

## Traitement du signal analogique

### Introduction

L'objectif de ce chapitre est de décrire plusieurs concepts et outils mathématiques qui apparaissent dans le cadre du traitement du signal analogique. Il ne s'agit pas de décrire de façon exhaustive l'usage des mathématiques dans ce cadre, mais plutôt de mettre en avant certaines applications dans lesquelles l'analyse de Fourier intervient.

La première de ces applications concerne la conversion analogique - discret, et plus précisément, l'échantillonnage d'un signal analogique. Étant donné un signal de ce type, soit une fonction de la variable réelle  $x$  (à valeurs réelles), il s'agit de considérer le signal discret composé par la suite  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$  des valeurs de cette fonction échantillonnées à des intervalles de temps de durée identique  $T$ . Une fois le signal analogique ainsi échantillonné, il s'agit de savoir sous quelles conditions il est possible de le reconstituer à partir du signal discret  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Le théorème d'échantillonnage de Nyquist - Shannon apporte une réponse explicite à cette question lorsque la transformée de Fourier du signal analogique  $x$  est à bande limitée, soit localisée dans l'intervalle  $(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ . Nous expliquerons comment établir ce théorème, puis nous intéresserons à ses limitations, en particulier au phénomène de recouvrement spectral qui advient lorsque la transformée de Fourier  $\hat{x}$  ne satisfait plus la condition précédente.

Cette première analyse conduit naturellement à l'étude des filtres analogiques, dont un exemple élémentaire est le filtre passe-bas idéal qui permet de tronquer la transformée de Fourier  $\hat{x}$  d'un signal analogique  $x$  à l'intervalle  $(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  afin qu'elle satisfasse la condition de bande limitée du théorème d'échantillonnage de Ny-

quist - Shannon. Plus généralement, les filtres analogiques jouent un rôle déterminant dans la transformation des signaux analogiques de par leur implémentation via des circuits électroniques. Sur le plan mathématique, il s'agit d'opérateurs linéaires continus qui sont de plus invariants par translation. Nous décrivons certaines caractéristiques de ces filtres (réponse impulsionnelle, fonction de transfert, ...) et nous nous intéressons à leurs propriétés pertinentes dans le cadre du traitement du signal (causalité, stabilité, ...), avant de nous concentrer sur plusieurs classes utiles de filtres analogiques, tels que les filtres passe-bas requis pour préparer l'échantillonnage de signaux analogiques.

## I Conversion analogique - discret

Considérons un signal analogique scalaire  $x$ , soit une fonction de la variable réelle à valeurs réelles. La conversion analogique - discret consiste à transformer ce signal en un signal discret scalaire, soit une suite réelle  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Cette conversion peut avoir pour but une conversion numérique de ce signal afin de pouvoir le traiter de façon informatique.

Elle peut aussi faciliter la transmission de ce signal, puisque la transmission d'un signal discret, au contraire de celle d'un signal analogique, n'occupe pas toute la ligne de transmission.

Dans les deux cas, il est important de ne pas perdre d'information pertinente lors de la conversion analogique - discret ; dans l'idéal, cette affirmation servirait à établir qu'il est possible de reconstituer le signal analogique  $x$  à partir du signal discret  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Une des conditions naturelles sur le spectre du signal analogique  $x$ , c'est ce que permet l'échantillonnage que nous allons désormais étudier.

### 1. Échantillonnage et théorème de Nyquist - Shannon

## a. Définition et exemples

Déf: Soit  $T > 0$ . Considérons un signal analogique  $x \in \mathcal{E}_0^c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Le signal échantillonné associé au signal analogique  $x$  est le signal discret  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  défini par:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x(nT).$$

Le nombre  $T$  est alors appelé période ou cadence d'échantillonnage de ce signal.

Ex: Soit  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = e^{-t^2}$ ; étant donné la période d'échantillonnage  $T=1$ , le signal échantillonné associé au signal analogique  $x$  est le signal discret  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  défini par:  $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = e^{-n^2 T^2}$ .

Rem: (i) En pratique, le signal échantillonné est plutôt une suite finie de valeurs du signal analogique  $x$  de la forme  $(x(nT))_{0 \leq n \leq N}$ ; comme le signal analogique est souvent nul avant l'instant initial et qu'il redescend nul après l'instant final, il n'est pas déraisonnable de considérer le signal échantillonné  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$  précédemment défini en lieu et place du signal fini obtenu en pratique.

(ii) L'hypothèse de continuité du signal analogique  $x$  est naturelle afin que le signal échantillonné  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit bien défini (ce qui ne serait pas le cas pour un signal seulement mesurable). Cette hypothèse implique aussi que la détermination du signal échantillonné n'est pas trop perturbée par de petites erreurs sur le calcul des valeurs du signal analogique.

Par définition, le signal échantillonné  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$  dépend fortement du choix de la période d'échantillonnage  $T$ . Plus cette période est courte, meilleur semble être le processus d'échantillonnage.

Ex: Soit  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \sin(t)$ .

(i) Dans le cas où  $T = \pi$ , le signal échantillonné associé à  $x$  est égal à:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = \sin(n\pi) = 0.$$

(ii) Dans le cas où  $T = \frac{\pi}{2}$ , le signal échantillonné associé à  $x$  est égal à:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = 0 \text{ si } n = 2k, (-1)^k \text{ si } n = 2k+1.$$

et l'opposé, la chose d'une période d'échantillonnage  $T$  trop courte demande la détermination de beaucoup plus de valeurs du signal analogique  $x$  pour une même durée. Se pose donc la question du choix d'une période optimale d'échantillonnage  $T$ , soit d'une période pour laquelle il est possible de reconstruire, sinon parfaitement, au moins fidèlement, le signal analogique initial.

## b. Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon

Def: (i) Un signal analogique scalaire  $x$  est intégrable si et seulement si la fonction  $x$  appartient à l'espace de Lebesgue  $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

(ii) Un signal analogique scalaire  $x$  est d'énergie finie si et seulement si la fonction  $x$  appartient à l'espace de Lebesgue  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Ex: Soit  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = e^{-|t|}$ ; le signal analogique scalaire  $x$  est intégrable et d'énergie finie.

Rem: La terminologie d'énergie finie provient du fait que la quantité :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt,$$

apparaît souvent comme l'énergie du système physique associé au signal analogique  $x$  (à une constante dimensionnelle près). C'est par exemple le cas de l'énergie électrique  $E$  dans une résistance  $R$  qui se calcule suivant les formules :

$$E = R \int_{-\infty}^{+\infty} i(t)^2 dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)^2 dt,$$

où  $i$  est l'intensité qui traverse la résistance, et  $u$  la tension aux bornes de cette résistance.

Def: Considérons un signal analogique scalaire  $x$  que nous supposons intégrable ou d'énergie finie. Le spectre du signal  $x$  est par définition la transformée de Fourier  $\hat{x}$  ou  $\mathcal{F}(x)$  de ce signal.

En particulier, le spectre  $\hat{x}$  est bien défini, continu et borné sur  $\mathbb{R}$ , lorsque le signal  $x$  est intégrable, tandis que le spectre  $\hat{x}(x)$  est bien défini presque partout sur  $\mathbb{R}$  et d'énergie finie, lorsque le signal  $x$  est d'énergie finie.

Ex: Soit  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $x(t) = 1$  si  $t \in [-2, 2]$ , 0 sinon; comme la fonction  $x$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , son spectre  $\hat{x}$  est bien défini, continue, et borné sur  $\mathbb{R}$ , avec:  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ ,  

$$\hat{x}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 e^{-it\xi} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \text{ si } \xi \neq 0, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ si } \xi = 0.$$

Considérons désormais une période d'échantillonnage  $T > 0$ . Étant donné un signal analogique  $x$ , le théorème de Nyquist-Shannon fournit une condition sur le spectre  $\hat{x}$  sous laquelle il est possible de reconstruire le signal  $x$  à partir du signal échantillonné  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$ : le fait que le spectre  $\hat{x}$  soit à bande limitée, plus précisément, que le support de ce spectre soit inclus dans l'intervalle  $(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$ . Commençons par étudier les signaux analogiques qui satisfont une telle condition.

Prop: Considérons un signal analogique  $x$  d'énergie finie, et supposons qu'il existe un nombre  $R > 0$  tel que:

$$\forall \xi \in ]-\infty, -R] \cup [R, +\infty[ \quad \hat{x}(\xi) = 0.$$

alors le signal  $x$  définit une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , de limite nulle en  $\pm\infty$ .

Dém: Comme  $x$  est d'énergie finie, et la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R})$  t.q.  $\forall y \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}^{-1}(y) = \mathcal{F}(y)(-.)$ ,  $x = \mathcal{F}(\hat{x})(-.)$ ; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(\xi)| d\xi = \int_{-R}^R |\hat{x}(\xi)| d\xi \leq \sqrt{2R} \left( \int_{-R}^R |\hat{x}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \hat{x} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ ,  

$$\mathcal{F}(\hat{x})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\xi) e^{-i\xi t} d\xi \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \hat{x}(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$
; comme  $\hat{x} \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $x$  définit une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , de limite nulle en  $\pm\infty$ .

Rem: (i) Lorsqu'un signal analogique  $y$  satisfait la condition:

$$\forall t \in ]-\infty, a] \cup [b, +\infty[ \quad y(t) = 0,$$

il est dit à support dans le segment  $(a, b)$ .

(ii) Sous les conditions de la proposition précédente, le signal échantillonné  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$  associé un signal analogique  $x$  est bien défini puisque la fonction  $x$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème de Nyquist - Shannon fait intervenir la fonction sinus cardinal dont nous rappelons d'abord les principales propriétés.

Def: La fonction sinus cardinal notée  $\text{sinc}$  est définie par la formule:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie, paire, bornée et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle appartient à  $L^2(\mathbb{R})$ , et sa transformée de Fourier est égale à:

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\text{sinc})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ si } |\xi| < 1, 0 \text{ si } |\xi| > 1.$$

Dém: (i) Rappelons que la fonction sinus est analytique sur  $\mathbb{C}$  et s'écrit:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{\sin(t)}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$$

comme cette série entière a pour rayon de convergence  $+\infty$ , sa somme est bien

définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , avec de plus:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 0^{2n}}{(2n+1)!} = 1 \Rightarrow \text{sinc}$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , avec:  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{sinc}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$

(ii) Comme  $\forall t \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ ,  $|\text{sinc}(t)| = \frac{|\sin(t)|}{|t|} \leq \frac{1}{|t|} \leq 1$ ,  $\text{sinc}$  est bornée sur  $\mathbb{R} \setminus ]-1, 1[$ , et par continuité sur  $\mathbb{R}$ ; comme  $\forall t \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ ,  $|\text{sinc}(t)|^2 \leq \frac{1}{t^2}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}(t)|^2 dt < +\infty \Rightarrow \text{sinc}$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$ .

(iii) Soit  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = 1$  si  $|t| \leq 1$ , 0 sinon; comme  $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ,

$\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et vaut:  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-it\xi} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc}(\xi)$ ; par linéarité de la

transformée de Fourier, p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}(\text{sinc})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}\mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times f(-\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(\xi)$ .

Les propriétés précédentes de la fonction sinus cardinal sont utiles pour démontrer le théorème de Nyquist - Shannon qui permet de reconstruire un signal analogique  $x$  à partir de son signal échantillonné  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$  de la façon suivante.

Théorème de Nyquist - Shannon: Soit  $T > 0$  une période d'échantillonnage.

Considérons un signal analogique  $x$  d'énergie finie et supposons que:



Fourier, et le changement d'indice  $k = n$ ,  $\sum_{n=-N}^N x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$   
 $\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x(t)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

(v) Soit  $\epsilon > 0$ ; comme  $\forall |n| > \frac{R}{T}$ ,  $\forall t \in (-R, R)$ ,  $\left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right) \right|^2 \leq \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}(t-nT)^2} \leq \frac{T^2}{\pi^2(|n|T-R)^2}$ ,  $|x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)| \leq \frac{1}{2} \left( |x(nT)|^2 + \frac{T^2}{\pi^2(|n|T-R)^2} \right) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$  converge normalement, donc uniformément sur  $[-R, R]$  vers sa somme  $S$ ; sachant que  $\int_{-R}^R \left| \sum_{n=-N}^N x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right) - S(t) \right|^2 dt \leq 2R \max_{t \in (-R, R)} \left| \sum_{n=-N}^N x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right) - S(t) \right|^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ , par convergence dans  $L^2(\mathbb{R})$  vers  $x$  et unicité de la limite dans cette convergence,  $\forall t \in (-R, R)$ ,  $S(t) = x(t)$ ; comme le nombre  $R$  est ici arbitraire,  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $x$ .

(vi) Comme la fonction  $\operatorname{sinc}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , lorsque la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(nT)|$  est convergente, la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$  est normalement, donc uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ , et sa somme est toujours égale à la fonction  $x$  par unicité de la limite de la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

Rem: (i) La fréquence  $\frac{\pi}{T}$  maximale au delà de laquelle le spectre d'un signal analogique à bande limitée doit être nul pour pouvoir appliquer le théorème de Nyquist-Shannon s'appelle la fréquence de Nyquist. Cette fréquence est égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage qui vaut par définition  $\frac{2\pi}{T}$ . Autrement dit l'échantillonnage discret d'un signal analogique nécessite des échantillons à une fréquence d'échantillonnage  $\omega$  supérieure au double de la fréquence maximale  $\frac{\pi}{T}$  présente dans le signal analogique: c'est le théorème de l'échantillonnage.

(ii) Le théorème de Nyquist-Shannon assure dans la reconstruction de tout signal analogique à bande limitée dans un intervalle de la forme  $[-\omega, \omega]$  à partir du signal échantillonné à une cadence d'échantillonnage  $T$  dès lors que cette cadence est assez petite, soit en pratique inférieure ou

égale à la cadence de Nyquist  $T_w = \frac{\pi}{\omega}$ .

