GRAVEJAT Philippe

Master 1

9 / 2 / 26

Traitement du signal discret

Introduction

Lors de ces dernières décennies, le traitement du signal discret s'est considérablement développé en parallèle des progrès des performances des outils informatiques et de l'augmentation de leurs capacités. Dans de nombreuses applications pratiques, le signal initialement analogique n'est plus directement traité sous cette forme, mais une fois transformé sous forme numérique, typiquement après échantillonnage et quantification. Dans ce chapitre, nous ne chercherons pas à proposer un panorama général des processus propres au traitement du signal discret et de leurs utilisations, mais nous nous focaliserons sur plusieurs concepts et outils mathématiques en lien avec l'analyse de Fourier.

Dans le cadre de l'analyse des signaux finis, nous nous intéresserons d'abord à la transformation de Fourier discrète. Après avoir défini cette transformation et détaillé ses principales propriétés mathématiques, similaires à celles de la transformation de Fourier usuelle, nous décrirons l'algorithme de la transformation de Fourier rapide, introduit par James Cooley et John Tukey, dont la complexité réduite permet le calcul très avantageux, non seulement de la transformée de Fourier discrète, mais également d'autres quantités importantes en traitement du signal discret telles que les produits de convolution circulaires.

Nous étendrons ensuite au cas discret l'analyse des filtres analogiques que nous avons développée dans le chapitre sur le traitement du signal analogique. Après avoir défini la notion de filtres discrets, nous introduirons les notions de réponse impulsionnelle et de fonction de transfert afin de pouvoir caractériser les propriétés de causalité et de stabilité de ces filtres. Nous illustrerons l'usage de ces différents outils dans le cas des filtres récursifs, analogues discrets des filtres différentiels que nous avons étudiés dans le chapitre dédié au traitement du signal analogique.

I Transformation de Fourier discrète

1. Transformée de Fourier discrète

Considérons un signal analogique scalaire $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T > 0$. Lorsque ce signal est intégrable sur **le segment** $[0,T]$, son spectre est naturellement défini comme le signal discret donné par la suite des coefficients de Fourier $(c_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ du signal x, lesquels sont définis par l'expression :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(x) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, e^{-\frac{2i\pi n t}{T}}\, dt.$$

Lorsque le signal x est échantillonné de manière uniforme sur **le segment** $[0,T]$, soit pour une cadence d'échantillonnage de la forme $\tau = \frac{T}{N}$ avec $N \geq 1$, il est naturel de chercher à déterminer, à partir du signal échantillonné $(x_k)_{0\leq k\leq N-1}$ donné par :

$$\forall\, 0 \leq k \leq N-1,\ x_k = x\left(\frac{kT}{N}\right),$$

des valeurs au moins approchées des coefficients de Fourier $(c_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Une façon élémentaire de procéder à ce calcul approché consiste à appliquer une méthode de quadrature afin d'approcher l'intégrale qui définit les coefficients $(c_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ par une somme finie qui ne dépend que des valeurs échantillonnées $(x_k)_{0\leq k\leq N-1}$ aux temps $t = \frac{kT}{N}$.

La méthode des trapèzes qui approche l'intégrale $\int_0^T f(t)\,dt$ par la somme finie :

$$6(f) = \frac{T}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[f\left(\frac{kT}{N}\right) + f\left(\frac{k+1}{N}T\right)\right],$$

conduit par T-périodicité des fonctions x et $t \mapsto e^{-\frac{2i\pi n t}{T}}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

à l'approximation suivante du coefficient de Fourier $c_n(x)$:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \hat{c}_n(x) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[x\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} + x\left(\frac{(k+1)T}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi n(k+1)}{N}} \right]$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, w_N^{-nk},$$

où nous avons noté

$$w_N = e^{\frac{2i\pi}{N}},$$

l'une des racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité. La somme qui apparaît dans cette expression est la transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ du signal fini $(x_k)_{0 \leq k \leq N-1}$, que nous allons maintenant définir avant d'étudier ses propriétés.

a. Définition, interprétation hilbertienne et formule d'inversion

Soit $N \geq 1$. Nous commençons par rappeler les propriétés élémentaires suivantes des racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Prop : Soit $w_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$. Le nombre w_N est une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité, et l'ensemble des racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité est donné par :

$$\mathcal{U}_N = \{ w_N^k,\ 0 \leq k \leq N-1 \}.$$

Dém : Nous vérifions que : $w_N^N = e^{2i\pi} = 1$; étant donnée une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité w, $|w|^N = |w^N| = 1 \Rightarrow$ Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $w = e^{i\theta}$ $\Rightarrow e^{iN\theta} = 1 \Rightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N\theta = 2k\pi \Rightarrow w = e^{\frac{2ik\pi}{N}}$ $= w_N^k$; par le théorème de la division euclidienne, il existe des entiers q et r uniques tels que $k = qN + r$ et $0 \leq r \leq N-1 \Rightarrow w = w_N^k = w_N^{qN+r}$ $= w_N^r$; réciproquement, s'il existe $0 \leq r \leq N-1$ tel que $w = w_N^r$, alors, $w^N = w_N^{rN} = 1 \Rightarrow w$ est une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité ; de plus, si $0 \leq r \neq r' \leq N-1$, alors $\frac{w_N^r}{w_N^{r'}} = e^{\frac{2i\pi(r-r')}{N}}$; comme $|r-r'| < N$, $\frac{w_N^r}{w_N^{r'}} \neq 1 \Rightarrow w_N^r \neq w_N^{r'}$; d'où le fait que l'ensemble $\mathcal{U}_N$ est exactement égal à l'ensemble des racines w_N^k pour $0 \leq k \leq N-1$.

Nous définissons ensuite la transformée de Fourier dis-crète d'un signal fini $(x_n)_{0\leq n\leq N-1}$ de taille N de la façon suivante.

<u>Déf</u> : Soit $N \geq 1$. Étant donné un signal fini $(x_n)_{0\leq n\leq N-1}$ de $\mathbb{C}^N$, la transformée de Fourier discrète de ce signal est définie par:

$$\forall\, 0\leq n\leq N-1,\quad \hat{x}_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, w_N^{-nk} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, e^{-\frac{2i\pi nk}{N}}.$$

<u>Ex</u> : Soit $\forall\, 0\leq n\leq N-1$, $x_n = 1$; la transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{0\leq n\leq N-1}$ du signal $(x_n)_{0\leq n\leq N-1}$ est donnée par:

$$\hat{x}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N,\ \text{et}\ \forall\, 1\leq n\leq N-1,\ \hat{x}_n = \frac{1-w_N^{-nN}}{1-w_N^{-n}} = 0$$

<u>Rem</u> : (i) Comme la transformée de Fourier discrète est définie à partir de sommes finies, elle est toujours bien définie.

