

TD N°2. Traitement du signal

Conversion analogique discret

Exercice 1. *Formule sommatoire de Poisson.*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un nombre $C > 0$ pour lequel

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| + |f'(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$

1.a. Vérifier que les séries de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+2n\pi)$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(t+2n\pi)$ convergent normalement sur tout segment de \mathbb{R} .

b. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+2n\pi).$$

En déduire que la fonction F est bien définie, 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

2.a. Déterminer les coefficients de Fourier complexes $(c_n(F))_{n \in \mathbb{Z}}$ de la fonction F .

b. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}.$$

c. *Application.* Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2} = \sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2}.$$

Exercice 2.

Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Considérons une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R} \setminus \left[\omega_0 - \frac{\pi}{T}, \omega_0 + \frac{\pi}{T} \right], \mathcal{F}(f)(\xi) = 0.$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right) e^{i\omega_0(t-nT)}.$$

Exercice 3.

Soit $T > 0$. Étant donnée une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, posons

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f[n] = \int_{(n-1)T}^{nT} f(t) dt.$$

1. Soit $\rho = \mathbf{1}_{[0,T]}$. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f[n] = f * \rho(nT).$$

2. Supposons que

$$\text{p.p.t. } |\xi| > \frac{\pi}{T}, \mathcal{F}(f)(\xi) = 0.$$

a. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f * \rho(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right).$$

b. Considérons la fonction $\sigma \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\sigma)(\xi) = \frac{iT\xi}{\sqrt{2\pi}(1 - e^{-iT\xi})} \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}(\xi).$$

En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \sigma(t - nT).$$

Exercice 4.

1. Considérons une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{p.p.t. } |\xi| > \pi, \mathcal{F}(f)(\xi) = 0.$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sqrt{N} \left(\sum_{n=-N}^N f(n) \operatorname{sinc}(\pi(t - n)) - f(t) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Supposons désormais que

$$\text{p.p.t. } |\xi| > \frac{\pi}{2}, \mathcal{F}(f)(\xi) = 0.$$

a. Considérons une fonction paire $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \rho(\xi) = 1, \quad \text{et} \quad \forall \xi \geq \pi, \rho(\xi) = 0.$$

Vérifier que

$$\forall k \geq 0, |t|^k \widehat{\rho}(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0.$$

b. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \widehat{\rho}(t - n).$$

c. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Conclure que

$$\forall k \geq 0, N^k \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N f(n) \widehat{\rho}(t - n) - f(t) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Filtrage analogique

Exercice 5.

Considérons l'intégrateur I donné par l'expression

$$\forall x \in L^1(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, Ix(t) = \int_{-\infty}^t x(s) ds.$$

1. Montrer que l'intégrateur I définit un filtre analogique de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$.
2. Le filtre analogique I est-il stable ?
- 3.a. Soit $H = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$. Vérifier que

$$\forall x \in L^1(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, Ix(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-s) x(s) ds.$$

- b. Le filtre analogique I est-il causal ?

Exercice 6.

Soit $T_2 > T_1 > 0$. Considérons l'opérateur A donné par l'expression

$$\forall x \in L^1(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, Ax(t) = \int_{t+T_1}^{t+T_2} x(s) ds - \int_{t-T_1}^{t-T_2} x(s) ds.$$

1. Montrer que l'opérateur A définit un filtre analogique de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
- 2.a. Le filtre analogique A est-il convolutif ? Si oui, déterminer la réponse impulsionnelle h de ce filtre.
- b. Le filtre analogique A est-il causal ? Est-il stable ?
3. Calculer la fonction de transfert H du filtre analogique A .

Exercice 7.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Étant donnée une fonction $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, montrer qu'une fonction $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - ay(t) = x'(t) - bx(t),$$

si et seulement si la fonction $z = y - x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) - az(t) = (a - b)x(t).$$

- 2.a. Considérons le filtre différentiel D défini par l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) - az(t) = (a - b)x(t).$$

Déterminer la fonction de transfert H et la réponse impulsionnelle h du filtre D .

- b. Le filtre différentiel D est-il stable ? Est-il causal ?
3. Considérons l'opérateur T donné par l'expression

$$\forall x \in L^1(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, Tx(t) = x(t) + Dx(t).$$

- a. Vérifier que l'opérateur T définit un filtre analogique de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
- b. Le filtre différentiel T est-il stable ? Est-il causal ?

Exercice 8.