- (iii) La condition de convergence uniforme (en pratique normale) sur tout compact de  $\mathbb{R}$  assure que, même une somme partielle  $\sum_{n=-N}^N x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$  plus facilement calculable en pratique, approche de façon suffisante pour  $N$  grand le signal analogique  $x(t)$  à reconstituer. Néanmoins, en raison de la décroissance algébrique seulement en  $\frac{1}{t}$  de la fonction sinc cardinal, la rapidité de convergence de cette approximation lorsque  $N \rightarrow +\infty$  n'est pas très élevée.

Le théorème de Nyquist-Shannon s'interprète comme une décomposition sur une base hilbertienne du sous-espace fermé  $V_w$  de  $L^2(\mathbb{R})$  des signaux analogiques à bande limitée dans l'intervalle  $[-w, w]$ .

Prop: Soit  $w > 0$ . Le sous-ensemble  $V_w$  des signaux analogiques d'énergie finie et de bande limitée dans l'intervalle  $[-w, w]$  défini par:

$$V_w = \left\{ x \in L^2(\mathbb{R}) \text{ t.q. p.p.t. } \xi \in ]-\infty, -w] \cup [w, +\infty[, \mathcal{F}(x)(\xi) = 0 \right\},$$

est un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Dém: (i) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et  $(x, y) \in V_w$ ; par linéarité de la transformation de Fourier, p.p.t.  $\xi \in ]-\infty, -w] \cup [w, +\infty[, \mathcal{F}(\lambda x + y)(\xi) = \lambda \mathcal{F}(x)(\xi) + \mathcal{F}(y)(\xi) = 0$   
 $\Rightarrow V_w$  est un sous-espace de  $L^2(\mathbb{R})$ .

(ii) Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $V_w$  t.q.  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_\infty$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ ; par le théorème de Plancherel,  $\mathcal{F}(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{F}(x_\infty)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ ; quitte à échanger, p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}(x_n)(\xi) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{F}(x_\infty)(\xi)$ ; comme  $\forall n \geq 0$ , p.p.t.  $\xi \in ]-\infty, -w] \cup [w, +\infty[, \mathcal{F}(x_n)(\xi) = 0$ , à la limite  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\mathcal{F}(x_\infty)(\xi) = 0 \Rightarrow x_\infty \in V_w \Rightarrow V_w$  est fermé dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Cher: Soit  $T > 0$ . Posons:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}, a_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right).$$

La famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_{\frac{\pi}{T}}$ . En particulier, quel que soit le signal analogique  $x \in V_{\frac{\pi}{T}}$ ,

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x, a_n \rangle_2 a_n \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \langle x, a_n \rangle_2 = \sqrt{T} x(nT).$$

Dém.: (i) Soit  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , p.p.  $f \in \mathbb{R}$ ,  $X_n(f) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} e^{inTs} \mathbb{1}_{(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})}(f)$ ; rappelons que

$X_n \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ , avec:  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}(X_n)(t) = \text{mic}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$ ; par

linéarité de la transformation de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ , les fonctions  $a_n$  sont donc

dans  $V_{\frac{\pi}{T}}$ , et par le théorème de Plancherel, satisfont:  $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, \langle a_m, a_n \rangle_2$

$$= \frac{1}{T} \langle \mathcal{F}(X_m), \mathcal{F}(X_n) \rangle_2 = \frac{1}{T} \langle X_m, X_n \rangle_2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{i(m-n)Ts} ds$$

$$= 1 \text{ si } m=n, 0 \text{ si } m \neq n \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ est une famille orthogonale de } V_{\frac{\pi}{T}}.$$

(ii) Soit  $x \in V_{\frac{\pi}{T}}$ ; par le théorème de Nyquist-Shannon,  $\sum_{n=-N}^N \sqrt{T} x(nT) a_n(t)$

$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x(t)$  dans  $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille totale, donc une base hil-

bertienne de  $L^2(\mathbb{R})$ .

(iii) Soit  $x \in V_{\frac{\pi}{T}}$ ; par le théorème de Nyquist-Shannon, et par continuité

du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}, \langle x, a_n \rangle_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \langle \sum_{m=-N}^N \sqrt{T} x(mT) a_m, a_n \rangle_2$

$= \langle \sum_{m=-N}^N \sqrt{T} x(mT) a_m, a_n \rangle_2$ ; comme  $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne

de  $V_{\frac{\pi}{T}}$ ,  $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x, a_n \rangle_2 a_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{T} x(nT) a_n$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , soit

dans  $V_{\frac{\pi}{T}}$ .

Cor. Soit  $T > 0$ ; l'application échantillonnage  $\xi$  définie par:

$$\forall x \in V_{\frac{\pi}{T}}, \xi(x) = (x(nT))_{n \in \mathbb{Z}},$$

est un isomorphisme linéaire de  $V_{\frac{\pi}{T}}$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$  d'inverse:

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \xi^{-1}\left((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\right) = \sqrt{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n a_n.$$

De plus, cette application satisfait:

$$\forall x \in V_{\frac{\pi}{T}}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(nT)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Dém. Comme la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_{\frac{\pi}{T}}$ , l'application

$\mathcal{F}$  définie par:  $\forall x \in V_{\frac{\pi}{T}}, \mathcal{F}(x) = (\langle x, a_n \rangle_2)_{n \in \mathbb{Z}}$ , est un isomorphisme

linéaire de  $V_{\frac{\pi}{T}}$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , qui satisfait de plus:  $\forall x \in V_{\frac{\pi}{T}}, \|\mathcal{F}(x)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$

$= \|x\|_2$ ; sachant que  $\forall x \in V_{\frac{\pi}{T}}, \mathcal{F}(x) = \sqrt{T} \xi(x)$  par le théorème pré-

écédent,  $\xi$  est bien un isomorphisme linéaire qui satisfait toutes les propriétés énoncées dans la corollaire précédent.

Rem. Ce résultat garantit qu'étant donné une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de carré sommable,

il est possible de construire un signal analogique  $x$  d'énergie finie dont le signal échantillonné  $(x(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$  est égal à la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . De plus, ce signal analogique  $x$  peut être déterminé de façon unique dans le sous-espace fermé  $V_{\frac{\pi}{T}}$ .

### c. Extensions du théorème de Nyquist-Shannon et problème de recouvrement spectral

Le théorème de Nyquist-Shannon s'étend aux signaux monochromatiques plus de fréquence inférieure à  $\frac{\pi}{T}$ .

Prop: Soit  $T > 0$ . Étant donné un nombre  $w \in ]-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}[$ , posons:

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_w(t) = e^{iwt}$$

alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_w(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ , et satisfait:

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_w(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$$

Dém: Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Considérons la fonction  $\frac{2\pi}{T}$ -périodique définie par:  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}[$ ,

$f_\alpha(t) = e^{i\alpha t}$ ; cette fonction est de classe  $C^2$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , et satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f_\alpha) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{i\alpha t} e^{-in\pi t/T} dt = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(\alpha - nT)\right)$$

d'où par le théorème de Dirichlet,  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}[$ ,  $f_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f_\alpha) x$

$$e^{i\alpha t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\pi t/T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(\alpha - nT)\right);$$

autrement dit, en posant  $w = \alpha$  et  $t = \alpha$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{iwt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\pi t/T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$ .

Cor: Soit  $T > 0$ ; étant donné des coefficients  $(p_k)_{0 \leq k \leq N} \in \mathbb{C}^{N+2}$  et des nombres  $(w_k)_{0 \leq k \leq N} \in ]-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}[$ , considérons la somme trigonométrique  $S$  définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, S(t) = \sum_{k=0}^N p_k e^{i w_k t}$$

alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} S(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ , et satisfait:

$$\forall t \in \mathbb{R}, S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$$

Dém: Par linéarité de la convergence des séries de fonctions, la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} S(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ , avec:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^N p_k e^{i w_k nT} \right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = \sum_{k=0}^N p_k \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i w_k nT} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) \right)$$

$$e^{i\omega k n T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right), \text{ d'où par la proposition précédente, } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = S(t).$$

Lorsque l'une des fréquences  $\omega_k$  n'appartient plus à l'intervalle  $]-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}[$ , la formule précédente n'est plus nécessairement vraie.

Ex. Soit  $\omega \in ]\frac{\pi}{T}, \frac{3\pi}{T}[$ ; posons:  $\forall t \in \mathbb{R}, x_\omega(t) = e^{i\omega t}$ ; par définition,  $\forall n \in \mathbb{Z}, x_\omega(nT) = e^{i\omega n T} = e^{i(\omega - \frac{2\pi}{T})nT}$ ; comme  $|\omega - \frac{2\pi}{T}| < \frac{\pi}{T}$ , par la proposition précédente,  $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_\omega(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \frac{2\pi}{T})nT} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = e^{i(\omega - \frac{2\pi}{T})t} \neq e^{i\omega t} = x_\omega(t)$ .  
Comme la fréquence  $\omega - \frac{2\pi}{T}$  du signal reconstruit par la formule de Nyquist - Shannon est dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}[$ , ce phénomène est appelé repliement spectral.

Cette propriété s'étend aux signaux analogiques d'énergie finie de bande limitée  $(-\omega, \omega)$  telle que  $\omega > \frac{\pi}{T}$ .

Def. Soit  $T > 0$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ . Considérons un signal analogique  $x$  d'énergie finie et de bande limitée  $(-\omega, \omega)$ .

(i) La fonction  $X$  donnée par:

$$\text{p.p. } t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x)\left(\frac{t - \frac{2\pi n}{T}}{T}\right),$$

est bien définie presque partout sur  $\mathbb{R}$ ,  $\frac{2\pi}{T}$ -périodique, et appartient à  $L^2\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right) \cap L^2\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ . De plus, ses coefficients de Fourier (ce  $(X)_n$ ) $_{n \in \mathbb{Z}}$  sont donnés par les formules:

$$\forall h \in \mathbb{Z}, a_h(X) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} x(hT).$$

En particulier, la série  $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |x(hT)|^2$  est convergente.

(ii) La série  $\sum_{h \in \mathbb{Z}} x(hT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - hT)\right)$  est convergente dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et normalement sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

(iii) Soit

$$\text{p.p. } t \in \mathbb{R}, y(t) = X(t) \text{ si } |t| < \frac{\pi}{T}, 0 \text{ sinon.}$$

La fonction  $y$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right).$$

Dém. La démonstration reprend les différentes étapes de la preuve du théorème de Nyquist-Shannon :

Shannon :

(i) Comme la fonction  $x$  est à bande limitée dans  $[-w, w]$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(x)(\xi - \frac{2\pi n}{T})$  est une somme finie pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R} \Rightarrow x$  est bien définie presque partout et  $\frac{2\pi}{T}$ -périodique ; sachant que  $x \in L^2(\mathbb{R})$  est à bande limitée dans  $[-w, w]$ ,  $\mathcal{F}(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow x \in L^2\left(\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]\right) \cap L^2\left(\left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]\right)$   
 $\Rightarrow$  Les coefficients de Fourier  $(c_h(x))_{h \in \mathbb{Z}}$  sont bien définis, et  $\sum_{h=-N}^N c_h(x) e^{ikhT} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x(t)$  dans  $L^2\left(\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]\right)$ .

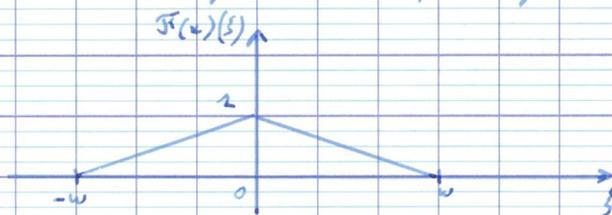
(ii) Comme dans la preuve du théorème de Nyquist-Shannon,  $\forall h \in \mathbb{Z}$ ,  $c_h(x) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} x(-hT)$ , d'où par la formule de Parseval, la convergence de la série  $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |x(hT)|^2$ , puis la convergence normale sur tout segment de  $\mathbb{R}$  de la série  $\sum_{h \in \mathbb{Z}} x(hT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - hT)\right)$ .

(iii) Par continuité de la transformée de Fourier inverse,  $\mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{h=-N}^N c_h(x) e^{ikhT}\right) \chi_{\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]}(\xi) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathcal{F}^{-1}(x)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  ; par la preuve du théorème de Nyquist-Shannon, p.p.t.  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{h=-N}^N c_h(x) e^{ikhT}\right) \chi_{\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]}(\xi)(t) = \sum_{h=-N}^N x(-hT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t + hT)\right)$ , tandis que, puisque  $y \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}^{-1}(y)(t) = y(t) \Rightarrow \sum_{h=-N}^N x(hT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - hT)\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \hat{y}(t)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , puis comme dans la preuve du théorème de Nyquist-Shannon normalement, donc uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

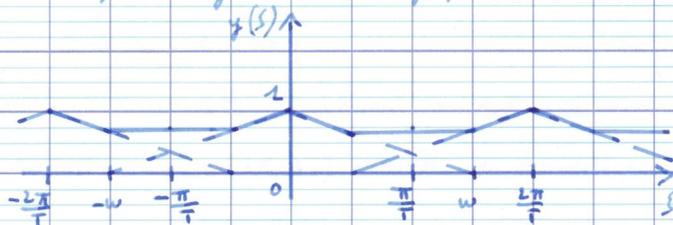
Dém. (i) Lorsque  $w = \frac{\pi}{T}$ , la fonction  $y$  est égale à la fonction  $\mathcal{F}(x)$ , de sorte que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{y}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))(t) = x(t)$ , et nous retrouvons donc le théorème de Nyquist-Shannon.