(ii) Il existe d'autres normalisations possibles pour la définition de la transformée de Fourier dis-crète : celle donnée ci-dessus par les coefficients de Fourier approchés $\tilde{c}_n(x)$ dans laquelle un facteur multiplicatif $\frac{1}{N}$ apparaît, ou celle dans laquelle un facteur multiplicatif $\frac{1}{\sqrt{N}}$ est ajouté. Cette dernière normalisation est pertinente sur le plan mathématique, car elle simplifie la formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète ci-dessous, et fait de la transformée de Fourier discrète une isométrie pour la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^N$. Nous avons néanmoins opté pour la normalisation de la définition précédente, car, en relation avec l'algorithme de la transformée de Fourier rapide, il s'agit de la normalisation la plus fréquente.

Comme pour les séries de Fourier, il est permis d'interpréter de manière hilbertienne la transformée de Fourier discrète. Rappelons dans cette direction, que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$ est naturellement muni du produit scalaire complexe $\langle\ ,\ \rangle$ défini par:

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{C}^N)^2,\ \langle x,y\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\,\overline{y_n}.$$

Les coefficients de la transformée de Fourier discrète s'interprètent alors comme des produits scalaires.

Prop : Soit $N \geq 1$. Considérons les vecteurs $(e^{(k)})_{0 \leq k \leq N-1}$ de $\mathbb{C}^N$ définis par :

$$\forall 0 \leq k \leq N-1, \forall 0 \leq n \leq N-1, \quad e_n^{(k)} = w_N^{nk} = e^{\frac{2i\pi nk}{N}}.$$

La famille $\left(\frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}\right)_{0 \leq k \leq N-1}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$.

Dém : Soit $0 \leq k, l \leq N-1$; si $k = l$, alors : $\langle e^{(k)}, e^{(k)} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nk} w_N^{-nk} = N \Rightarrow \|e^{(k)}\| = \sqrt{N}$; si $k \neq l$, alors : $\langle e^{(k)}, e^{(l)} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{n(k-l)}$; sachant que $w_N^{k-l} \neq 1$, $\langle e^{(k)}, e^{(l)} \rangle = \frac{1 - w_N^{N(k-l)}}{1 - w_N^{k-l}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}\right)_{0 \leq k \leq N-1}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{C}^N$, donc une famille libre ; sachant que $\dim(\mathbb{C}^N) = N$, il s'agit d'une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$.

Prop : Soit $N \geq 1$. Étant donné un signal $(x_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ de $\mathbb{C}^N$, les coefficients $\hat{x}_n$ de la transformée de Fourier discrète de ce signal satisfont :

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \quad \hat{x}_n = \langle x, e^{(n)} \rangle.$$

Dém : En effet : $\forall 0 \leq n \leq N-1, \langle x, e^{(n)} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k w_N^{-nk} = \hat{x}_n$.

Comme la famille $\left(\frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}\right)_{0 \leq k \leq N-1}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$, nous pouvons décomposer tout signal $x = (x_0, \dots, x_{N-1})$ de $\mathbb{C}^N$ sur cette base suivant la formule :

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle x, \frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}} \right\rangle \frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}.$$

D'après l'interprétation précédente des coefficients $\hat{x}_k$ de la transformée de Fourier discrète en tant que produit scalaire, cette formule permet de retrouver les coefficients x_n du signal x à partir des coefficients $\hat{x}_k$ de sa transformée de Fourier discrète.

Formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète : Soit $N \geq 1$. Tout signal $(x_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ de $\mathbb{C}^N$ satisfait :

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k w_N^{kn}.$$

Dém : Sachant que $\forall 0 \leq k \leq N-1$, $\hat{x}_k = \langle x, e^{(k)} \rangle$, la décomposition du signal x dans la base orthonormée $\left(\frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}\right)_{0 \leq k \leq N-1}$ s'écrit : $\forall 0 \leq n \leq N-1$, $x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e_n^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k w_N^{kn}$.

Ex : Soit $\forall 0 \leq n \leq N-1$; comme $\forall 0 \leq k \leq N-1$, $\hat{x}_k = N$ si $k = 0$, 0 sinon, $\forall 0 \leq n \leq$

$N-1$, $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e_n^{(k)} = e_n^{(0)} = 1 = x_n$.

Rem: Il est aussi possible de vérifier la formule d'inversion précédente par un calcul direct: $\forall\, 0 \leq n \leq N-1$, $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k w_N^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} x_l w_N^{-lk} w_N^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x_l \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{(n-l)k}$; sachant que $\sum_{k=0}^{N-1} w_N^{(n-l)k} = N$ si $n = l$, 0 sinon, nous avons bien: $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k w_N^{kn} = \frac{N}{N} x_n = x_n$.

Cor: Soit $N \geq 1$. La transformation de Fourier discrète $\mathcal{F}$ définie par:

$$\forall x = (x_n)_{0\leq n\leq N-1} \in \mathbb{C}^N,\ \mathcal{F}(x) = (\hat{x}_n)_{0\leq n\leq N-1}$$

est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$ d'inverse égal à:

$$\forall y = (y_n)_{0\leq n\leq N-1} \in \mathbb{C}^N,\ \mathcal{F}^{-1}(y) = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k w_N^{kn}\right)_{0\leq n\leq N-1}.$$

Dém: La transformation de Fourier discrète $\mathcal{F}$ est bien définie de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, et linéaire, par linéarité des sommes finies; si $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{F})$, alors: $\forall\, 0 \leq n \leq N-1$, $\hat{x}_n = 0$, donc par la formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète, $\forall\, 0 \leq n \leq N-1$, $x_n = 0 \Rightarrow \mathcal{F}$ est injective de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, donc bijective; enfin, par la formule d'inversion, $\forall\, 0 \leq n \leq N-1$, $x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}(x)_k w_N^{kn}$, d'où la formule: $\forall y \in \mathbb{C}^N$, $\mathcal{F}^{-1}(y) = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k w_N^{kn}\right)_{0\leq n\leq N-1}$.

