \rho_n$ sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et comme dans la preuve du corollaire précédent, leurs transformées de Fourier sont aussi dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; par la formule de Fourier inverse, elles satisfont: $\forall n \geq 0$, $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f * \rho_n)) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f * \rho_n)) = f * \rho_n$; par continuité des applications $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et sachant que $\|f * \rho_n - f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, à la limite $n \to +\infty$, $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f)) = f$; comme $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, à nouveau par continuité des applications $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f)) = f \Rightarrow$ $\mathcal{F}$ est un isomorphisme linéaire de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ d'inverse égal à: $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{G}$.

Lorsque la fonction f appartient à l'intersection $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, la valeur de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ (au sens de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$) est donnée par la formule:

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

Cette formule n'a en général plus de sens lorsque la fonction f est seulement dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ (sans être dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$). Néanmoins il est possible de calculer la valeur de $\mathcal{F}(f)$ grâce à l'énoncé suivant.

Cor: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Posons:

$$\forall n \geq 0, \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

Les fonctions $\hat{f}_n$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$, et elles satisfont:

$$\|\hat{f}_n - \mathcal{F}(f)\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, si

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}_n(\xi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_\infty(\xi),$$

alors:

p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = f_\infty(\xi)$.

<u>Dém</u>: (i) Soit $\forall n \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x)$ si $|x| < n$, 0 sinon ; comme $\forall n \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = \int_{-n}^{n} |f(x)|\, dx \leq \sqrt{2n}\, \|f\|_2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les fonctions f_n appartiennent à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et les fonctions $\hat{f}_n$ sont donc bien définies, continues et de limite nulle en $\pm\infty$.

(ii) Comme $\|f_n - f\|_2^2 = \int_{|x| \geq n} |f(x)|^2\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, par continuité de l'application $\mathcal{F}$, $\|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f)\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$; sachant que les fonctions f_n sont dans $L^1(\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\forall n \geq 0$, $\mathcal{F}(f_n) = \hat{f}_n \Rightarrow \|\hat{f}_n - \mathcal{F}(f)\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(iii) En particulier, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ telle que $\hat{f}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathcal{F}(f)$ presque partout, d'où l'égalité p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = f_\infty(\xi)$ lorsque $\hat{f}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f_\infty$ presque partout.

<u>Ex</u>: (i) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{sinc}(x)$; la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait : $\forall |x| \geq 1$, $|f(x)|^2 \leq \frac{2}{\pi x^2}$; comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, la fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(ii) De plus, $\forall n \geq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^n f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx + \int_{-n}^{0} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \right]$; comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \underset{y = -x}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^n f(x) \left(e^{-i\xi x} + e^{i\xi x}\right) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n f(x) \cos(\xi x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^n \sin(x) \cos(\xi x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi} \int_0^n \left[\sin((\xi + 1)x) + \sin((1 - \xi)x)\right] \frac{dx}{x}$; rappelons alors que : $\forall \lambda > 0$, $\frac{1}{\pi} \int_0^n \sin(\lambda x) \frac{dx}{x} \underset{y = \lambda x}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda n} \sin(y) \frac{dy}{y} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(y) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}$, tandis que : $\forall \lambda < 0$, $\frac{1}{\pi} \int_0^n \sin(\lambda x) \frac{dx}{x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{\pi} \int_0^n \sin(0x) \frac{dx}{x} = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, d'où : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^n f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ si $|\xi| < 1$, $\frac{1}{2}$ si $|\xi| = 1$, et 0 sinon ; par le corollaire précédent, p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = g(\xi)$, où $g(\xi) = 1$ si $|\xi| < 1$, $\frac{1}{2}$ si $|\xi| = 1$, et 0 si $|\xi| > 1$; comme $\mathcal{F}(f)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, nous déduisons de ce calcul que la fonction f n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(iii) Afin de déterminer la transformée de Fourier de la fonction f, nous pouvons aussi utiliser le fait que la fonction g appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et satisfait : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = f(\xi)$; en particulier, $\mathcal{F}(g) = \hat{g} = f$, d'où par bijectivité de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}(f) = g$; comme $\forall h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}^{-1}(h)(\xi) = \mathcal{F}(h)(-\xi)$, p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = g(-\xi) = g(\xi)$.