(ii) Lorsque le signal analogique  $x$  n'est plus à bande limitée dans  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  mais dans  $[-w, w]$  pour  $w > \frac{\pi}{T}$ , la fonction  $y$  comporte sur  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  les valeurs de la fonction  $\mathcal{F}(x)$  sur ce segment auxquelles s'ajoute un nombre fini de valeurs de cette fonction en dehors de ce segment : c'est le phénomène de recouvrement spectral qui conduit au fait que la formule de Nyquist-Shannon ne donne plus la fonction  $x$ , mais la transformée de Fourier inverse de la fonction  $y$ .

Exe: Considérons la fonction  $x$  de spectre égal à :



La fonction  $y$  a alors le graphe suivant :



et elle est donc bien différente de la fonction  $F_x(\omega)$  qui permet de la construire.

Lorsque les signaux analogiques (d'énergie finie) sont à bande limitée dans  $[-\omega, \omega]$  avec  $\omega > \frac{\pi}{T}$ , le problème du recouvrement spectral provient aussi du choix de la cadence  $T$  qui est trop grande pour assurer la condition du théorème de Nyquist - Shannon : on parle de sous-échantillonnage, et il est possible de contourner ce problème en diminuant la cadence  $T$  à la valeur  $\frac{\pi}{\omega}$  pour laquelle ce théorème redevient valable.

Mais, outre le fait qu'il n'est pas toujours possible techniquement de diminuer cette cadence  $T$ , typiquement en raison de contraintes de temps de calcul ou de mémoire, la borne maximale  $\omega$  de la bande limitée n'est en général pas connue, voire n'existe pas lorsque le signal analogique  $x$  considéré n'est en fait pas à bande limitée. Dans ce cas, une manière de remédier au problème du recouvrement spectral consiste alors à échantillonner non pas directement le signal analogique  $x$ , mais une approximation de ce signal qui est à bande limitée dans  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ .

Rappelons ici que la formule de Nyquist - Shannon s'interprète comme une décomposition dans une base hilbertienne du sous-espace fermé  $V_{\frac{\pi}{T}}$  de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ . Dans ce cadre hilbertien, la façon la plus naturelle de

déterminer une approximation d'un signal analogique  $x$  d'énergie finie qui appartient au sous-espace  $V_{\frac{\pi}{T}}$ , est de considérer la projection orthogonale  $\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x$  de ce signal sur le sous-espace  $V_{\frac{\pi}{T}}$ . Rappelons que cette projection orthogonale est bien définie, puisque le sous-espace  $V_{\frac{\pi}{T}}$  est fermé, et qu'elle est caractérisée par les identités:

$$\forall y \in V_{\frac{\pi}{T}}, \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - \mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x(t)) \overline{y(t)} dt = 0,$$

soit par conservation du produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R})$  par la transformation de Fourier:

$$\forall y \in V_{\frac{\pi}{T}}, \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} (\mathcal{F}(x)(\xi) - \mathcal{F}(\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x)(\xi)) \overline{\mathcal{F}(y)(\xi)} d\xi = 0.$$

Ces identités sont satisfaites lorsque:

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x)(\xi) = \begin{cases} \mathcal{F}(x)(\xi) & \text{si } |\xi| \leq \frac{\pi}{T}, \\ 0 & \text{si } |\xi| > \frac{\pi}{T}, \end{cases}$$

et la fonction  $\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x$  ainsi définie appartient bien au sous-espace  $V_{\frac{\pi}{T}}$ .

La conversion analogique - discret se déroule suivant cet argument en deux étapes:

- le filtrage par l'application de la projection orthogonale  $\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}}$  au signal analogique  $x$ ,
- l'échantillonnage à la cadence  $T$  du signal analogique  $\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x$ .

La formule de Poisson - Shannon qui s'applique au signal approché  $\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right),$$

permet ensuite de restituer le signal approché, soit une approximation du signal analogique initial  $x$ .

La projection orthogonale  $\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}}$  est un opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , qui est de plus invariant par translation: étant donné un signal analogique  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et un nombre réel  $a$ , la fonction  $\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}}(\mathcal{L}_a x)$  est égale à la fonction  $\mathcal{L}_a \mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}}(x)$ . Nous avons en effet:

$$\begin{aligned} \text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}}(\mathcal{L}_a x))(\xi) &= \mathcal{F}(\mathcal{L}_a x)(\xi) \text{ si } |\xi| \leq \frac{\pi}{T}, 0 \text{ sinon} \\ &= e^{-i a \xi} \mathcal{F}(x)(\xi) \text{ si } |\xi| \leq \frac{\pi}{T}, 0 \text{ sinon} \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{L}_a \mathcal{L}_{V_{\frac{\pi}{T}}}(x))(\xi), \end{aligned}$$

soit l'égalité  $P_{V_{\frac{\pi}{T}}}(T_n x) = T_n P_{V_{\frac{\pi}{T}}}(x)$  par bijectivité de la transformation de Fourier. La projection orthogonale  $P_{V_{\frac{\pi}{T}}}$  appartient donc à la classe des filtres analogiques que nous allons désormais étudier : il s'agit du filtre passe-bas idéal associé à la bande  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ .

## II Filtrage analogique

Dans toute cette partie, la notation  $X$  désigne l'ensemble des signaux analogiques d'entrée, tandis que la notation  $Y$  désigne l'ensemble des signaux analogiques de sortie. Ces deux ensembles seront supposés être des espaces vectoriels de fonctions réelles, normés par les normes  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_Y$ . Les exemples typiques d'espaces de signaux considérés seront donc donnés par les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$  munis de leur norme canonique  $\|\cdot\|_p$  pour  $p \geq 1$ , et de l'espace des fonctions continues bornées  $C_b^0(\mathbb{R})$  munis de la norme uniforme  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

### 1. Définition et exemples de filtres analogiques

Avant de donner la définition d'un filtre analogique de  $X$  dans  $Y$ , nous introduisons les notions qui interviennent dans cette définition, à commencer par la notion d'opérateur linéaire continu de  $X$  dans  $Y$ .

Déf: Soit  $A: X \rightarrow Y$ . L'application  $A$  est un opérateur linéaire continu de  $X$  dans  $Y$  si et seulement si :

(i)  $A$  est linéaire de  $X$  dans  $Y$ , c'est-à-dire que :

$$\forall (\lambda, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times X^2, A(\lambda x_1 + x_2) = \lambda A(x_1) + A(x_2).$$

(ii)  $A$  est continue de  $X$  dans  $Y$ , c'est-à-dire que :

$$\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in X, \|x - x_0\|_X \leq \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y \leq \varepsilon.$$

Exe: Soit  $\tau > 0$ ; la ligne à retard  $R_{\tau}$  est définie par :

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \text{ p.p.t. } t \in \mathbb{R}, R_{\tau} x(t) = x(t - \tau),$$

est un opérateur linéaire continu de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$ .

Rem: Parfois, un opérateur linéaire continu  $A$  est simplement désigné sous le terme d'opérateur continu, tout opérateur étant dans ce cas supposé linéaire.

Thm: Soit  $A: X \rightarrow Y$  une application linéaire. L'opérateur  $A$  est continu de  $X$  dans  $Y$  ssi il existe un nombre  $K \geq 0$  tel que:

$$\forall x \in X, \|Ax\|_Y \leq K \|x\|_X.$$

Dans ce cas, le nombre

$$\|A\| = \inf \{ K \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in X, \|Ax\|_Y \leq K \|x\|_X \},$$

est appelé norme (d'opérateur) de l'opérateur  $A$ .

Dém:  $\Rightarrow$  Sachant que  $A$  est continue en 0,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.q., si  $\|x\|_X \leq \delta$ , alors:

$$\|Ax\|_Y \leq \varepsilon; \text{ comme } \forall \kappa \neq 0, \left\| \frac{\delta x}{\|x\|_X} \right\|_X \leq \delta, \left\| A \left( \frac{\delta x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y \leq \varepsilon, \text{ d'où par linéarité, } \|Ax\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|x\|_X.$$

$$\Leftarrow \text{Par linéarité, } \forall (x, \kappa) \in X^2, \|Ax - A x_0\|_Y = \|A(x - x_0)\|_Y \leq K \|x - x_0\|_X$$

$$\Rightarrow A(x) \rightarrow A(x_0) \text{ lorsque } x \rightarrow x_0 \text{ dans } X, \text{ d'où la continuité de l'opérateur } A.$$

Ex: Soit  $\alpha > 0$ ; la ligne à retard  $R_\alpha$  vérifie:  $\forall x \in \mathcal{L}_b^0(\mathbb{R}), \|R_\alpha x\|_\infty = \|x\|_\infty \Rightarrow$  La ligne à retard  $R_\alpha$  est continue de  $\mathcal{L}_b^0(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{L}_b^0(\mathbb{R})$ .

Nous définissons ensuite la notion d'applications invariantes par translation. Soulignons ici que les espaces des signaux d'entrée  $X$  et de sortie  $Y$  doivent pour cette nouvelle notion être des espaces de fonctions réelles sur lesquels l'opération de translation:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{R}, \mathcal{T}_a x(t) = x(t-a),$$

est bien définie.

Déf: Soit  $A: X \rightarrow Y$ . L'application  $A$  est invariante par translation ssi:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in X, A(\mathcal{T}_a x) = \mathcal{T}_a Ax.$$

Ex: Soit  $T > 0$ ; le filtre à moyenne glissante  $\Pi_T$  défini par:

$$\forall x \in \mathcal{L}_b^0(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \Pi_T x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds,$$

est invariant par translation, puisque:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{L}_b^0(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \Pi_T (\mathcal{T}_a x)(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s-a) ds \stackrel{y=s-a}{=} \frac{1}{T} \int_{t-T-a}^{t-a} x(s) ds$$

$$\frac{1}{T} \int_{t-a-T}^{t-a} x(y) dy = \mathcal{E}_a \Pi_T(x)(t).$$

Rem: Même si les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$  ne sont pas à proprement parler des espaces de fonctions réelles, cette définition s'étend sans difficulté à ces espaces, puisque les opérateurs de translation sont bien définis sur ces espaces par les formules:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in L^p(\mathbb{R}), \text{ p.p.t. } t \in \mathbb{R}, \mathcal{E}_a x(t) = x(t-a).$$

Ex: Soit  $q > 0$ ; l'amplificateur idéal  $A_q$  défini par:

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \text{ p.p.t. } t \in \mathbb{R}, A_q x(t) = q x(t),$$

est invariant par translation, puisque:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in L^2(\mathbb{R}), \text{ p.p.t. } t \in \mathbb{R}, A_q \mathcal{E}_a x(t) = q x(t-a) = \mathcal{E}_a A_q x(t).$$

Grâce aux définitions précédentes, nous pouvons introduire la notion de filtre analogique de  $X$  dans  $Y$ .

Déf: Soit  $A: X \rightarrow Y$ . L'application  $A$  est un filtre analogique de  $X$  dans  $Y$  si:

- (i)  $A$  est un opérateur linéaire continu de  $X$  dans  $Y$ .
- (ii)  $A$  est invariant par translation.

Ex: (i) Pour  $q > 0$ , l'amplificateur idéal  $A_q$  est un filtre analogique de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$ .

(ii) Pour  $a \in \mathbb{R}$ , la ligne à retard  $R_a$  est un filtre analogique de  $\mathcal{E}_b^0(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}_b^0(\mathbb{R})$ .

(iii) Pour  $T > 0$ , le filtre à moyenne glissante  $\Pi_T$  est un filtre analogique de  $\mathcal{E}_b^0(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}_b^0(\mathbb{R})$ .

(iv) Rappelons que le circuit RC est défini comme l'application qui, à un signal d'entrée  $x$ , associe la solution  $y$  de l'équation différentielle ordinaire:

$$\forall t \in \mathbb{R}, RC y'(t) + y(t) = x(t).$$

Cette solution n'est pas complètement déterminée par cette équation différentielle. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il suffit de fixer la valeur  $y(0)$  de cette solution pour la déterminer de façon unique.

Dans le cas où la fonction  $x$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , la solution  $y$  donnée par la formule:

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{-\frac{t}{RC}} y(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds,$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et nous pouvons déterminer la valeur  $y(0)$  de sorte que cette solution soit aussi bornée sur  $\mathbb{R}$ ; sachant que la fonction  $x$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 x(s) e^{-\frac{s}{RC}} ds$  est bien définie, et nous pouvons donc poser:  $y(0) = \int_{-\infty}^0 x(s) e^{-\frac{s}{RC}} ds$ . Pour ce choix spécifique, la solution  $y$  donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds,$$

dépend de plus linéairement de la fonction  $x \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ , et elle satisfait:

$$(i) \forall t \in \mathbb{R}, |y(t)| \leq \frac{\|x\|_{\infty}}{RC} \left( \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} ds \right) e^{-\frac{t}{RC}} = \|x\|_{\infty},$$

d'où le caractère borné de la solution  $y$ .

$$(ii) \forall a \in \mathbb{R}, y_a(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s-a) ds \stackrel{u=t-a}{=} \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{t-a} e^{-\frac{u-(t-a)}{RC}} x(u) du = \mathcal{T}_a y(t).$$

En conclusion, l'opération  $\mathcal{RC}: x \mapsto y$  est bien définie, linéaire et continue de  $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ , et de plus invariante par translation: il s'agit donc d'un filtre analogique de  $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ .

## 2. Filtrés convolutifs, réponse impulsionnelle et fonction de transfert

Dans le cas où les espaces  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$ , ou l'espace  $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$  des fonctions continues et bornées sur  $\mathbb{R}$ , les filtres convolutifs constituent une classe importante de filtres analogiques.

Prop: (i) Soit  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ . Notons  $r \geq 1$  le nombre réel tel que:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ . Étant donnée une fonction  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , l'application  $\mathbb{F}_h$  définie par:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}), \mathbb{F}_h(f) = h * f,$$

est bien définie de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^q(\mathbb{R})$ , et constitue un filtre analogique de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^q(\mathbb{R})$ .

(ii) Soit  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Étant donnée une fonction  $h \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ , l'application  $\mathbb{F}_h$  donnée par:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}), \mathbb{F}_h(f) = h * f,$$

est bien définie de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ , et constitue un filtre analogique que de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ .

(iii) Étant donnée une fonction  $h \in L^2(\mathbb{R})$ , l'application  $\mathbb{F}_h$  donnée par:

$$\forall f \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}), \mathbb{F}_h(f) = h * f,$$

est bien définie de  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ , et constitue un filtre analogique de  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ .

(iv) Étant donnée une fonction  $h \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ , l'application  $\mathbb{F}_h$  donnée par:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \mathbb{F}_h(f) = h * f,$$

est bien définie de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ , et constitue un filtre analogique de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ .

Dém: (i) Dans les cas (i) et (ii), la définition des applications  $\mathbb{F}_h$  repose sur l'inégalité de Young; par linéarité du produit de convolution, et à nouveau par l'inégalité de Young,  $\mathbb{F}_h$  est toujours un opérateur linéaire continu.

(ii) Dans les cas (iii) et (iv), considérons deux fonctions  $f_1 \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$  et  $f_2 \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ ;

$$\text{quel que soit } x \in \mathbb{R}, \text{ p.p.t } y \in \mathbb{R}, |f_1(x-y) f_2(y)| \leq \|f_1\|_\infty |f_2(y)| \Rightarrow$$

la fonction  $y \mapsto f_1(x-y) f_2(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , ce qui assure que  $f_1 * f_2(x)$

est bien défini; p.p.t  $y \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto f_1(x-y) f_2(y)$  est continue sur

$\mathbb{R}$ , d'où par l'inégalité précédente, et la thèse de continuité sous le

signe intégral,  $f_1 * f_2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et satisfait:  $\|f_1 * f_2\|_\infty$

$$\leq \|f_1\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(y)| dy = \|f_1\|_\infty \|f_2\|_1 \Rightarrow f_1 * f_2 \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R});$$

dans les cas (iii) et (iv), les applications  $\mathbb{F}_h$  sont donc bien définies, et

par linéarité du produit de convolution, et l'inégalité précédente, cons-

tituent des opérateurs linéaires continus de  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ , ou de  $L^2(\mathbb{R})$

dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ .

(iii) Dans tous les cas, quel que soit  $a \in \mathbb{R}$ , p.p.t  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{F}_h(\mathcal{R}_a f)(t) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s) f(s-a) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-a-y) f(y) dy = \mathcal{R}_a \mathbb{F}_h(f)(t) \Rightarrow \mathbb{F}_h$$

est invariant, donc un filtre analogique.

Déf: Un filtre analogique  $A$  est appelé filtre convolutif s'il existe une fonction  $h \in L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$ , ou  $h \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ , telle que  $A$  est égal à l'un des

filtres analogiques  $\mathbb{F}_R$  définis dans la proposition précédente.

Dans ce cas, la fonction  $h$  associée au filtre analogique  $A$  est définie de façon unique et s'appelle la réponse impulsionnelle du filtre  $A$ .

Dém: (i) Supposons que'il existe deux fonctions  $h_1$  et  $h_2$  telles que  $\mathbb{F}_{R_1} = \mathbb{F}_{R_2}$ , et considérons une approximation de l'identité  $(p_n)_{n \geq 0}$  formée de fonctions continues à support compact; dans tous les cas,  $\mathbb{F}_{R_1}(p_n) = \mathbb{F}_{R_2}(p_n) \Rightarrow h_1 * p_n = h_2 * p_n$ .

(ii) Lorsque  $(h_1, h_2) \in L^p(\mathbb{R})^2$  pour  $p \geq 1$ , par le théorème de convergence des approximations de l'identité,  $h_1 * p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h_1$  et  $h_2 * p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h_2$  dans  $L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow h_1 = h_2$ .

(iii) Supposons enfin que  $(h_1, h_2) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})^2$ ; pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$  finis, il existe  $\delta > 0$  t.q.  $\forall y \in \mathbb{R}, |y| \leq \delta \Rightarrow |h_1(x-y) - h_2(x-y)| \leq \varepsilon \Rightarrow |h_1 * p_n(x) - h_2 * p_n(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(x-y) - h_2(x-y)| |p_n(y)| dy \leq \varepsilon \int_{|y| \leq \delta} |p_n(y)| dy + 2 \|h_2\|_\infty \int_{|y| > \delta} |p_n(y)| dy$ ; sachant que  $(\|p_n\|_{L^1})_{n \geq 0}$  est bornée, et que  $\int_{|y| > \delta} |p_n(y)| dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , nous concluons que:  $h_1 * p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h_2(x)$ ; de même,  $h_2 * p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h_1(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, h_1(x) = h_2(x) \Rightarrow h_1 = h_2$ .

Ex: (i) Soit  $T > 0$ ; le filtre à moyenne glissante  $\Pi_T$  donné par:

$$\forall x \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \Pi_T x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds,$$

est un filtre convolutif de réponse impulsionnelle:  $h = \frac{1}{T} \mathbf{1}_{(0, T)} \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\text{puisque: } \forall t \in \mathbb{R}, \Pi_T x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s) x(s) ds.$$

(ii) Considérons le filtre  $R_C$  défini par:

$$\forall x \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, R_C x(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds.$$

Ce filtre est un filtre convolutif de réponse impulsionnelle donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ si } t \geq 0, \text{ sinon.}$$

Pour ces filtres analogiques de  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$ , ou de  $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ , dans les espaces  $L^1(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$  ne sont pas des filtres convolutifs au sens de la définition précédente.

Ex: Pour  $q > 0$ , considérons l'amplificateur idéal  $A_q$  défini sur  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$  par:

$\forall f \in L^p(\mathbb{R}), A_q f = qf$ , et supposons que ce filtre analogique de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^p(\mathbb{R})$  est convolutif, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $h \in L^1(\mathbb{R})$  telle que:  $\forall f \in L^p(\mathbb{R}),$

$$A_q f = h * f; \text{ étant donnée une fonction } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1,$$

Les fonctions  $(p_n)_{n \geq 1}$  définies par:  $\forall n \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}, p_n(t) = n p_n(t)$  forment une approximation de l'identité; comme  $\forall n \geq 1, p_n \in L^p(\mathbb{R}), q p_n = A_1(p_n) = h * p_n$ ; par le théorème de convergence des approximations de l'identité,  $h * p_n \rightarrow h$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ , dans quelle mesure, p.p.  $t \in \mathbb{R}, h * p_n(t) \rightarrow h(t)$ ; comme  $q p_n(t) \rightarrow 0$  p.p.,  $h = 0$ , ce qui assure que  $\forall f \in L^p(\mathbb{R}), q f = 0$ , et se révèle donc absurde!

Grâce au théorème de Riesz, nous pouvons néanmoins assurer que tous les filtres analogues de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$  sont convolutifs.

Thém de Riesz: Soit  $A: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , une application linéaire continue. Il existe une unique fonction  $h \in L^2(\mathbb{R})$  telle que:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), A f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h(t) dt.$$

Dém: (i) unicité si existence: si  $(h_1, h_2) \in L^2(\mathbb{R})^2$  satisfait  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h_1(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h_2(t) dt$ , alors:  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \langle f, h_1 - h_2 \rangle_2 = 0 \Rightarrow \|h_1 - h_2\|_2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2$ .

(ii) existence: si  $A = 0$ , alors, la fonction  $h$  identiquement nulle convient; sinon,  $H = \text{Ker}(A) = A^{-1}(\{0\})$  est un sous-espace vectoriel fermé différent de  $L^2(\mathbb{R})$  de  $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow L^2(\mathbb{R}) = H \oplus H^\perp$ , avec  $H^\perp \neq \{0\}$ ; considérons alors une fonction  $h \in H^\perp$  telle que  $A(h) = 1$ ; si  $f \in H^\perp$ , alors,  $A(f - A(f)h) = A(f) - A(f)A(h) = 0 \Rightarrow f - A(f)h \in H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow f = A(f)h \Rightarrow H^\perp = \text{Vect}(h) \Rightarrow \forall f = f_H + t_f h \in L^2(\mathbb{R}), A(f) = A(f_H) + t_f A(h) = t_f = \langle f, h \rangle_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h(t) dt.$

Cor: Soit  $T: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  un filtre analogique. Il existe une unique fonction  $h \in L^2(\mathbb{R})$  telle que:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), T(f) = h * f.$$

En particulier,  $T$  est un filtre convolutif de réponse impulsionnel  $h$ .

Dém: (i) Soit  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), A(f) = T(f)(0)$ ;  $A$  est bien définie et linéaire de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ , avec:  $\forall (f, g) \in L^2(\mathbb{R})^2, |A(f) - A(g)| \leq \|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \|T\| \times \|f - g\|_2 \Rightarrow A$  est continue sur  $L^2(\mathbb{R})$ , donc d'après le théorème de

De plus, il existe une fonction  $g \in L^1(\mathbb{R})$  telle que:  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), T(f)(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$ .

(ii) Soit  $a \in \mathbb{R}$ ; par invariance par translation,  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{E}_{-a} T(f) = T(\mathcal{E}_a f)$   
 $\Rightarrow T(f)(a) = \mathcal{E}_{-a} T(f)(0) = T(\mathcal{E}_a f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t+a) dt \stackrel{t \rightarrow t+a}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-a) f(t) dt$ ; si p.p.  $t \in \mathbb{R}, h(t) = g(t-a)$ , alors  $h \in L^2(\mathbb{R})$ , et  $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  
 $\forall t \in \mathbb{R}, T(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s) f(s) ds = h * f(t) \Rightarrow T(f) = h * f$ ; l'unicité de la fonction  $h$  découle alors de l'unicité de la réponse impulsionnelle d'un filtre convolutif.

Rem: Pour  $p > 1$ , la thèse de Wiener s'étend aux espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$  de la façon suivante; soit  $q > 1$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ; étant donnée une application linéaire continue  $T$  de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe une unique fonction  $h \in L^q(\mathbb{R})$  telle que:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}), T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) f(t) dt.$$

Par la même preuve que celle du corollaire précédent, il est alors possible de vérifier que tout filtre analogique de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$  est convolutif.

Ex: Considérons le filtre analogique défini par:

$$\forall x \in L^p(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, R_C x(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds.$$

Ce filtre analogique de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$  est un filtre convolutif de réponse impulsionnelle donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ si } t \geq 0, 0 \text{ sinon.}$$

En particulier, la fonction  $h$  appartient bien à tous les espaces  $L^q(\mathbb{R})$  pour  $q \geq 1$ .

Il est aussi possible de décrire l'action d'un filtre analogique via la transformation de Fourier (lorsque celle-ci fait sens). Cette description conduit à l'introduction de la fonction de transfert d'un filtre analogique.

Théorème: Soit  $T: \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ , un filtre analogique. Quel que soit le nombre  $\omega \in \mathbb{R}$ , il existe un nombre  $H(\omega) \in \mathbb{C}$  tel que la fonction  $e_{\omega}$  définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_{\omega}(t) = e^{i\omega t},$$

satisfait:

$$T(e_{\omega}) = H(\omega) e_{\omega}.$$

La fonction  $H$  ainsi définie est appelée fonction de transfert du filtre  $T$ .

Dém: Comme  $e^{i\omega t} \in \mathcal{L}_b^0(\mathbb{R})$ ,  $f_\omega = T(e^{i\omega t})$  est bien définie et appartient à  $\mathcal{L}_b^0(\mathbb{R})$ ; sachant que  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{L}_a e^{i\omega t} = e^{-i\omega a} e^{i\omega t}$ ,  $T(\mathcal{L}_a e^{i\omega t}) = e^{-i\omega a} T(e^{i\omega t}) = e^{-i\omega a} f_\omega$ ; par invariance par translation du filtre,  $T(\mathcal{L}_a e^{i\omega t}) = \mathcal{L}_a T(e^{i\omega t}) = \mathcal{L}_a f_\omega \Rightarrow \mathcal{L}_a f_\omega = e^{-i\omega a} f_\omega \stackrel{t=0}{\Rightarrow} f_\omega(-a) = e^{-i\omega a} f_\omega(0) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, f_\omega(t) = e^{i\omega t} f_\omega(0) \Rightarrow T(e^{i\omega t}) = H(\omega) e^{i\omega t}$ , avec  $H(\omega) = f_\omega(0)$ .

Ex: Soit  $T > 0$ ; le filtre à moyenne glissante  $\Pi_T$  défini par:

$$\forall x \in \mathcal{L}_b^0(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \Pi_T x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds,$$

$$\text{satisfait: } \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \Pi_T e^{i\omega t} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t e^{i\omega s} ds = \frac{e^{i\omega t} - e^{i\omega(t-T)}}{i\omega} = H(\omega) e^{i\omega t},$$

$$\tilde{m}: H(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega T}}{i\omega T}.$$

Dans le cas d'un filtre convolutif, la fonction de transfert  $H$  est reliée à la réponse impulsionnelle par la transformation de Fourier.

Déf: Soit  $h \in L^1(\mathbb{R})$ . Considérons le filtre convolutif  $\mathbb{F}_h$  défini de  $\mathcal{L}_b^0(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{L}_b^0(\mathbb{R})$  par la formule:

$$\forall f \in \mathcal{L}_b^0(\mathbb{R}), \mathbb{F}_h(f) = h * f.$$

La fonction de transfert  $H$  du filtre convolutif  $\mathbb{F}_h$  est égale à:

$$H = \sqrt{2\pi} \hat{h}.$$

Dém: Comme  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $e^{i\omega t} \in \mathcal{L}_b^0(\mathbb{R})$ , par définition du filtre  $\mathbb{F}_h$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{F}_h e^{i\omega t}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s) e^{i\omega s} ds \stackrel{u=t-s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{i\omega(t-u)} du = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-i\omega u} du \Rightarrow H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-i\omega u} du = \sqrt{2\pi} \hat{h}(\omega).$

Ex: Considérons le filtre RC donné par:

$$\forall x \in \mathcal{L}_b^0(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \text{RC } x(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds,$$

et rappelons que sa réponse impulsionnelle  $h$  est égale à:

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ si } t \geq 0, 0 \text{ sinon.}$$

$$\text{Par la proposition précédente, } \forall \omega \in \mathbb{R}, H(\omega) = \frac{1}{RC} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{1 + i\omega RC}.$$

Cette proposition permet d'étendre la notion de fonction de transfert aux filtres con-

relatifs de réponse impulsionnelle dans  $L^2(\mathbb{R})$  ou dans  $L^2(\mathbb{R})$  (et plus généralement dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $1 \leq p \leq 2$ ).