L'interprétation hilbertienne précédente de la transformée de Fourier discrète conduit à un analogue de la formule de Parseval pour les séries de Fourier, ou de la formule de Plancherel pour la transformation de Fourier.

Thm: Soit $N \geq 1$. L'application $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{F}$ est isométrique pour la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^N$:

$$\forall x = (x_n)_{0\leq n\leq N-1} \in \mathbb{C}^N,\ \frac{1}{N}\|\mathcal{F}(x)\|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\hat{x}_k|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}|x_n|^2 = \|x\|^2.$$

Dém: Comme $\left(\frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}\right)_{0\leq k\leq N-1}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$, et $\forall x \in \mathbb{C}^N$, $x = \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle x, \frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}\right\rangle \frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}$, $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|\left\langle x, \frac{e^{(k)}}{\sqrt{N}}\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\hat{x}_k|^2$, d'où: $\frac{1}{N}\|\mathcal{F}(x)\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|x_k|^2$.

Ex: Soit $x = (1, -1) \in \mathbb{C}^2$; comme $\forall\, 0 \leq n \leq 1$, $\hat{x}_n = 0$ si $n = 0$, et 2 si $n = 1$, $\frac{1}{2}\|\hat{x}\|^2 = 2 = \|x\|^2$.

Rem: Le caractère isométrique de la transformée de Fourier discrète (à un coefficient multiplicatif près) assure une forme de stabilité lors de son calcul. Étant donné un signal fini $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, et une perturbation $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ de cette famille telle que $\|x - y\| \leq \varepsilon$, où ε est un petit paramètre strictement positif, nous savons que : $\|\hat{x} - \hat{y}\| = \sqrt{N}\,\|x - y\| \leq \sqrt{N}\,\varepsilon$. Cette inégalité signifie que calculer la transformée de Fourier discrète $\hat{y}$ du signal y au lieu de celle du signal x conduit à une erreur qui reste de l'ordre de ε (à un coefficient multiplicatif $\sqrt{N}$ près), soit qui demeure petite.

b. Extension aux signaux discrets périodiques et propriétés élémentaires

La définition de la transformée de Fourier discrète s'étend de manière naturelle aux signaux discrets périodiques de période $N \geq 1$.

Déf : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, un signal discret. Le signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit périodique de période $N \geq 1$ ssi :

$\forall n \in \mathbb{Z},\ x_{n+N} = x_n.$

L'ensemble des signaux discrets périodiques de période $N \geq 1$ est noté $\mathcal{P}_N$ dans la suite.

Ex : Le signal discret $((-1)^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique de période 2.

Prop : Soit $N \geq 1$. Étant donné un signal fini $(x_k)_{0 \leq k \leq N-1}$, il existe un unique signal N-périodique $(\tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que :

$\forall\, 0 \leq k \leq N-1,\ \tilde{x}_k = x_k.$

Dém : Posons : $\forall\, 0 \leq k \leq N-1,\ \forall \ell \in \mathbb{Z},\ \tilde{x}_{k+\ell N} = x_k$. Le signal $(\tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est N-périodique, et il s'agit de l'unique signal N-périodique tel que : $\forall\, 0 \leq k \leq N-1$, $\tilde{x}_k = x_k$.

Ex : Le signal discret $(\omega_N^{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique de période N.

Déf : Soit $N \geq 1$. Étant donné un signal N-périodique $x \in \mathcal{P}_N$, la transformée de Fourier discrète de ce signal est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \hat{x}_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, \omega_N^{-nk}.$$

Ex : Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = (-1)^n$; le signal discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est 2-périodique, et sa transformée de Fourier discrète vaut : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\hat{x}_{2k} = 0$, et $\hat{x}_{2k+1} = 2$.

Prop : Soit $x \in \mathcal{P}_N$. La transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du signal x est N-périodique, et elle satisfait :

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \hat{x}_n = \sum_{k=p}^{p+N-1} x_k\, w_N^{-nk}.$$

Dém : (i) Comme $w_N^N = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{x}_{n+N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, w_N^{-k(n+N)} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, w_N^{-nk} = \hat{x}_n$, ce qui assure que la transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est N-périodique.

(ii) Quel que soit $p \in \mathbb{Z}$, il existe $l \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq q \leq N-1$ tels que $p = lN + q$; comme $(w_N^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont N-périodiques, $\sum_{k=p}^{p+N-1} x_k\, w_N^{-nk}$ $= \sum_{k=q}^{q+N-1} x_{k+lN}\, w_N^{-n(k+lN)} = \sum_{k=q}^{q+N-1} x_k\, w_N^{-nk} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, w_N^{-nk} - \sum_{k=0}^{q-1} x_k\, w_N^{-nk}$ $+ \sum_{k=N}^{N+q-1} x_k\, w_N^{-nk}$; par périodicité, $\sum_{k=N}^{N+q-1} x_k\, w_N^{-nk} = \sum_{j=0}^{q-1} x_{N+j}\, w_N^{-n(N+j)}$ $= \sum_{j=0}^{q-1} x_j\, w^{-nj}$, d'où $\sum_{k=p}^{p+N-1} x_k\, w_N^{-nk} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, w_N^{-nk} = \hat{x}_n$.

Ex : Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = 1$; le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est N-périodique, et : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{x}_n = N$ si $n \in N\mathbb{Z}$, 0 sinon.

La formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète s'étend au cas des signaux N-périodiques.

Formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète : Soit $x \in \mathcal{P}_N$. La transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfait :

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=p}^{p+N-1} \hat{x}_k\, w_N^{kn}.$$

Dém : Sachant que les signaux $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(w_N^{kn})_{k\in\mathbb{Z}}$ sont N-périodiques, nous vérifions comme dans la preuve précédente que : $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{N} \sum_{k=p}^{p+N-1} \hat{x}_k\, w_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k\, w_N^{kn}$; comme il existe $l \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq q \leq N-1$ tels que $n = lN + q$, $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k\, w_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k\, w_N^{k(lN+q)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k\, w_N^{kq}$; comme cette somme est égale à x_q par la formule d'inversion dans le cas des signaux finis, $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k\, w_N^{kN} = x_q = x_{lN+q} = x_n$.