<u>Rem</u>: Soit $1 < p < 2$; la théorie de l'interpolation linéaire, à proprement parler le théorème de

Riesz-Thorin, permet d'étendre la définition de la transformation de Fourier aux espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; plus précisément, si p' désigne l'exposant conjugué de p donné par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est bien définie sur $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, à valeurs dans $L^{p'}(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elle satisfait l'inégalité de Hausdorff-Young:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

Nous concluons ce chapitre par le fait que les principales propriétés de la transformation de Fourier s'étendent, sans ou avec peu de modifications, de l'intersection $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ à l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

<u>Prop</u>: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(i) La fonction $\overline{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elle satisfait:

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(\overline{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}$$

(ii) Posons: p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$. La fonction g appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elle satisfait:

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi).$$

(iii) En particulier, si f est paire, respectivement impaire sur $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}(f)$ est paire, respectivement impaire sur $\mathbb{R}$; de plus, si f est paire et réelle, alors $\mathcal{F}(f)$ est paire et réelle.

<u>Dém</u>: Les formules de (i) et (ii) sont vérifiées lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et demeurent vraies dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ par un argument de densité.

<u>Ex</u>: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}(x)$; la fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et comme elle est paire et réelle, sa transformée de Fourier est également paire et réelle, ce que nous pouvons vérifier via la formule: p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = 1$ si $|\xi| < 1$, 0 si $|\xi| > 1$.

<u>Prop</u>: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(i) Soit $a \in \mathbb{R}$; posons: p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\tau_a f(x) = f(x-a)$.

Les fonctions $\tau_a f$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et satisfont:

p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$.

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$; posons : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\Phi_a f(x) = e^{iax} f(x)$.

Les fonctions $\Phi_a f$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et satisfont :

p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\Phi_a f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi - a)$.

(iii) Soit $\lambda > 0$; posons : p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $\Lambda_\lambda f(x) = f(\frac{x}{\lambda})$.

Les fonctions $\Lambda_\lambda f$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et satisfont :

p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\Lambda_\lambda f)(\xi) = \lambda \mathcal{F}(f)(\lambda \xi)$.

<u>Dém.</u>: (i) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ telle que $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; comme p.p.t $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f_n)(\xi) = \widehat{\tau_a f_n}(\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}_n(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}(f_n)(\xi)$, et $\|\tau_a f_n - \tau_a f\|_2 = \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par continuité de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$.

(ii) et (iii) Les formules découlent de même d'un argument de densité.

<u>Ex.</u>: Considérons un segment $[a, b]$ (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$, et posons : p.p.t $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{a+b}{2}x} \operatorname{sinc}(\frac{b-a}{2}x)$; la fonction g appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et elle satisfait : p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g)(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\Phi_{\frac{a+b}{2}} \Lambda_{\frac{2}{b-a}} f)(\xi)$, où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sinc}(x)$; par les formules précédentes, p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g)(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2}{b-a} \mathcal{F}(f)\left(\frac{2}{b-a}(\xi - \frac{a+b}{2})\right)$; comme p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ si $|\xi| < 1$, 0 si $|\xi| > 1$, p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g)(\xi) = 1$ si $a < \xi < b$, 0 sinon.

Nous terminons par les exemples du produit et du produit de convolution.

<u>Thm.</u>: (i) Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. La fonction $f * g$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elle satisfait :

p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\xi)\,\mathcal{F}(g)(\xi)$.

(ii) Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^2$. La fonction $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elle satisfait :

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g(-\xi)$.

(iii) Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^2$. La fonction fg appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et elle satisfait :

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)(\xi)$.