Déf: (i) Soit  $h \in L^2(\mathbb{R})$  et  $p \geq 1$ ; la fonction de transfert  $H$  du filtre convolutif  $\mathbb{F}_h$  défini de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^p(\mathbb{R})$  par:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}), \mathbb{F}_h(f) = h * f,$$

est définie par:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, H(\omega) = \sqrt{2\pi} \widehat{h}(\omega).$$

(ii) Soit  $h \in L^2(\mathbb{R})$  et  $1 \leq p \leq 2$ ; la fonction de transfert  $H$  du filtre convolutif  $\mathbb{F}_h$  défini de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^{\frac{p}{2-p}}(\mathbb{R})$  si  $1 \leq p < 2$ , respectivement dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  si  $p=2$ , par:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}), \mathbb{F}_h(f) = h * f,$$

est définie par:

$$\text{p.p. } \omega \in \mathbb{R}, H(\omega) = \sqrt{2\pi} \widehat{h}(\omega).$$

Ex: Soit  $p \geq 1$ ; le filtre RC donné par:

$$\forall x \in L^p(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, RC x(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t-s}{RC}} f(s) ds,$$

$$\text{a pour fonction de transfert: } \forall \omega \in \mathbb{R}, H(\omega) = \frac{1}{1+iRC\omega}.$$

Prop: (i) Soit  $h \in L^2(\mathbb{R})$ ; considérons le filtre convolutif  $\mathbb{F}_h$  de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , ou de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , donné par:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ (ou } \forall f \in L^2(\mathbb{R})), \mathbb{F}_h(f) = h * f.$$

$$\text{alors: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\mathbb{F}_h(f)}(\xi) = H(\xi) \widehat{f}(\xi) \text{ (respectivement p.p. } \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\mathbb{F}_h(f)}(\xi) = H(\xi) \widehat{f}(\xi)).$$

(ii) Soit  $h \in L^2(\mathbb{R})$ ; considérons le filtre convolutif  $\mathbb{F}_h$  de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  défini par:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \mathbb{F}_h(f) = h * f.$$

$$\text{alors: p.p. } \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\mathbb{F}_h(f)}(\xi) = H(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Dém: Ces formules découlent des définitions précédentes et des formules pour la transformée de Fourier d'un produit de convolution.

Ex: Soit  $T > 0$ , considérons le filtre à moyenne glissante  $\Pi_T$  donné par:

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \Pi_T x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds,$$

et rappelons que sa réponse impulsionnelle  $h$  est donnée par:  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$h(t) = \frac{1}{T} \mathbb{1}_{[0, T)}(t)$ , tandis que sa fonction de transfert vaut:  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,

$$H(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega T}}{i\omega T}; \text{ alors: p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \Pi_T \hat{x}(\xi) = \frac{1 - e^{-i\xi T}}{i\xi T} \hat{x}(\xi).$$

Rem: Une fonction de transfert apparaît donc comme le facteur multiplicatif qui relie (lorsqu'elles ont un sens) la transformée de Fourier du filtre convolutif  $\Pi_T$  appliquée à la fonction  $f$ , et celle de la fonction  $f$ . Cette formule se généralise au cadre des distributions tempérées dans lequel les transformées de Fourier  $\hat{f}(\xi)$  et  $\hat{f}$  peuvent avoir un sens généralisé.

### 3. Propriétés des filtres analogiques

Considérons deux espaces vectoriels normés  $X$  et  $Y$  de fonctions réelles et commençons par définir la notion de causalité pour un filtre analogique de  $X$  dans  $Y$ .

Déf: Soit  $A$  un filtre analogique de  $X$  dans  $Y$ . Un filtre  $A$  est causal ou réalisable si, quel que soit le nombre  $t_0 \in \mathbb{R}$ , dès que deux signaux analogiques  $x_1 \in X$  et  $x_2 \in X$  satisfont:

$$\forall t \leq t_0, x_1(t) = x_2(t),$$

alors les signaux analogiques  $Ax_1$  et  $Ax_2$  satisfont aussi:

$$\forall t \leq t_0, Ax_1(t) = Ax_2(t).$$

Ex: Soit  $T > 0$ ; considérons le filtre à moyenne glissante  $\Pi_T$  défini par:

$$\forall x \in \mathcal{E}_b^0(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \Pi_T x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds.$$

Étant donné un nombre réel  $t_0$ , et deux signaux  $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}_b^0(\mathbb{R})^2$  tels que:

$$\forall t \leq t_0, x_1(t) = x_2(t), \text{ nous vérifions que: } \forall t \leq t_0, \Pi_T x_1(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x_1(s) ds = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x_2(s) ds = \Pi_T x_2(t), \text{ ce qui assure la causalité du filtre à moyenne glissante } \Pi_T.$$

Rem: La notion de causalité est naturelle: elle exprime le fait que le signal de sortie au temps  $t$  ne dépend que du passé antérieur à  $t$ . Il s'agit en particulier d'une condition nécessaire pour que le système soit physiquement réalisable.

La proposition suivante donne une caractérisation équivalente de la causalité d'un filtre analogique.

Prop: Soit  $A$  un filtre analogique de  $X$  dans  $Y$ . Le filtre  $A$  est causal ssi, quel que soit le signal analogique  $x \in X$  tel que  $\forall t \leq 0, x(t) = 0$ , le signal de sortie  $Ax$  satisfait:

$$\forall t \leq 0, Ax(t) = 0.$$

Dém:  $\Rightarrow$  Lorsque  $\forall t \leq 0, x(t) = 0, \forall t \leq 0, Ax(t) = A0 = 0$ .

$\Leftarrow$  Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $(x_1, x_2) \in X^2$  tels que:  $\forall t \leq t_0, x_1(t) = x_2(t)$ ; si nous posons  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = x_2(t+t_0) - x_1(t+t_0)$ , alors:  $\forall t \leq 0, y(t) = 0 \Rightarrow Ay(t) = 0$ ; comme  $y = \mathcal{E}_{-t_0} x_2 - \mathcal{E}_{-t_0} x_1, Ay = \mathcal{E}_{-t_0} Ax_2 - \mathcal{E}_{-t_0} Ax_1$ , d'où par invariance par translation de  $A, \forall t \leq 0, Ax_2(t+t_0) = Ax_1(t+t_0) \Rightarrow \forall t \leq t_0, Ax_2(t) = Ax_1(t)$ , d'où la causalité du filtre analogique  $A$ .

Ex: Considérons le filtre RC donné par la formule:

$$\forall x \in \mathcal{E}_0^1(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, RCx(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds.$$

Lorsque  $\forall t \leq 0, x(t) = 0, \forall t \leq 0, RCx(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} 0 ds = 0$ , d'où la causalité du filtre analogique RC.

Dans le cas d'un filtre convolutif, la causalité se caractérise de la façon suivante.

Prop: Considérons un filtre convolutif  $\mathbb{F}_R$  de réponse impulsionnelle  $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  défini par:

$$\forall f \in \mathcal{E}_0^1(\mathbb{R}), \mathbb{F}_R(f) = h * f.$$

Le filtre  $\mathbb{F}_R$  est causal ssi:

$$\text{p.p.t. } t \leq 0, h(t) = 0.$$

Dém: (i)  $\Rightarrow$  Soit  $p \in \mathcal{E}_0^{\infty}(\mathbb{R})$  telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$ ; notons  $R > 0$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus ]-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}[$ ,  $p(t) = 0$ , et considérons l'approximation de l'identité  $(p_n)_{n \geq 0}$  définie par  $\forall n \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, p_n(t) = 2^n p(2^n t)$ ; par définition des fonctions  $(p_n)_{n \geq 0}, \forall t \in \mathbb{R} \setminus ]-\frac{R}{2^n}, \frac{R}{2^n}[$ ,  $p_n(t) = 0$ ; en particulier,  $\forall t_0 \leq 0, \exists N \geq 0$  t.q.  $\forall n \geq N, \forall t \leq 0, p_n(t_0+t) = 0$ , d'où par causalité du filtre  $\mathbb{F}_R, \forall t \leq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s) p_n(s) ds = 0$ .

+a)  $ds = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t+b_0-u) p_n(u) du = 0$ ; comme  $(p_n)_{n \geq 0}$  est une approximation de l'identité, quitte à élargir,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t+b_0-u) p_n(u) du \rightarrow h(t+b_0)$  p.p.t.  $t \in \mathbb{R}$ , d'où p.p.t.  $t \leq 0$ ,  $h(t+b_0) = 0$ ; sachant que  $t_0 < 0$  est quelconque, p.p.t.  $t \leq 0$ ,  $h(t) = 0$ .

(ii)  $\Leftarrow$  Soit  $f \in \mathcal{E}_0^s(\mathbb{R})$  telle que  $\forall t \leq 0, f(t) = 0$ ;  $\forall t \leq 0, \mathbb{F}h(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^t h(t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^t h(t-s) \cdot 0 ds = 0 \Rightarrow \mathbb{F}h$  est causal.

Ex: Considérons le filtre RC donné par la formule:

$$\forall x \in \mathcal{E}_0^s(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, RCx(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds,$$

et rappelons que la réponse impulsionnelle de ce filtre est égale à:  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ si } t \geq 0, 0 \text{ sinon, d'où la causalité du filtre RC.}$$

Rem: La preuve précédente, et par suite la proposition précédente, s'étendent de façon identique à tous les filtres convolutifs de  $L^1(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{E}_0^s(\mathbb{R})$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  ou dans  $\mathcal{E}_0^s(\mathbb{R})$  que nous avons précédemment définis.

Introduisons maintenant la notion de stabilité d'un filtre analogique de  $X$  dans  $Y$ .

Def: Soit  $A$  un filtre analogique de  $X$  dans  $Y$ . Le filtre  $A$  est stable ssi il existe un nombre  $C > 0$  tel que, quel que soit le signal d'entrée  $x \in \mathcal{E}_0^s(\mathbb{R}) \cap X$ , le signal de sortie  $Ax$  appartient à  $\mathcal{E}_0^s(\mathbb{R}) \cap Y$ , et satisfait:

$$\|Ax\|_{\infty} \leq C \|x\|_{\infty}.$$

Ex: Soit  $q > 0$ ; considérons l'amplificateur idéal  $A_q$  donné par:

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), A_q x = qx.$$

Comme  $\forall x \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}_0^s(\mathbb{R}), \|A_q x\|_{\infty} = q \|x\|_{\infty}$ , l'amplificateur idéal  $A_q$  est stable.

Rem: La notion de stabilité signifie donc comme attendu que, lorsque le signal d'entrée d'un filtre analogique est contrôlé en amplitude, le signal obtenu en sortie de ce filtre reste contrôlé en amplitude. Autrement dit, l'amplitude en sortie ne peut exploser en raison d'instabilité propre au filtre analogique considéré.

Dans le cas d'un filtre convolutif, la stabilité se caractérise de la façon suivante.

Déf: Soit  $p \geq 1$ . Un filtre convolutif  $\mathbb{F}_R$  de réponse impulsionnelle  $h$  défini par:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}), \mathbb{F}_R(f) = h * f,$$

est stable lorsque  $h \in L^1(\mathbb{R})$ .

Dém: Par l'inégalité de Young, lorsque  $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$ , la fonction  $\mathbb{F}_R(f)$  est dans  $\mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$ , et elle satisfait:  $\|\mathbb{F}_R(f)\|_\infty \leq \|h\|_1 \|f\|_p \Rightarrow$  Le filtre convolutif  $\mathbb{F}_R$  est stable.

Ex: Considérons le filtre RC donné par la formule:

$$\forall x \in L^p(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, RCx(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds.$$

Sachant que ce filtre est convolutif de réponse impulsionnelle:  $\forall s \in \mathbb{R}, h(s) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{s}{RC}}$  si  $s \geq 0$ , 0 sinon, intégrable sur  $\mathbb{R}$ , il est stable.

Dém: Soit  $h \in L^1(\mathbb{R})$ ; dans le cas où le filtre convolutif  $\mathbb{F}_R$  de réponse impulsionnelle  $h$  est défini sur  $\mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$ , il est automatiquement stable en tant qu'opérateur linéaire continu de  $\mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$ .

Lorsque la réponse impulsionnelle  $h$  d'un filtre convolutif  $\mathbb{F}_R$  est intégrable, il est possible de définir sa réponse indicielle, son gain et son temps de réponse.

Déf: Pour  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , considérons le filtre convolutif  $\mathbb{F}_R$  défini sur  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$  ou sur  $\mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$  par le produit de convolution:

$$\mathbb{F}_R(f) = h * f.$$

(i) La réponse indicielle du filtre  $\mathbb{F}_R$  est définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, h_1(t) = \int_{-\infty}^t h(s) ds.$$

(ii) Le gain  $K$  du filtre  $\mathbb{F}_R$  est défini par:

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) ds.$$

(iii) Le temps de réponse  $\alpha_R$  du filtre  $\mathbb{F}_R$  est défini par:

$$\alpha_R = \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \text{ t.g. } |h_1(t) - K| \leq \frac{K}{20} \right\}.$$

Ex: (i) Soit  $T > 0$ ; considérons le filtre à moyenne glissante  $M_T$  défini par:

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, M_T x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds,$$

et rappelons que'il s'agit d'un filtre convolutif de réponse impulsionnelle  $h = \mathbb{1}_{[0, T]} \in L^2(\mathbb{R})$ ; la réponse indicielle de ce filtre est donnée par la formule:  $\forall t \in \mathbb{R}, h_c(t) = 0$  si  $t \leq 0$ ,  $t$  si  $0 \leq t \leq T$ ,  $T$  si  $t > T$ , de sorte que son gain  $K$  est égal à  $T$ ; enfin son temps de réponse satisfait:  $T = \tau_R = \frac{T}{20} \Rightarrow \tau_R = \frac{1}{20} T$ .