Ex : Soit $N \geq 1$. La transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}$ définie par :

$$\forall x \in \mathcal{P}_N,\ \mathcal{F}(x) = (\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{P}_N,$$

est un isomorphisme linéaire de $\mathcal{P}_N$ dans $\mathcal{P}_N$ d'inverse égal à :

$$\forall y \in \mathcal{P}_N,\ \mathcal{F}^{-1}(y) = \left(\frac{1}{N}\mathcal{F}(y)_{-n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

En particulier, la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}$ satisfait :

$$\forall x \in \mathcal{P}_N,\ \mathcal{F}(\mathcal{F}(x)) = N\,(x_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

<u>Dém</u> : Par linéarité des sommes finies, la transformée de Fourier discrète est linéaire de $\mathcal{P}_N$ dans $\mathcal{P}_N$; par la formule d'inversion, $\forall x \in \mathcal{P}_N$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_{-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}(x)_k\, w^{-kn} = \frac{1}{N}\mathcal{F}(\mathcal{F}(x))_n$, d'où : $\frac{1}{N}\mathcal{F}(\mathcal{F}(x))_{-n} = x_n$; par linéarité, $\forall x \in \mathcal{P}_N$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}\left(\frac{1}{N}\mathcal{F}(x)_{-\cdot}\right)_n = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}\hat{x}_{-k}\,w_N^{-kn} \overset{l=-k}{=} \frac{1}{N}\sum_{l=1-N}^{0}\hat{x}_l\,w_N^{ln} \overset{p=1-N}{=} x_n$; en conclusion, la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}$ est bijective d'inverse donné par la formule du corollaire, et il s'agit donc d'un isomorphisme linéaire de $\mathcal{P}_N$ sur $\mathcal{P}_N$.

<u>Ex</u> : Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = 1$; sachant que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\hat{x}_k = N$ si $k \in N\mathbb{Z}$, 0 sinon, nous vérifions que : $\forall (p,n) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{N}\sum_{k=p}^{p+N-1}\hat{x}_k\,w_N^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{p\le lN\le p+N-1} N\,w_N^{lnN} = 1 = x_n$.

Le caractère isométrique de la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}$ s'étend aussi aux signaux N-périodiques.

<u>Thm</u> : Soit $x \in \mathcal{P}_N$. La transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfait :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ \frac{1}{N}\sum_{k=p}^{p+N-1}|\hat{x}_k|^2 = \sum_{m=q}^{q+N-1}|x_m|^2.$$

<u>Dém</u> : Sachant que les signaux $(x_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ et $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont N-périodiques, nous avons par les preuves précédentes que : $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{N}\sum_{k=p}^{p+N-1}|\hat{x}_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\hat{x}_k|^2$, tandis que : $\forall q \in \mathbb{Z}$, $\sum_{m=q}^{q+N-1}|x_m|^2 = \sum_{m=0}^{N-1}|x_m|^2$; par le caractère isométrique de l'application $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, il vient alors : $\frac{1}{N}\sum_{k=p}^{p+N-1}|\hat{x}_k|^2 = \sum_{m=q}^{q+N-1}|x_m|^2$.

<u>Ex</u> : Soit $x = ((-1)^m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{P}_2$; comme la transformée de Fourier discrète du signal 2-périodique x est donnée par : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{x}_n = 0$ si $n \in 2\mathbb{Z}$, 2 sinon, $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{2}\sum_{k=p}^{p+1}|\hat{x}_k|^2 = 2 = \sum_{m=q}^{q+1}|x_m|^2$.

L'extension aux signaux discrets périodiques permet de décrire plus simplement les propriétés élémentaires de la transformation de Fourier discrète, telles que ses propriétés de parité.

<u>Déf</u>: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un signal discret.

(i) Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair si $\forall n\in\mathbb{Z}$, $x_{-n}=x_n$.

(ii) Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est impair si $\forall n\in\mathbb{Z}$, $x_{-n}=-x_n$.

<u>Ex</u>: Le signal discret $((-1)^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair.

<u>Prop</u>: Soit $x\in P_N$. Posons:

$\forall n\in\mathbb{Z}$, $y_n=x_{-n}$.

Le signal discret $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est N-périodique, et il satisfait:

$\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{y}_n=\widehat{x}_{-n}$.

En particulier, le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair, respectivement impair, ssi le signal $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair, respectivement impair.

<u>Dém</u>: (i) $\forall n\in\mathbb{Z}$, $y_{n+N}=x_{-N-n}=x_{-n}=y_n$, par N-périodicité du signal x, d'où $y=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in P_N$.

(ii) $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{y}_n=\sum_{k=0}^{N-1} y_k\, w^{-kn} \overset{l=-k}{=} \sum_{l=-N+1}^{0} x_l\, w^{ln}=\widehat{x}_{-n}$.

(iii) $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair (impair) ssi $\forall n\in\mathbb{Z}$, $x_n=(-)y_n$ ssi $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{x}_n=(-)\widehat{x}_{-n}$ ssi $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair (impair).

De façon similaire, la conjugaison complexe agit de la manière suivante sur la transformation de Fourier discrète.

<u>Prop</u>: Soit $x\in P_N$. Le signal discret $(\overline{x_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est N-périodique, et il satisfait:

$\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{\overline{x_n}}=\overline{\widehat{x}_{-n}}$.

<u>Dém</u>: (i) Par N-périodicité du signal x, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\overline{x_{n+N}}=\overline{x_n}$, d'où le caractère N-périodique du signal $(\overline{x_n})_{n\in\mathbb{Z}}$.

(ii) $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{\overline{x_n}}=\sum_{k=0}^{N-1}\overline{x_k}\, w_N^{-kn}=\overline{\sum_{k=0}^{N-1} x_k\, w^{-k(-n)}}=\overline{\widehat{x}_{-n}}$.

<u>Cor</u>: Soit $x\in P_N$.

(i) Le signal x est réel ssi:

$\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{x}_n=\overline{\widehat{x}_{-n}}$

(ii) Le signal x est pair et réel ssi le signal $\widehat{x}$ est pair et réel.

(iii) Le signal x est impair et réel ssi le signal $\widehat{x}$ est impair et imaginaire pur.