Dém : (i) Comme $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $f * g$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$; considérons alors une suite $(g_n)_{n \geq 0}$ de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que $\| g_n - g \|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; comme $\forall n \geq 0$, $\| f * g_n - f * g \|_2 = \| f * (g_n - g) \|_2 \leq \| f \|_1 \| g_n - g \|_2$, $\| f * g_n - f * g \|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \| \mathcal{F}(f * g_n) - \mathcal{F}(f * g) \|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; sachant que $f * g_n$ est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\mathcal{F}(f * g_n) = \widehat{f * g_n} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}\, \hat{g}_n$; comme $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence de $M \geq 0$ tel que : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(\xi)| \leq M \Rightarrow \| \hat{f}\, \hat{g}_n - \hat{f}\, \mathcal{F}(g) \|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, |\hat{g}_n(\xi) - \mathcal{F}(g)(\xi)|^2 \, d\xi \leq M^2 \| \hat{g}_n - \mathcal{F}(g) \|_2^2$; en particulier, par le théorème de Plancherel, $\| \hat{f}\, \hat{g}_n - \hat{f}\, \mathcal{F}(g) \|_2 \leq M \| g_n - g \|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où à la limite $n \to +\infty$, $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}\, \mathcal{F}(g)$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, soit presque partout sur $\mathbb{R}$.

(ii) Par le théorème de Plancherel, comme $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$, $(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$; considérons alors deux suites $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(g_n)_{n \geq 0}$ de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telles que $\| f_n - f \|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\| g_n - g \|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; comme $(f_n, g_n) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$, $\mathcal{F}(f_n)$ et $\mathcal{F}(g_n)$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathcal{F}(f_n)\, \mathcal{F}(g_n) = \hat{f}_n\, \hat{g}_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\left[\mathcal{F}(f_n)\, \mathcal{F}(g_n)\right]^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n(x)\, \hat{g}_n(x)\, e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\tau_\xi f_n}(x) \times \overline{\widehat{\overline{g_n(-\cdot)}}}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \widehat{\tau_\xi f_n}, \widehat{\overline{g_n(-\cdot)}} \rangle_2$; comme f_n et g_n sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\left[\mathcal{F}(f_n)\, \mathcal{F}(g_n)\right]^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \tau_\xi f_n, \overline{g_n(-\cdot)} \rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_n * g_n(-\xi)$; sachant que $\| \mathcal{F}(f_n)\, \mathcal{F}(g_n) - \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g) \|_1 \leq \| \mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f) \|_2 \| \mathcal{F}(g_n) \|_2 + \| \mathcal{F}(f) \|_2 \| \mathcal{F}(g_n) - \mathcal{F}(g) \|_2 = \| f_n - f \|_2 \| g_n \|_2 + \| f \|_2 \times \| g_n - g \|_2$ par la formule de Plancherel, $\| \mathcal{F}(f_n)\, \mathcal{F}(g_n) - \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g) \|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où par continuité de la transformée de Fourier, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \left[\mathcal{F}(f_n)\, \mathcal{F}(g_n)\right]^{\wedge}(\xi) - \left[\mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)\right]^{\wedge}(\xi) \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $| f_n * g_n(-\xi) - f * g(-\xi) | \leq \| f_n - f \|_2 \| g_n \|_2 + \| f \|_2 \| g_n - g \|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, à la limite $n \to +\infty$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\left[\mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)\right]^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g(-\xi)$.

(iii) Comme $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$, $\mathcal{F}^{-1}(f)$ et $\mathcal{F}^{-1}(g)$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, d'où par (ii) $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) * \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g))(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-\cdot) * g(-\cdot)(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g(\xi)$.

Rem : La formule de la transformation de Fourier d'une dérivée s'étend de façon similaire au cadre de l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ sous des hypothèses adéquates, mais dans un sens, celui des dérivées dites faibles qui dépasse les notions introduites dans ce chapitre.