(ii) Considérons le filtre RC donné par la formule:

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, R_C x(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds,$$

et rappelons que'il s'agit d'un filtre convolutif de réponse impulsionnelle:  $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$  si  $t \geq 0$ ,  $0$  sinon; la réponse indicielle de ce filtre vaut donc:  $\forall t \in \mathbb{R}, h_c(t) = 0$  si  $t \leq 0$ ,  $1 - e^{-\frac{t}{RC}}$  si  $t > 0$ , et le gain de ce filtre est par conséquent égal à  $K=1$ ; enfin son temps de réponse  $\tau_R$  satisfait:  $e^{-\frac{\tau_R}{RC}} = \frac{1}{20} \Rightarrow \tau_R = RC \ln(20)$ ; observons que ce temps de réponse est proportionnel au produit  $RC$  qui caractérise le filtre RC.

Rem: (i) Le temps de réponse indicielle provient du fait qu'il s'agit, au moins formellement, de la réponse du filtre convolutif  $\mathbb{F}_h$  à un signal d'entrée constitué de l'échelon d'Heaviside  $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ ; notons en effet que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, h * H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s) H(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) H(t-u) du = \int_{-\infty}^t h(u) du = h_c(t).$$

(ii) Le gain  $K$  s'interprète alors comme le rapport entre l'amplitude asymptotique de la réponse indicielle, et l'amplitude de l'échelon d'Heaviside.

(iii) Le temps de réponse  $\tau_R$  est le temps nécessaire pour que la réponse indicielle atteigne un certain pourcentage du gain, qui est au général fixé à 5% comme dans la définition précédente.

#### 4. Synthèse de filtres analogiques

Nous nous sommes introduites les principales notions liées à la théorie des filtres analogiques, nous pouvons revenir à la question du filtre passe-bas idéal dont nous avons vu la nécessité pour mener à bien l'échantillonnage d'un signal analogique. Nous vérifions dans la suite que ce filtre n'est pas causal, c'est-à-dire pas réalisable dans les applications.

pratiques auxquelles il est destiné, puis nous déciderons dans le cadre de l'étude des filtres différentiels une façon d'approcher le filtre passe-bas idéal, et donc de résoudre partiellement le problème de la non-causalité de ce filtre.

## a. Filtre passe-bas idéal

Soit  $w > 0$ . Rappelons que le filtre passe-bas idéal  $B_w$  de bande  $[-w, w]$  est défini comme le filtre convolutif de fonction de transfert  $H_w = \mathbb{1}_{[-w, w]}$ , soit le filtre analogique qui associe à un signal d'entrée  $x$  d'énergie finie, le signal de sortie d'énergie finie  $y$  dont la transformée de Fourier satisfait :

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(y)(\xi) = \begin{cases} \mathcal{F}(x)(\xi) & \text{si } |\xi| \leq w, \\ 0 & \text{si } |\xi| > w. \end{cases}$$

Prop: Soit  $w > 0$ . Le filtre passe-bas idéal  $B_w$  de bande  $[-w, w]$  est un filtre convolutif de réponse impulsionnelle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_w(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}(wt).$$

Dém: Comme  $H_w = \mathbb{1}_{[-w, w]} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}(H_w) = \hat{H}_w$  vaut :  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(H_w)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-w}^w H_w(\xi) e^{-it\xi} d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}(wt)$  ; par définition, lorsque  $x \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}(B_w x) = H_w \mathcal{F}(x)$ , donc par bijectivité de la transformée de Fourier,  $B_w x = \mathcal{F}^{-1}(H_w \mathcal{F}(x))$  ; sachant que  $H_w \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{F}x \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $H_w \mathcal{F}(x) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow B_w x = H_w \hat{\mathcal{F}}(x)(- \cdot)$  ; comme  $H_w \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  et  $x \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $B_w x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{H}_w * \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(x)(- \cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{H}_w * x$ , d'où p.p.t  $t \in \mathbb{R}, B_w x(t) = h_w * x(t)$ .

Cor: Soit  $w > 0$ . Le filtre passe-bas idéal  $B_w$  n'est pas réalisable.

Dém: Sachant que  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{w} \mathbb{Z}^*$ ,  $h_w(t) \neq 0$ , le filtre passe-bas idéal  $B_w$  n'est pas causal, donc pas réalisable.

Sachant que le filtre passe-bas idéal  $B_w$  de bande  $[-w, w]$  n'est pas réalisable, il est naturel de se demander dans quelle mesure il est possible de construire des filtres passe-bas approchés tels que :

- (i) Leur fonction de transfert  $H$  est proche de 1 sur le segment  $[-\omega, \omega]$ , et proche de 0 en dehors de cet intervalle;
- (ii) ces filtres sont réalisables.

La construction de filtres différentiels via des circuits électroniques adaptés permet de répondre positivement à cette question sur le plan pratique.

## b. Filtres différentiels

Les filtres différentiels sont une classe de filtres analogiques pour lesquels le signal de sortie  $y$  est relié au signal d'entrée  $x$  par des équations différentielles de la forme:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^N a_n y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x^{(k)}(t),$$

où les coefficients  $(a_n)_{0 \leq n \leq N}$  et  $(b_k)_{0 \leq k \leq N}$  sont constants.

Ex. Le filtre RC est un filtre différentiel de cette forme, puisque le signal de sortie  $y = RC \dot{x}$  de ce filtre est solution de l'équation différentielle:

$$\forall t \in \mathbb{R}, RC y'(t) + y(t) = x(t).$$

Comme dans le cas du filtre RC, des circuits électroniques permettent souvent d'implémenter les filtres différentiels, d'où l'importance pratique de ces filtres: le signal de sortie  $y$  est alors la tension ou l'intensité en sortie du circuit électronique que de tension ou d'intensité d'entrée  $x$ .

Sur le plan mathématique, définir rigoureusement les filtres différentiels nécessite de pouvoir résoudre les équations différentielles qui les définissent. Nous renvoyons au cours d'équations différentielles pour la preuve de l'existence et de l'unicité des solutions de ces équations à coefficients constants. Au-delà de cette question de la résolution de ces équations, ce qui nous intéresse ici, ce sont les propriétés des filtres différentiels qu'elles définissent, soit de l'application qui, au signal d'entrée  $x$ , associe le signal de sortie  $y$ . Dans ce but, nous nous restreignons

d'abord à un cadre dans lequel ces deux notions sont régulières, à décroissances rapides, ainsi que toutes leurs dérivées : celui de la classe de Schwartz.

Def: Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est à décroissance rapide si:

$$\forall p \geq 0, |x|^p f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Ex: Soit  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-|x|}$ ; comme  $\forall p \geq 0, |x|^p f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ , la fonction  $f$  est à décroissance rapide.

Def: Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  appartient à la classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  si:

(i)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

(ii)  $\forall h \geq 0, f^{(h)}$  est à décroissance rapide.

Ex: Soit  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}$ ; comme  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et que, quel que soit  $h \geq 0$ , il existe un polynôme  $P_h \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(h)}(x) = P_h(x) e^{-x^2}$ ,  $\forall p \geq 0, |x|^p g^{(h)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \Rightarrow$  La fonction gaussienne  $g$  appartient à la classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

La classe de Schwartz possède les propriétés structurales suivantes.

Prop: (i) Soit  $p \geq 1$ . La classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est un sous-espace dense de l'espace de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$ .

(ii) La classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par dérivation et par multiplication par un polynôme:

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

$$\text{et } \forall P \in \mathbb{R}[X], P f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Dém: (i) Comme les caractères réguliers et à décroissance rapide sont stables par combinaison linéaire,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel; étant donné  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), x \mapsto |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ ; comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , il existe  $\Omega \geq 0$  tel que:  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \forall p \geq 1, f \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  est un sous-espace de  $L^p(\mathbb{R})$ ; sachant que  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  est un sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et que  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est aussi dense dans  $L^p(\mathbb{R})$ .

(ii) Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et quelque soit  $h \geq 0, f^{(h+1)}$  est à

décroissance rapide  $\Rightarrow f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

(iii) Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$ , alors,  $Pf$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et par la formule de Leibniz, quel que soit  $h \geq 0$ ,  $(Pf)^{(h)} = \sum_{\ell=0}^h C_h^\ell f^{(\ell)} P^{(h-\ell)}$   
 $\Rightarrow x^p (Pf)^{(h)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \Rightarrow Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Ex: Soit  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (x^4 + 2)e^{-x^2}$ ; on veut que produit d'un polynôme et d'une fonction de la classe de Schwartz, la fonction  $h$  appartient à la classe de Schwartz.

La classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  a la propriété remarquable d'être stable par la transformation de Fourier.

Prop: Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  appartient à  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et satisfait:  
 $\forall h \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \begin{cases} \hat{f}^{(h)}(\xi) = (i\xi)^h \hat{f}(\xi) \\ \text{et } ((-i\xi)^h f)(\xi) = \hat{f}^{(h)}(\xi) \end{cases}$

Dém: Comme  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}$  est bien définie, bornée et continue sur  $\mathbb{R}$ ; sachant que, quel que soit  $h \geq 0$ , les fonctions  $x \mapsto (-ix)^h f(x)$  sont dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , donc dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , avec:  $\forall h \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}^{(h)}(\xi) = ((-i\xi)^h f)(\xi)$ ; sachant que, quels que soient  $h, l \geq 0$ , les fonctions  $\xi \mapsto ((-i\xi)^h f)^{(l)}$  sont dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , donc dans  $L^2(\mathbb{R})$ , les fonctions  $\xi \mapsto (i\xi)^l \hat{f}^{(h)}(\xi)$  sont bornées sur  $\mathbb{R} \Rightarrow \forall l \geq 0, |\xi|^l \hat{f}^{(h)}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0 \Rightarrow \hat{f}^{(h)}$  est à décroissance rapide  $\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , avec de plus:  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}^{(h)}(\xi) = (i\xi)^h \hat{f}(\xi)$ .

Ex: Soit  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}$ ; la fonction gaussienne  $g$  est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et sa transformée de Fourier  $\hat{g}$  donnée par:  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$  est aussi dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Cor: La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dont l'inverse est donné par les formules:

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \hat{f}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Dém: Par la proposition précédente, la transformation de Fourier est bien définie, et de plus linéaire, de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ; étant donnée une fonction  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$y$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$ , et la fonction  $x \mapsto \widehat{y}(-x)$  est aussi dans  $L^2(\mathbb{R})$ , d'où par la formule de Fourier inverse,  $y = \widehat{\widehat{y}(-\cdot)}$ ; comme  $x \mapsto \widehat{y}(-x)$  appartient à  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}$  est surjectif; étant donné une fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  telle que  $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} = \widehat{0}$ , d'où par injectivité de la transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $f = 0$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , puis par continuité de  $f$ ,  $f = 0$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}$  est un isomorphisme linéaire de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  d'inverse donné par la formule précédente.

Ex: Soit  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}$ ; la fonction  $h$  appartient à la classe de Schwartz, et par la formule de Fourier inverse,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{h}(\xi) = e^{-\xi^2}$ .

Après avoir introduit la classe de Schwartz et ses principales propriétés, nous venons en même temps de définir et d'étudier le filtre différentiel donné par l'équation différentielle:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^M b_l x^{(l)}(t),$$

dans laquelle les coefficients  $(a_k)_{0 \leq k \leq N}$  et  $(b_l)_{0 \leq l \leq M}$  sont supposés finis et réels. Lorsque les signaux  $x$  et  $y$  appartiennent à la classe de Schwartz, nous pouvons en effet appliquer la transformation de Fourier à l'équation différentielle considérée afin d'obtenir:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \left( \sum_{k=0}^N a_k (i\xi)^k \right) \widehat{y}(\xi) = \left( \sum_{l=0}^M b_l (i\xi)^l \right) \widehat{x}(\xi).$$

Cette formule conduit à introduire les polynômes  $P$  et  $Q$  donnés par:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k, \text{ et } P(x) = \sum_{l=0}^M b_l x^l,$$

qui satisfont l'équation:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \widehat{y}(\xi) = P(i\xi) \widehat{x}(\xi).$$

Lorsque le polynôme  $Q$  n'a pas de racines imaginaires pures, cette équation devient:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{y}(\xi) = \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)} \widehat{x}(\xi).$$

Formellement au moins, cette équation correspond à un filtre convolutif de fonction de transfert:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, H(\xi) = \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)},$$

soit de réponse impulsionnelle  $h$  de transformée de Fourier (si cette transformée de Fourier a un sens) donnée par la formule  $\widehat{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H$ . Afin de donner un sens plus

rigoureux à ce filtre convolutif, nous commençons par établir la lemme suivant.

Lem: Soit  $(\mathcal{L}, \mathcal{Q}) \in \mathbb{R}(X)^2$ . Supposons que:

(i)  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{Q}(i\xi) \neq 0$ .

(ii)  $d^0(\mathcal{Q}) > d^0(\mathcal{L})$ .

Alors il existe une unique fonction  $h \in L^2(\mathbb{R})$  telle que:

p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h)(\xi) = \frac{\mathcal{L}(i\xi)}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Q}(i\xi)}$ .