<u>Dém</u>: (i) Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est réel ssi $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\overline{x_n} = x_n$ ssi $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{x}_n = \widehat{\overline{x}}_n = \overline{\widehat{x}_{-n}}$

(ii) Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair ssi le signal $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair ; dans ce cas, le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est de plus réel ssi $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{x}_n = \overline{\widehat{x}_{-n}} = \overline{\widehat{x}_n}$ ssi le signal $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est réel.

(iii) Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est impair ssi le signal $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est impair ; dans ce cas, le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est réel ssi $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{x}_n = \overline{\widehat{x}_{-n}} = -\overline{\widehat{x}_n}$ ssi le signal $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est imaginaire pur.

<u>Ex</u>: Soit $\forall n\in\mathbb{Z}$, $x_n = 1$; comme $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{x}_n = N$ si $n\in N\mathbb{Z}$, 0 sinon, le signal $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est pair et réel tout comme le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Le filtrage linéaire des signaux finis que nous aborderons dans la suite de ce chapitre requiert la notion de convolution circulaire que nous définissons ici.

<u>Déf</u>: Soit $(x,y)\in\mathcal{P}_N^2$. La convolution circulaire des signaux x et y est défini comme le signal discret N-périodique $x\circledast y = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ z_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k}\, y_k.$$

<u>Dém</u>: Le signal $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien défini, et : $\forall n\in\mathbb{Z}$, $z_{n+N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_{n+N-k} \times y_k = \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k}\, y_k = z_n$; le signal $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc N-périodique.

<u>Ex</u>: Soit $y\in\mathcal{P}_N$. Considérons le signal N-périodique $\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par : $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\delta_n = 1$ si $n\in N\mathbb{Z}$, 0 sinon. Alors : $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\delta\circledast y_n = \sum_{k=0}^{N-1}\delta_k\, y_{n-k} = y_n$. Le signal δ apparaît donc comme un élément neutre pour l'opération de convolution circulaire.

<u>Prop</u>: (i) La convolution circulaire définit une application bilinéaire de $\mathcal{P}_N\times\mathcal{P}_N$ dans $\mathcal{P}_N$.

(ii) L'opération de convolution circulaire est commutative :

$$\forall (x,y)\in\mathcal{P}_N^2,\ x\circledast y = y\circledast x.$$

<u>Dém</u>: (i) La bilinéarité résulte de la linéarité des sommes finies.

(ii) Par définition de la convolution circulaire : $\forall n\in\mathbb{Z}$, $y\circledast x_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_{n-k}\, x_k \overset{j=n-k}{=} \sum_{j=n-N+1}^{n} y_j\, x_{n-j}$; comme $(x,y)\in\mathcal{P}_N^2$, le signal $(y_j\, x_{n-j})_{j\in\mathbb{Z}}$ est

N-périodique, d'où : $y \circledast x_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_k x_{n-k} = x \circledast y_n$.

Ex : Soit $\delta = (\delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le signal N-périodique défini par : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\delta_n = 1$ si $n \in N\mathbb{Z}$, 0 sinon ; quel que soit le signal N-périodique y, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\delta \circledast y_n = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{n-k} y_k = y_{n-lN}$ où $l \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq n - lN \leq N-1$, d'où par N-périodicité du signal y, $\delta \circledast y_n = y_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_{n-k} \delta_k = y \circledast \delta_n$.

Prop : Soit $(x,y) \in \mathcal{P}_N^2$. La transformée de Fourier discrète $(\hat{z}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de la convolution circulaire $x \circledast y = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des signaux x et y est égale à :

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{z}_n = \hat{x}_n \hat{y}_n$.

Dém : Par définition, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{z}_n = \sum_{k=0}^{N-1} z_k w_N^{-nk} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_{k-l} y_l w_N^{-nk}$
$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_{k-l} w_N^{-n(k-l)} y_l w_N^{-nl} \overset{j=k-l}{=} \sum_{l=0}^{N-1} y_l w_N^{-nl} \sum_{j=-l}^{N-1-l} x_j w_N^{-nj}$
$= \hat{x}_n \sum_{l=0}^{N-1} y_l w_N^{-nl} = \hat{x}_n \hat{y}_n$.

Ex : Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = y_n = 1$ si $n \in N\mathbb{Z}$, 0 sinon ; $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x \circledast y_n = x_n$, et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{x}_n = \hat{y}_n = 1$, d'où $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{x \circledast y}_n = \hat{x}_n = \hat{x}_n \hat{y}_n$.

Cor : Soit $(x,y) \in \mathcal{P}_N^2$. Considérons le signal discret $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini par :

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $z_n = x_n y_n$.

Le signal $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est N-périodique et satisfait :

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{z}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_{n-k} \hat{y}_k$.

Dém : Comme $(x,y) \in \mathcal{P}_N^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z_{n+N} = x_{n+N} y_{n+N} = x_n y_n \Rightarrow (z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est N-périodique ; soit alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $Z_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_{n-k} \hat{y}_k$; comme $(x,y) \in \mathcal{P}_N^2$, $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\hat{y}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont N-périodiques, et leur convolution circulaire $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfait : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{Z}_n = \hat{\hat{x}}_n \hat{\hat{y}}_n$, d'où par la formule d'inversion de la transformation de Fourier discrète, $\hat{Z}_n = N^2 x_{-n} y_{-n} = N^2 z_{-n}$, puis $z_n = \frac{1}{N^2} \hat{Z}_{-n}$, et à nouveau par cette formule d'inversion, $\hat{z}_n = \frac{1}{N^2} \hat{\hat{Z}}_{-n} = \frac{1}{N} Z_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_{n-k} \hat{y}_k$.

Ex : Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = y_n = 1$; $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{x}_n = \hat{y}_n = N$ si $n \in N\mathbb{Z}$, 0 sinon, tandis que : $\widehat{x_n y_n} = N$ si $n \in N\mathbb{Z}$, 0 sinon ; d'où $\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_{n-k} \hat{y}_k = N^2$ si $n \in \mathbb{Z}$, 0 sinon, $= N \widehat{x_n y_n}$.

2. Transformation de Fourier rapide

Pour $N \geq 1$, posons $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$. Étant donné un signal fini $(x_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ de $\mathbb{C}^N$, rappelons que sa transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ est définie par:

$$\forall\, 0 \leq n \leq N-1,\quad \hat{x}_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, \omega_N^{-kn}.$$

Dans le cas où les puissances $(\omega_N^{-kn})_{0 \leq k, n \leq N-1}$ sont supposées connues, soit stockées en mémoire, le calcul informatique de la transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ à partir du signal $(x_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ nécessite $N(N-1)$ additions complexes, ainsi que $(N-1)^2$ multiplications complexes (si nous prenons en compte le fait que $\omega_N^0 = 1$). La complexité algorithmique de ce calcul est donc de l'ordre de $\mathcal{O}(N^2)$ opérations, ce qui devient vite important lorsque N augmente.

En 1965, J. Cooley et J. Tuckey ont introduit un algorithme dit de la transformée de Fourier rapide afin de diminuer la complexité algorithmique de ce calcul, et par suite de le faciliter. Cet algorithme repose sur le principe algorithmique appelé "diviser pour régner": il s'agit de décomposer le problème considéré en sous-problèmes, de résoudre ces sous-problèmes de façon récursive, puis de combiner les solutions de ces sous-problèmes pour déterminer la solution du problème initial. Ce principe permet en général de diminuer la complexité algorithmique du calcul à effectuer, typiquement en remplaçant un facteur N dans cette complexité par un facteur $\ln(N)$.

L'algorithme de la transformation de Fourier rapide repose sur l'observation que, dans le cas où $N = 2m$ est pair, les coefficients $\hat{x}_n$ de la transformée de Fourier discrète satisfont:

$$\forall\, 0 \leq n \leq N-1,\quad \hat{x}_n = \sum_{l=0}^{m-1} \left(x_{2l}\, \omega_{2m}^{-2ln} + x_{2l+1}\, \omega_{2m}^{-(2l+1)n} \right)$$
$$= \left(\sum_{l=0}^{m-1} x_{2l}\, \omega_m^{-ln} \right) + \omega_N^{-n} \left(\sum_{l=0}^{m-1} x_{2l+1}\, \omega_m^{-ln} \right).$$

Si nous introduisons les signaux finis $(y_l)_{0 \leq l \leq m-1}$ et $(z_l)_{0 \leq l \leq m-1}$ définis par:

$$\forall\, 0 \leq l \leq m-1,\quad \begin{cases} y_l = x_{2l}, \\ z_l = x_{2l+1}, \end{cases}$$

cette formule exprime le fait que le coefficient $\hat{x}_n$ s'écrit comme une combinaison linéaire des coefficients de la transformée de Fourier discrète des signaux $(y_l)_{0\le l\le m-1}$ et $(z_l)_{0\le l\le m-1}$. Plus précisément, cette combinaison linéaire s'écrit:

$$\forall 0\le n\le m-1,\ \hat{x}_n = \hat{y}_n + w_N^{-n}\hat{z}_n,$$

et nous déduisons aussi de l'identité précédente que:

$$\forall 0\le n\le m-1,\ \hat{x}_{n+m} = \sum_{l=0}^{m-1} x_{2l}\, w_{2m}^{-2l(n+m)} + w_N^{-n-m}\sum_{l=0}^{m-1} x_{2l+1}\, w_{2m}^{-2l(n+m)}$$
$$= \hat{y}_n - w_N^{-n}\hat{z}_n,$$

puisque $w_m^m = 1$ et $w_{2m}^m = -1$. En conclusion, les $2m$ coefficients de la transformée de Fourier discrète $(\hat{x}_n)_{0\le n\le N-1}$ se calculent directement à partir des m coefficients des transformées de Fourier discrètes $(\hat{y}_n)_{0\le n\le m-1}$ et $(\hat{z}_n)_{0\le n\le m-1}$ via les formules:

$$\forall 0\le n\le m-1,\ \begin{cases} \hat{x}_n = \hat{y}_n + w_N^{-n}\hat{z}_n, \\ \text{et } \hat{x}_{n+m} = \hat{y}_n - w_N^{-n}\hat{z}_n. \end{cases}$$

Lorsque l'entier $m = 2p$ est de nouveau pair, il est permis d'itérer ces formules en calculant les transformées de Fourier discrètes des signaux $(y_n)_{0\le n\le m-1}$ et $(z_n)_{0\le n\le m-1}$ à partir de celles des signaux $(y_{2n})_{0\le n\le p-1}$, $(y_{2n+1})_{0\le n\le p-1}$, $(z_{2n})_{0\le n\le p-1}$ et $(z_{2n+1})_{0\le n\le p-1}$.

L'algorithme de la transformée de Fourier rapide utilise cette approche récursive dans le cas le plus favorable où $N = 2^r$ est une puissance de 2:

- lorsque $r = 1$, la transformée de Fourier discrète du signal (x_0, x_1) est donnée par les formules:

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = x_0 + x_1, \\ \text{et } \hat{x}_1 = x_0 - x_1. \end{cases}$$

- lorsque $r > 1$, la transformée de Fourier discrète du signal $(x_n)_{0\le n\le 2^r-1}$ est calculée récursivement par les formules:

$$\forall 0\le n\le 2^{r}-1,\ \begin{cases} \hat{x}_n = \hat{y}_n + w_{2^r}^{-n}\hat{z}_n, \\ \text{et } \hat{x}_{n+2^{r-1}} = \hat{y}_n - w_{2^r}^{-n}\hat{z}_n, \end{cases}$$

où les signaux $(y_n)_{0\le n\le 2^{r}-1}$ et $(z_n)_{0\le n\le 2^{r}-1}$ sont définis comme ci-dessus par:

$$\forall\, 0 \leq l \leq 2^{r}-1, \begin{cases} y_l = x_{2l}, \\ \text{et } z_l = x_{2l+1}. \end{cases}$$

Notons ici qu'il est toujours possible de compléter une famille finie $(x_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ par des zéros de sorte qu'elle comporte une puissance 2^r de coefficients, et qu'il soit possible de lui appliquer l'algorithme de la transformation de Fourier rapide.