Dém: Comme  $\mathcal{Q}$  n'a pas de racines imaginaires pures, la fonction  $q$  donnée par  $\forall \xi \in \mathbb{R},$

$q(\xi) = \frac{\mathcal{L}(i\xi)}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Q}(i\xi)}$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ; sachant que  $d^0(\mathcal{Q}) >$

$d^0(\mathcal{L})$ , il existe des nombres  $a > 0$  et  $c > 0$  tels que:  $\forall |\xi| > a, |q(\xi)|^2 \leq \frac{c}{|\xi|^c}$

$\Rightarrow q \in L^2(\mathbb{R})$ ; par le théorème de Plancherel, il existe donc une unique

fonction  $h \in L^2(\mathbb{R})$  telle que: p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h)(\xi) = \frac{\mathcal{L}(i\xi)}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Q}(i\xi)}$ .

Ex: (i) Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  tel que  $a > 0$ ; posons  $\forall t \in \mathbb{R}, h_z(t) = e^{-zt}$  si  $t \geq 0$ ,

0 sinon;  $h_z \in L^2(\mathbb{R})$  avec:  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{h}_z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(z+i\xi)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i\xi+z)}$

comme  $h_z \in L^2(\mathbb{R})$ , nous vérifions que: p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h_z)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Q}_z(i\xi)}$

où  $\mathcal{Q}_z(x) = x + z$ .

(ii) Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  tel que  $a < 0$ ; posons  $\forall t \in \mathbb{R}, h_z(t) = -e^{zt}$  si  $t \leq 0$ ,

0 sinon;  $h_z \in L^2(\mathbb{R})$  avec  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{h}_z(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(z+i\xi)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i\xi+z)}$

comme  $h_z \in L^2(\mathbb{R})$ , nous vérifions que: p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h_z)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Q}_z(i\xi)}$ ,

où  $\mathcal{Q}_z(x) = x + z$ .

(iii) Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  tel que  $a > 0$ ; pour  $m \geq 1$ , posons  $\forall t \in \mathbb{R}, h_z^m(t) =$

$\frac{t^m}{m!} e^{-zt}$  si  $t \geq 0$ , 0 sinon; comme  $h_z^m \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  avec  $\forall t \in \mathbb{R}, h_z^m(t) =$

$\frac{i^m}{m!} (-it)^m e^{-z+it} t^m$  si  $t \geq 0$ , 0 sinon,  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{h}_z^m(\xi) = \left[ \frac{i^m}{\sqrt{2\pi}(i\xi+z)^{m+1}} \right]^{(m)} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi} m!}$

$\frac{1}{(i\xi+z)^{m+1}} = \frac{1}{(i\xi+z)^{m+1}}$ ; comme  $h_z^m \in L^2(\mathbb{R})$ , nous vérifions que: p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R},$

$\mathcal{F}(h_z^m)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Q}_z^m(i\xi)}$  où  $\mathcal{Q}_z^m(x) = (x+z)^{m+1}$ .

(iv) Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  tel que  $a < 0$ ; pour  $m \geq 1$ , posons:  $\forall t \in \mathbb{R}, h_z^m(t) = -\frac{t^m}{m!}$

$e^{zt}$  si  $t \leq 0$ , 0 sinon; comme  $h_z^m \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  avec  $\forall t \in \mathbb{R}, h_z^m(t) = -\frac{i^m}{m!} (-it)^m e^{z+it} t^m$

si  $t \leq 0$ , 0 sinon,  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{h}_z^m(\xi) = \left[ \frac{i^m}{\sqrt{2\pi} m! (i\xi+z)^{m+1}} \right]^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (i\xi+z)^{m+1}}$ ; comme

$h_z^m \in L^2(\mathbb{R})$ , nous vérifions que: p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h_z^m)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Q}_z^m(i\xi)}$

où  $\mathcal{Q}_z^m(x) = (x+z)^{m+1}$ .

Grâce à ces formules, et à la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle, il est possible de préciser de la façon suivante la lemme précédent.

Resp: Soit  $(P, Q) \in \mathcal{L}[X]^+$ . Supposons que:

(i)  $\forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \neq 0$ ;

(ii)  $d^{\circ}(Q) > d^{\circ}(P)$ .

Alors il existe une unique fonction  $h \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$  telle que:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{h}(\xi) = \frac{P(i\xi)}{\sqrt{2\pi} Q(i\xi)}$$

La fonction  $h$  est de plus continue sur  $\mathbb{R}^*$  et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Dém: (i) Comme  $\forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \neq 0$ , les racines complexes  $(z_j = a_j + ib_j)_{1 \leq j \leq n}$  du polynôme  $Q$  ont toutes des parties réelles non nulles; notons  $\forall 1 \leq j \leq n, m_j$  la multiplicité de la racine  $z_j$  du polynôme  $Q$ ; comme  $d^{\circ}(P) < d^{\circ}(Q)$ , la décom-

position en éléments simples de la fonction rationnelle  $\frac{P(X)}{Q(X)}$  s'écrit:  $\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{L_{j,k}}{(X-z_j)^{k+1}} \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{P(i\xi)}{\sqrt{2\pi} Q(i\xi)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{L_{j,k}}{\sqrt{2\pi} (i\xi - z_j)^{k+1}}$

(ii) Considérons alors les fonctions  $f_{j,k}$  définies par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{j,k}(t) = \begin{cases} -\frac{t^k}{k!} e^{z_j t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t) & \text{si } \operatorname{Re}(z_j) > 0, \\ \frac{t^k}{k!} e^{z_j t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) & \text{si } \operatorname{Re}(z_j) < 0. \end{cases}$$

D'après les exemples précédents, p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f_{j,k})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (i\xi - z_j)^{k+1}} \Rightarrow \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} L_{j,k} f_{j,k}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{L_{j,k}}{(i\xi - z_j)^{k+1}} = \frac{P(i\xi)}{\sqrt{2\pi} Q(i\xi)} \Rightarrow h = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} L_{j,k} f_{j,k}$  est l'unique fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  qui satisfait ces identités;

comme les fonctions  $f_{j,k}$  sont bornées et intégrables sur  $\mathbb{R}$ , et continues sur  $\mathbb{R}^*$ , par linéarité, la fonction  $h$  vérifie aussi ces propriétés; en particulier,  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{h}(\xi) = \frac{P(i\xi)}{\sqrt{2\pi} Q(i\xi)}$ .

Cette caractérisation des fonctions dont la transformée de Fourier est rationnelle permet de résoudre les équations différentielles à coefficients constants dans la classe de Schwarz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Lem: Soit  $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $P = \sum_{l=0}^r b_l X^l$  tels que:

(i)  $\forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \neq 0$ ;

(ii)  $d^{\circ}(\mathbb{R}) > d^{\circ}(\mathbb{R})$

Quelle que soit la fonction  $x \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ , il existe une unique fonction  $y$

$\in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$  telle que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x^{(k)}(t).$$

De plus, la fonction  $y$  satisfait:

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = h * x(t),$$

où  $h$  est la unique fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que:

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h)(\xi) = \frac{P(i\xi)}{\sqrt{2\pi} Q(i\xi)}$$

Dém: (i) unicité ou existence: Soit  $x \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ ; supposons qu'il existe une solution

$y \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$  de l'équation différentielle; comme  $x$  et  $y$  sont dans  $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ ,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \hat{y}(\xi) = P(i\xi) \hat{x}(\xi); \text{ sachant que } \forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \neq 0, \hat{y}(\xi)$$

$$= \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)} \hat{x}(\xi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(h)(\xi) \hat{x}(\xi); \text{ sachant que } h \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), h * x \text{ est}$$

bien définie dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et satisfait: p.p.t.  $\xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h * x)(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{h}(\xi)$

$$\hat{x}(\xi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(h)(\xi) \hat{x}(\xi), \text{ d'où par le théorème de Plancherel, } y = h * x \text{ p.p.}$$

sur  $\mathbb{R}$ ; sachant que  $y \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ , et que  $h * x \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ , puisque  $h$

$$\in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } x \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = h * x(t), \text{ d'où l'unicité ou existence}$$

ce (et la valeur de la fonction  $y$ ).

(ii) Existence: Soit  $y = h * x$ ; comme  $h \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ , et  $x \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ ,  $y$  est

bien définie dans  $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ , avec:  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{y}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{h}(\xi)$

$$x \hat{x}(\xi) = \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)} \hat{x}(\xi); \text{ sachant que } \forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \neq 0, \text{ et que } \hat{x} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}),$$

$\hat{y}$  est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}$ , et par la formule de Leibniz,  $\forall k \geq 0$ ,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{y}^{(k)}(\xi) = \sum_{l=0}^k c_l \left( \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)} \right)^{(l)} \hat{x}^{(k-l)}(\xi); \text{ comme } \forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \neq 0,$$

la fonction  $\xi \mapsto \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)}$  est bornée infiniment sur  $\mathbb{R}$ ; quel que soit  $k \geq 0$ ,

$$\text{il existe donc des nombres } C \geq 0 \text{ et } m \geq 0 \text{ tels que: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \left| \left( \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)} \right)^{(k)} \right| \leq$$

$$C (1 + |\xi|^m); \text{ comme } \hat{x}^{(k-l)} \text{ appartient à } \mathcal{Y}(\mathbb{R}), \text{ la fonction } \xi \mapsto \left( \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)} \right)^{(l)}$$

$$x \hat{x}^{(k-l)}(\xi) \text{ est à décroissance rapide } \Rightarrow \hat{y}^{(k)} \text{ est à décroissance rapide } \Rightarrow$$

$\hat{y} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ , d'où par l'injectivité de la transformation de Fourier de  $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$  dans

$$\mathcal{Y}(\mathbb{R}), y \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}); \text{ sachant que } \forall \xi \in \mathbb{R}, \left[ \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)} \right] (\xi) = Q(i\xi) \hat{y}(\xi)$$

$$= P(i\xi) \hat{x}(\xi) = \left[ \sum_{k=0}^N b_k x^{(k)} \right] (\xi), \text{ d'où par injectivité de la transformée}$$

$$\text{de Fourier dans } \mathcal{Y}(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x^{(k)}(t), \text{ d'où}$$

l'existence de la solution  $y$ .

Rem: Lorsque le polynôme  $Q$  possède une racine de la forme  $i\xi_0$ , avec  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ , et dans le cas où  $Q(i\xi_0) \neq 0$  (qui est général puisque, dans le cas contraire, il est toujours permis de simplifier numérateur et dénominateur de la fraction rationnelle  $\frac{P(x)}{\sqrt{2\pi} Q(x)}$  par le facteur  $x - i\xi_0$ ), la fonction  $\xi \mapsto \frac{P(i\xi)}{\sqrt{2\pi} Q(i\xi)}$  n'est pas localement intégrable au voisinage de  $\xi_0$ , de sorte que sa transformée de Fourier réciproque n'est pas définie au sens des fonctions intégrables ou de courbes intégrables. Il s'avère néanmoins encore possible de résoudre l'équation différentielle à coefficients constants associée aux polynômes  $P$  et  $Q$  dans le cas où la transformée de Fourier  $\hat{y}$  satisfait des conditions d'annulation suffisantes en  $\xi_0$ .

Le lemme précédent permet de définir rigoureusement le filtre différentiel associé à l'équation différentielle à coefficients constants:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{\ell=0}^n b_\ell x^{(\ell)}(t).$$

Déf: Soit  $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $P(x) = \sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell$  tels que:

(i)  $\forall \xi \in \mathbb{R}, Q(i\xi) \neq 0$ ;

(ii)  $d^\circ(Q) > d^\circ(P)$ .

Le filtre différentiel associé à l'équation différentielle:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{\ell=0}^n b_\ell x^{(\ell)}(t),$$

est défini comme le filtre convolutif  $\mathbb{F}_Q$  associé à la fonction de transfert:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, H(\xi) = \frac{P(i\xi)}{Q(i\xi)},$$

autrement dit à la réponse impulsionnelle  $h$  donnée, intégrable et d'énergie finie définie comme l'unique fonction  $h \in L^1(\mathbb{R})$  telle que:

$$\text{p.p.t } \xi \in \mathbb{R}, \hat{h}(\xi) = \frac{H(\xi)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{P(i\xi)}{\sqrt{2\pi} Q(i\xi)}.$$

Quel que soit  $p \geq 1$ , ce filtre convolutif est bien défini de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^p(\mathbb{R})$

ainsi que de  $\mathcal{C}_0^p(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}_0^p(\mathbb{R})$ . De plus, lorsque les signaux  $x$  et  $\mathbb{F}_Q x$

sont de classe  $\mathcal{C}^n$ , respectivement de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $\mathbb{R}$ , avec des dérivées

intégrables jusqu'à l'ordre  $n$ , respectivement jusqu'à l'ordre  $m$ , alors, le signal

$\mathbb{F}_Q x$  est solution de l'équation différentielle:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{a=0}^M a_n \mathbb{F}_n^{(a)} x(t) = \sum_{a=0}^M b_a x^{(a)}(t).$$

Dém: Par les résultats précédents, le filtre convolutif  $\mathbb{F}_n$  est bien défini de fonction de transfert  $H$  et de réponse impulsionnelle  $h$ ; comme cette réponse est bornée, intégrable et de causé intégrable, l'inégalité de Young assure que le filtre différentiel  $\mathbb{F}_n$  est bien défini de  $L^p(\mathbb{R})$  dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \geq 1$ , et de  $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ ; lorsque les fonctions  $\mathbb{F}_n x$  et  $x$  vérifient les hypothèses de dérivabilité et d'intégrabilité de l'énoncé précédent:  $\forall s \in \mathbb{R}, \sum_{a=0}^M a_n \widehat{\mathbb{F}_n x}(s) = \mathcal{Q}(is) \widehat{T}_n x(s) = \mathcal{Q}(is) H(s) \widehat{x}(s) = \mathcal{Q}(is) \widehat{x}(s) = \left[ \sum_{a=0}^M b_a \widehat{x^{(a)}} \right](s)$ , d'où par injectivité de la transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et par continuité des dérivées  $\mathbb{F}_n x^{(a)}$  et  $x^{(a)}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{a=0}^M a_n \mathbb{F}_n x^{(a)}(t) = \sum_{a=0}^M b_a x^{(a)}(t)$ .