Au niveau de la complexité algorithmique, si nous notons A_r et M_r le nombre d'additions (et de soustractions) complexes, respectivement le nombre de multiplications complexes, requises pour obtenir la transformation de Fourier discrète d'un signal $(x_n)_{0 \leq n \leq 2^r-1}$ par cet algorithme, nous observons que:

$$\begin{cases} A_0 = 2, \\ \text{et } M_0 = 0, \end{cases}$$

tandis que:

$$\forall\, r \geq 1, \begin{cases} A_r = 2A_{r-1} + 2^r, \\ \text{et } M_r = 2M_{r-1} + 2^{r-1} - 1, \end{cases}$$

lorsque nous tenons compte de l'absence de multiplication pour un facteur multiplicatif égal à 1. Par récurrence sur $r \geq 1$, nous vérifions que:

$$\forall\, r \geq 1, \begin{cases} A_r = r\, 2^r \\ \text{et } M_r = (r-2)\, 2^{r-1} + 1. \end{cases}$$

Cette formule est en effet vraie au rang $r = 1$, et si elle est vraie jusqu'au rang $r-1$, alors:

$$A_r = 2A_{r-1} + 2^r = (r-1)\, 2^r + 2^r = r\, 2^r,$$

tandis que:

$$M_r = 2M_{r-1} + 2^{r-1} - 1 = 2(r-3)\, 2^{r-2} + 2 + 2^{r-1} - 1 = (r-2)\, 2^{r-1} + 1,$$

d'où les formules précédentes par récurrence sur $r \geq 1$. Sachant que $\ln(N) = r \times \ln(2)$, nous concluons que la complexité algorithmique de l'algorithme de la transformation de Fourier rapide est en $O(N \ln(N))$, ce qui est un gain considérable par rapport au calcul direct dont la complexité algorithmique est en $O(N^2)$.

Il existe de nombreuses variantes de l'algorithme de la transformation de Fourier rapide proposé par J. Cooley et J. Tukey (typiquement les algorithmes de Rader, de Bruun, ...) et différentes façon de l'implémenter (algorithme récursif, algorithme itératif in situ, ...) que nous ne décrirons pas dans ce cours. Nous nous intéresserons par contre à la façon dont cet algorithme permet d'accélérer le calcul de certaines quantités, typiquement dans le cadre du filtrage fini que nous allons maintenant aborder.

3. Filtrage des signaux finis

a. Définition et propriétés des filtres finis

Les filtres finis agissent sur les signaux finis de façon équivalente aux filtres analogiques sur les signaux analogiques. Afin de définir les filtres finis, nous introduisons d'abord l'opérateur de décalage circulaire τ.

Déf : L'opérateur de décalage circulaire τ est défini par :

$$\forall x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N,\ \tau(x) = (x_{N-1}, x_0, \dots, x_{N-2}).$$

Ex : Soit $B = (e_0, \dots, e_{N-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$. Nous observons que :

$$\forall 1 \leq i \leq N-1,\ \tau^i e_0 = e_i,\ \text{et}\ \tau e_{N-1} = e_0.$$

Prop : L'opérateur de décalage circulaire τ est une application linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, dont la matrice dans la base canonique $B = (e_0, \dots, e_{N-1})$ de $\mathbb{C}^N$ est égale à :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dém : Par définition, τ est linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, avec : $\forall 0 \leq i \leq N-2$, $\tau e_i = e_{i+1}$ et $\tau e_{N-1} = e_0$, d'où l'expression ci-dessus de sa matrice J.

Rem : Lorsque l'espace des signaux finis $\mathbb{C}^N$ est identifié à l'espace $\mathcal{P}_N$ des signaux discrets N-périodiques, l'opérateur de décalage circulaire τ s'identifie à l'opérateur de décalage S défini sur l'espace des signaux discrets par :

$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $\delta(x) = (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$,

d'où l'appellation d'opérateur de décalage circulaire τ.

L'opérateur de décalage circulaire τ permet de définir les filtres finis de la façon suivante :

<u>Déf</u>: Soit $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. L'application A est invariante par décalage circulaire ssi:

$$\forall x = (x_n)_{0\leq n\leq N-1} \in \mathbb{C}^N, \ A\tau(x) = \tau A(x).$$

<u>Ex</u>: L'opérateur de décalage circulaire τ est invariant par décalage circulaire:

$$\forall x \in \mathbb{C}^N, \ \tau(\tau x) = \tau^2 x = \tau(\tau x).$$

<u>Déf</u>: Soit $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. L'application A est un filtre fini sur $\mathbb{C}^N$ ssi:

(i) A est une application linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$.

(ii) A est invariante par décalage circulaire.

<u>Ex</u>: Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$. L'application A définie par:

$$\forall x \in \mathbb{C}^N, \ A(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^k(x),$$

est un filtre fini sur $\mathbb{C}^N$; A est en effet linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, et invariante par décalage circulaire, puisque : $\forall x \in \mathbb{C}^N$, $A\tau(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^k(\tau x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau(\tau^k x) = \tau A(x)$.

L'exemple précédent est en fait le seul exemple de filtre fini sur $\mathbb{C}^N$.

<u>Prop</u>: Soit $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ un filtre fini sur $\mathbb{C}^N$. Il existe un unique signal fini $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tel que:

$$\forall x \in \mathbb{C}^N, \ Ax = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^k x.$$

<u>Dém</u>: (i) <u>Unicité si existence</u> : soit $B = (e_0, \dots, e_{N-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$; s'il existe un signal fini $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tel que : $\forall x \in \mathbb{C}^N$, $Ax = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^k x$, alors: $Ae_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^k e_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e_k$, d'où l'unicité du signal fini α si existence.

(ii) <u>Existence</u> : Comme A est invariante par décalage circulaire, $\forall 0 \leq i \leq N-1$, $Ae_i = A\tau^i e_0 = \tau^i A e_0 = \tau^i \left(\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e_k\right)$, puis par linéarité de l'application

A, $Ae_i = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^i(e_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^k(\tau^i e_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^k e_i$;

comme les applications A et $\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \tau^k$ sont égales dans une base de $\mathbb{C}^N$, elles sont identiquement égales.

__Ex:__ Soit $\forall x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$, $Ax = (x_1, x_2, x_0)$; comme $A = \tau^1$, A est un filtre fini sur $\mathbb{C}^3$.

A l'aide des matrices circulantes, nous pouvons interpréter ce résultat comme le fait que tout filtre fini est en fait un produit de convolution circulaire.

__Déf:__ Soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. La matrice M est circulante ssi il existe un signal fini $\alpha \in \mathbb{C}^N$ tel que:

$$M = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k J^k.$$

__Ex:__ Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $M = 0 \times J^0 + 2 \times J + 1 \times J^2$, la matrice M est circulante.

__Th:__ Soit $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ un filtre fini sur $\mathbb{C}^N$. La matrice M de l'application linéaire A dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$ est circulante.

__Dém:__ Rappelons que la matrice de l'opérateur de décalage circulaire τ dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$ est égale à J; un opérateur linéaire A est donc un filtre fini ssi il existe $\alpha \in \mathbb{C}^N$ tel que $A = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \tau^j$, soit ssi: $M = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j J^j$ est une matrice circulante.

__Ex:__ Soit $\forall x \in \mathbb{C}^3$, $Ax = (x_1, x_2, 0)$; A est un filtre fini sur $\mathbb{C}^3$, et sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est égale à: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J^2$.

Etendons alors la notion de produit de convolution circulaire aux signaux finis.

__Déf:__ Soit $(x, y) \in [\mathbb{C}^N]^2$; le produit de convolution circulaire $x \circledast y$ des signaux finis x et y est défini par:

$$\forall\ 0 \leq n \leq N-1,\quad x \circledast y_n = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_{n-k}\, \tilde{y}_k,$$

où $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ désignent les signaux discrets N-périodiques définis par:

$\forall 0 \le n \le N-1,\ \tilde{x}_n = x_n$ et $\tilde{y}_n = y_n$.

<u>Ex:</u> Soit $x = (1,1) \in \mathbb{C}^2$ et $y = (0,1) \in \mathbb{C}^2$; le produit de convolution circulaire $x \circledast y$ est donné par : $x \circledast y_0 = 1$ et $x \circledast y_1 = 1$.

<u>Prop:</u> Soit $a = (a_0, \ldots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$. L'application A définie par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^N,\ A(x) = a \circledast x,$$

est linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, et sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$ est égale à :

$$M = \sum_{j=0}^{N-1} a_j J^j.$$

En particulier il s'agit d'une matrice circulante.

<u>Dém:</u> Par définition du produit de convolution circulaire, A est bien définie et linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, avec : $\forall 0 \le k \le N-1$, $[a \circledast e_k]_n = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{a}_{n-j} (\tilde{e}_k)_j = \tilde{a}_{n-k}$, d'où : $a \circledast e_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}_{n-k} e_n$; $\forall 0 \le k \le N-1$, $\sum_{j=0}^{N-1} a_j J^j(e_k) = \sum_{j=0}^{N-1-k} a_j e_{j+k} + \sum_{j=N-k}^{N-1} a_j e_{j+k-N} = \sum_{l=k}^{N-1} a_{l-k} e_l + \sum_{l=0}^{k-1} a_{l-k+N} e_l = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{a}_{l-k} e_l$, d'où : $M = \sum_{j=0}^{N-1} a_j J^j$, et la nature circulante de la matrice M.

<u>Ex:</u> Pour $a = (0,1,1) \in \mathbb{C}^3$, posons : $\forall x \in \mathbb{C}^3$, $A(x) = a \circledast x$; la matrice M de l'application A est égale à : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Cor:</u> Soit $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. L'application A est un filtre fini sur $\mathbb{C}^N$ ssi il existe un signal fini $a = (a_0, \ldots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C}^N,\ A(x) = a \circledast x.$$

Le signal a est alors l'unique signal fini de $\mathbb{C}^N$ qui satisfait cette propriété.

<u>Dém:</u> (i) A est un filtre fini sur $\mathbb{C}^N$ ssi A est une application linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$ s'écrit : $M = \sum_{j=0}^{N-1} a_j J^j$ pour un signal fini $a \in \mathbb{C}^N$; par la propriété précédente, ceci équivaut au fait que : $\forall x \in \mathbb{C}^N$, $A(x) = a \circledast x$.

(ii) Si A s'écrit sous cette forme, alors, par la preuve de la propriété précédente : $A e_0 = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}_n e_n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e_n$, d'où l'unicité du signal fini a qui satisfait cette propriété.

Ex : Soit $\forall x\in\mathbb{C}^3$, $Ax = (2x_0+3x_2-x_1,\ 2x_1+3x_0-x_2,\ 2x_2+3x_1-x_0)$;

$\forall x\in\mathbb{C}^3$, $Ax = a \circledast x$ où $a=(2,3,-1)$.

Par le corollaire précédent, décrire l'action d'un filtre fini revient à calculer un produit de convolution circulaire avec un signal fini fixé. Afin d'implémenter de façon efficace des filtres finis, il s'agit donc de pouvoir calculer rapidement des produits de convolution circulaire.

b. Calcul rapide des produits de convolution circulaire

Etant donnés deux signaux N-périodiques x et y, rappelons que le produit de convolution circulaire $x\circledast y$ est défini comme le signal N-périodique qui satisfait :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad x\circledast y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k}\, y_k.$$

Compte tenu de sa nature N-périodique, le calcul direct de ce signal requiert N^2 multiplications et $N(N-1)$ additions. L'utilisation de la transformation de Fourier discrète permet de calculer plus rapidement le produit de convolution circulaire.

Rappelons en effet que la transformée de Fourier discrète du produit de convolution circulaire $x\circledast y$ est donnée par les formules :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\quad \widehat{x\circledast y}_k = \widehat{x}_k\,\widehat{y}_k.$$

Afin de déterminer le produit de convolution circulaire $x\circledast y$, il est donc possible de calculer :

- les transformées de Fourier discrètes de x et de y par l'algorithme de la transformation de Fourier rapide, ce qui requiert de l'ordre de $O(N\ln(N))$ additions et multiplications, compte tenu de la nature N-périodique des signaux considérés ;
- les produits des coefficients $\widehat{x}_k$ et $\widehat{y}_k$ pour $0\le k\le N-1$, ce qui nécessite N multiplications ;
- les coefficients $(x\circledast y_n)_{0\le n\le N-1}$ du produit de convolution circu-

laire $x \circledast y$ par l'algorithme de la transformée de Fourier rapide pour la formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète $\widehat{x \circledast y}$, ce qui requiert à nouveau de l'ordre de $O(N\ln(N))$ additions et multiplications.

En conclusion, l'algorithme de la transformation de Fourier rapide permet le calcul d'un produit de convolution circulaire en $O(N\ln(N))$ additions et multiplications au lieu des $O(N^2)$ additions et multiplications du calcul direct. Ce gain très consistant permet d'implémenter rapidement des filtres finis afin de traiter numériquement des signaux finis ou N-périodiques.

II Filtrage discret