Théorème: (i) La définition précédente du filtre différentiel associé à l'équation différentielle:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{a=0}^M a_n y^{(a)}(t) = \sum_{a=0}^N b_a x^{(a)}(t),$$

ne repose donc pas sur la résolution directe de cette équation, par exemple via le théorème de Cauchy-Lipschitz, mais sur sa résolution via la transformation de Fourier dans le cas où les signaux  $x$  et  $y$  sont dans la classe de Schwartz, puis sur l'extension de la formule obtenue à des signaux moins réguliers et moins décroissants. Après cette extension, les fonctions  $y, \mathbb{F}_n x$  et  $x$  ne sont pas toujours solutions de l'équation différentielle considérée, qui peut ne plus avoir de sens, mais si ces fonctions sont suffisamment régulières et intégrables, elles sont bien solutions de l'équation différentielle considérée.

(ii) Sous les hypothèses de la définition précédente, le filtre différentiel associé à l'équation différentielle:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{a=0}^M a_n y^{(a)}(t) = \sum_{a=0}^N b_a x^{(a)}(t),$$

est bien défini sur tous les espaces de Sobolev  $L^p(\mathbb{R})$ , avec  $p \geq 1$ , ainsi que sur l'espace des fonctions continues bornées  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ . En pratique l'espace fonctionnel sur lequel il est défini importe donc peu, et ses principales propriétés, typiquement de causalité et de stabilité, ne dépendent pas du choix de son espace de définition.

Chm: Soit  $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $P(x) = \sum_{l=0}^r b_l x^l$  tels que:

(i)  $\forall \zeta \in \mathbb{R}, Q(\zeta) \neq 0$ ;

(ii)  $d^\circ(P) < d^\circ(Q)$ .

Considérons le filtre différentiel  $\mathbb{F}_R$  de fonction de transfert:

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}, H(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$$

(i) Le filtre différentiel  $\mathbb{F}_R$  est stable.

(ii) Le filtre différentiel  $\mathbb{F}_R$  est causal si toutes les racines complexes du polynôme  $Q$  ont une partie réelle strictement négative.

Dém: (i) Comme la réponse impulsionnelle  $h$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , le filtre différentiel  $\mathbb{F}_R$  est stable.

(ii) Soit  $(z_j)_{2 \leq j \leq n}$  les racines du polynôme  $Q(x)$ , et  $(m_j)_{2 \leq j \leq n}$  leur multiplicité;

introduisons la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $\frac{P(x)}{Q(x)} =$

$$\sum_{j=2}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{a_{j,k}}{(x-z_j)^{k+1}}, \text{ et rappelons que la réponse impulsionnelle } h \text{ est donnée par la formule: } h = \sum_{j=2}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} a_{j,k} f_{j,k},$$

dans laquelle les fonctions  $f_{j,k}$  sont données par:  $\forall t \in \mathbb{R}, f_{j,k}(t) = -\frac{t^k}{k!} e^{z_j t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t)$  si  $\operatorname{Re}(z_j) > 0$ ,  $\frac{t^k}{k!} e^{z_j t} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$  si  $\operatorname{Re}(z_j) < 0$ ; sachant que le filtre différentiel  $\mathbb{F}_R$  est causal,  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

$$h(t) = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{2 \leq j \leq n \\ \operatorname{Re}(z_j) > 0}} \sum_{k=0}^{m_j-1} a_{j,k} f_{j,k} = 0; \text{ la transformée de Fourier de cette expression donne: } \forall \zeta \in \mathbb{R}, \sum_{\substack{2 \leq j \leq n \\ \operatorname{Re}(z_j) > 0}} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{a_{j,k}}{(i\zeta - z_j)^{k+1}} = 0, \text{ d'où par continuation}$$

de cette fonction méromorphe  $\bar{z} \in \{z_j, 2 \leq j \leq n, \operatorname{Re}(z_j) > 0\}, \sum_{\substack{2 \leq j \leq n \\ \operatorname{Re}(z_j) > 0}} \sum_{k=0}^{m_j-1} a_{j,k} = 0$ ;

ou conclusion, par unicité de la décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle,  $\forall 2 \leq j \leq n, \forall 0 \leq k \leq m_j-1, a_{j,k} = 0$ ;

autrement, par unicité de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $Q$  n'a pas de racines  $z_j$  telles que  $\operatorname{Re}(z_j) > 0$ .

Réciproquement, avec les notations précédentes,  $h = \sum_{\substack{2 \leq j \leq n \\ \operatorname{Re}(z_j) < 0}} \sum_{k=0}^{m_j-1} a_{j,k} f_{j,k}$  sachant que  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f_{j,k}(t) = 0$  lorsque  $\operatorname{Re}(z_j) < 0, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, h(t) = 0$

$\Rightarrow$  Le filtre  $\mathbb{F}_R$  est causal.

Ex: Considérons le filtre  $R_C$ , qui est le filtre différentiel associé à l'équation diff

férentielle:  $\forall t \in \mathbb{R}, R_C y'(t) + y(t) = x(t)$ , et observons que les polynômes

$P(x)$  et  $Q(x)$  associés à ce filtre sont égaux à:  $P(x) = 1$  et  $Q(x) = R_C x + 1$ ;

comme  $\forall \zeta \in \mathbb{R}, Q(\zeta) = R_C \zeta + 1 \neq 0$ , et  $d^\circ(P) = 0 < 1 = d^\circ(Q)$ , le filtre  $R_C$  est stable;

sachant que  $\forall z \in \mathbb{R}, \Re(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{RC}$ , le filtre RC est aussi causal.

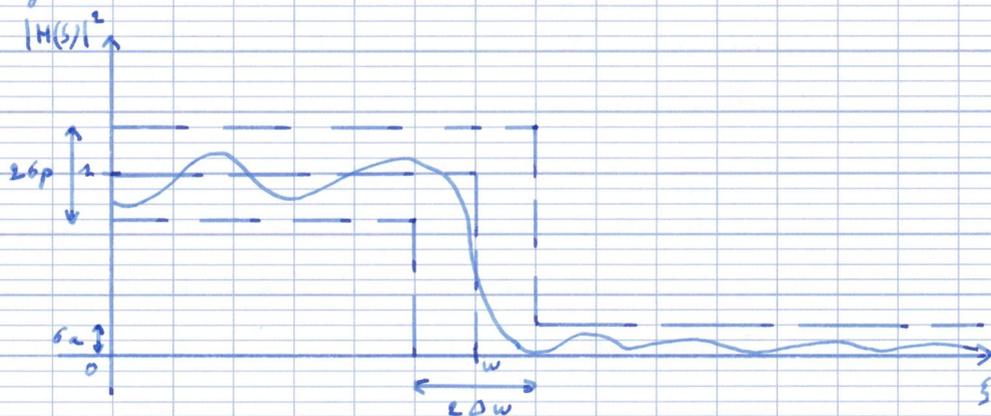
### c. Approximations des filtres passe-bas idéaux par des filtres différentiels

Pour  $\omega > 0$ , rappelons que le filtre passe-bas idéal  $b_\omega$  est défini comme le filtre convolutif de fonction de transfert:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, H_\omega(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leq \omega, 0 \text{ sinon,}$$

et que ce filtre n'est pas causal, donc pas réalisable. Une façon de remédier à ce problème consiste à approcher le filtre passe-bas idéal  $b_\omega$  par des filtres différentiels dont la fonction de transfert  $H$  est proche de la fonction de transfert  $H_\omega$  du filtre passe-bas idéal.

En pratique, la qualité de l'approximation recherchée est prédéterminée par un gabarit qui spécifie les amplitudes maximales de l'approximation  $\epsilon_p$  et  $\epsilon_a$  dans les bandes de passage et d'atténuation du filtre, ainsi que la largeur maximale  $\Delta\omega$  de la bande de transition. Dans le spectre d'énergie, ces gabarits ont l'allure suivante:



Des exemples typiques de filtres passe-bas approchés sont donnés par les filtres de Butterworth.

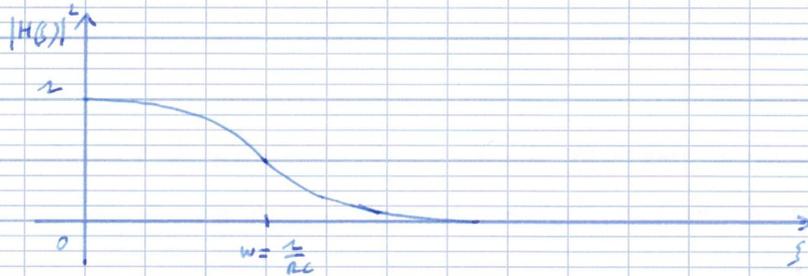
Déf: Un filtre différentiel de fonction de transfert  $H(\xi) = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$  est un filtre de Butterworth si il existe un ordre  $n \geq 1$  et un nombre  $\omega > 0$  tels que:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, |H(\xi)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{2n}}$$

Ex: Rappelons que le filtre RC est le filtre différentiel de fonction de transfert :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, H(\xi) = \frac{1}{RC\xi + 1}; \text{ comme } \forall \xi \in \mathbb{R}, |H(\xi)|^2 = \frac{1}{1 + (RC\xi)^2}, \text{ il s'agit d'un}$$

filtre de Butterworth d'ordre  $n=1$  et de paramètre réel  $\omega = \frac{1}{RC} > 0$ .



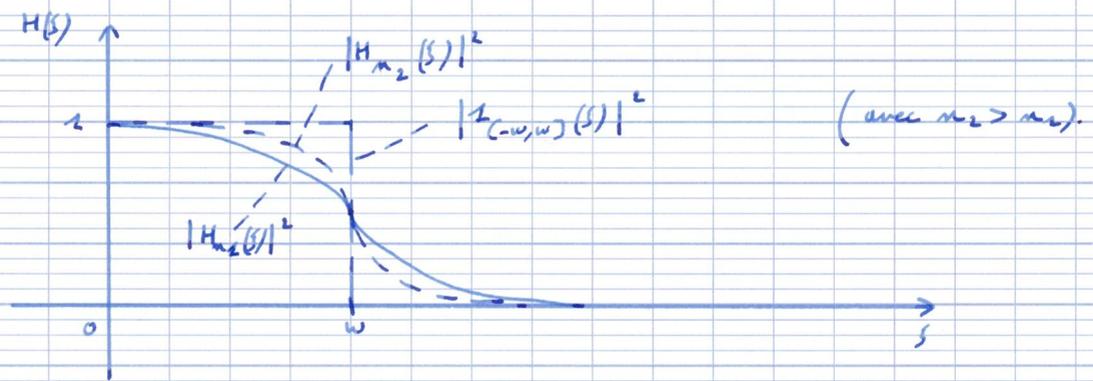
Rem: Dans la définition d'un filtre de Butterworth, seul le module  $|H(\xi)|$  de la fonction de transfert  $H$  est fixé, ce qui laisse une latitude sur la façon de déterminer l'expression  $H(\xi)$  de la fonction de transfert, donc le filtre différentiel.

Ex: Considérons un filtre différentiel de Butterworth dont la fonction de transfert  $H$  satisfait:  $\forall \xi \in \mathbb{R}, |H(\xi)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi}{\omega}\right)^6}$  pour un paramètre  $\omega > 0$ ; supposons que la réponse impulsionnelle  $h$  associée à la fonction de transfert  $H$  par la relation  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{h}(\xi) = \frac{H(\xi)}{\sqrt{2\pi}}$  soit réelle; dans ce cas,  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \overline{\hat{h}(\xi)} = \hat{h}(-\xi) \Rightarrow \overline{H(\xi)} = H(-\xi) \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi}{\omega}\right)^6} = H(\xi)H(-\xi)$ ; si nous cherchons  $H$  sous la forme d'une fraction rationnelle  $H(\xi) = R(i\xi)$ , alors nous pouvons supposer que les pôles  $z$  de la fraction rationnelle  $R$  satisfont  $1 + \left(\frac{z}{\omega}\right)^6 = 0$ , soit  $z = \omega a = \omega e^{i\frac{k\pi}{3}}$  pour  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$ ; les seuls pôles de partie réelle négative sont  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_4$ ; si nous choisissons la fonction de transfert  $H(\xi) = \frac{\omega^3}{(i\xi + \omega_1)(i\xi - \omega_2)(i\xi - \omega_4)}$  nous vérifions que:  $|H(\xi)|^2 = \frac{\omega^6}{\prod_{k=0}^5 (i\xi - \omega_k)} = \frac{\omega^6}{-(i\xi)^6 + \omega^6} = \frac{\omega^6}{1 + \left(\frac{\xi}{\omega}\right)^6}$ , et nous avons donc déterminé un filtre différentiel causal et stable de type Butterworth d'ordre 3.

Lorsque l'ordre  $n$  des filtres de Butterworth associés à un nombre  $\omega > 0$  tend vers  $+\infty$ , nous vérifions que les fonctions de transfert  $H_n$  de ces filtres satisfont:

$$|H_n(\xi)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < \omega, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |\xi| = \omega, \\ 0 & \text{si } |\xi| > \omega. \end{cases}$$

Ces filtres forment donc des approximations du filtre passe-bas idéal  $B_\omega$  de fonction de transfert  $H_\omega = \mathbb{1}_{(-\omega, \omega)}$ .



Néanmoins augmenter l'ordre  $n$  des filtres de Butterworth nécessite en pratique des circuits électroniques toujours plus grands, ce qui limite la portée de la convergence précédente.

Notons enfin qu'il existe d'autres familles de filtres analogiques comme les filtres de Tchabalychov ou les filtres elliptiques qui approchent les filtres passe-bas idéaux de manière stable et causal, et que le choix du filtre approché se fait selon les spécifications des garanties retenues pour mesurer la qualité de l'approximation.