Considérons le filtre différentiel Φ_1 défini à partir de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + \sqrt{2}y'(t) + y(t) = x(t).$$

1. Déterminer la fonction de transfert H associée au filtre différentiel Φ_1 .
2. En déduire la réponse impulsionnelle h du filtre différentiel Φ_1 .
- 3.a. Le filtre différentiel Φ_1 est-il stable ?
- b. Le filtre différentiel Φ_1 est-il causal ?

Exercice 9.

Considérons le filtre différentiel Φ_2 défini à partir de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'''(t) + y(t) = x''(t) + x(t).$$

1. Déterminer la fonction de transfert H associée au filtre différentiel Φ_2 .
2. En déduire la réponse impulsionnelle h du filtre différentiel Φ_2 .
- 3.a. Le filtre différentiel Φ_2 est-il stable ?
- b. Le filtre différentiel Φ_2 est-il causal ?

Exercice 10.

Soit $\omega > 0$. Considérons le filtre différentiel Φ_ω défini à partir de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, -y''(t) + \omega^2 y(t) = x(t).$$

1. Déterminer la fonction de transfert H associée au filtre différentiel Φ_ω .
2. En déduire la réponse impulsionnelle h du filtre différentiel Φ_ω .
- 3.a. Le filtre différentiel Φ_ω est-il stable ?
- b. Le filtre différentiel Φ_ω est-il causal ?

Exercice 11.

1. Soit $\omega > 0$. Étant donnés deux nombres $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, et une fonction $x \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, considérons le problème de Cauchy donné par

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = x(t), \\ y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = y_1. \end{cases}$$

- a. Écrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel du premier ordre.
- b. Calculer la résolvante de ce système linéaire.

c. Déterminer la solution y de ce problème de Cauchy en fonction des nombres y_0 et y_1 , et de la fonction x .

2. Considérons l'opérateur F donné par

$$\forall x \in L^1(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, Fx(t) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^t \sin(\omega(t-s)) x(s) ds.$$

a. Vérifier que l'opérateur F définit un filtre analogique de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_b^0(\mathbb{R})$.

b. Ce filtre est-il convolutif? Ce filtre est-il causal?

Exercice 12.

Soit $R, L, C > 0$. Considérons le filtre différentiel RLC défini par l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, LC y''(t) + RC y'(t) + y(t) = x(t).$$

1. Déterminer la fonction de transfert H associée au filtre RLC .

2.a. En déduire la réponse impulsionnelle h du filtre RLC .

b. Le filtre différentiel RLC est-il stable? Est-il causal?

3. Supposons que $R = \sqrt{2L/C}$. Vérifier que le filtre RLC est un filtre de Butterworth d'ordre 2.

Transformation de Fourier discrète

Pour $N \geq 1$, considérons la racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité ω_N donnée par la formule

$$\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}.$$

Exercice 13.

Soit $N \geq 1$.

1. Déterminer la transformée de Fourier discrète du signal $(s_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ défini par

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, s_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

2. Déterminer la transformée de Fourier discrète du signal $(t_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ défini par

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, t_n = n.$$

Exercice 14.

Soit $N \geq 1$. Considérons l'ensemble \mathcal{P}_N des suites complexes $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+N} = u_n.$$

1.a. Vérifier que \mathcal{P}_N est un sous-espace de dimension finie N de l'ensemble des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

b. Soit

$$\forall 0 \leq k \leq N-1, \forall n \geq 0, w_n^{(k)} = \omega_N^{kn}.$$

Montrer que $(w^{(0)}, w^{(1)}, \dots, w^{(N-1)})$ est une base du sous-espace \mathcal{P}_N .

2.a. Soit

$$\forall n \geq 0, d_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Vérifier que

$$\forall n \geq 0, d_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_n^{(k)}.$$

b. *Application.* En déduire que

$$\sum_{0 \leq n \leq M} \binom{M}{nN} \underset{M \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^M}{N}.$$

Exercice 15.

1.a. Soit $N \geq 1$. Étant donnés des nombres complexes $(y_j)_{0 \leq j \leq N-1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme complexe

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k,$$

tel que

$$\forall 0 \leq j \leq N-1, P(\omega_N^j) = y_j.$$

b. Vérifier que

$$\forall 0 \leq k \leq N-1, a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \omega_N^{-jk}.$$

c. Évaluer le nombre de multiplications que nécessite le calcul (rapide) des coefficients $(a_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ à partir des valeurs $(y_j)_{0 \leq j \leq N-1}$.

2.a. Pour $z \in \mathbb{C}$, nous considérons l'algorithme de Horner défini par

$$\alpha_0 = a_{N-1}, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-2, \alpha_{n+1} = \alpha_n z + a_{N-n-2}.$$

Quelle est la valeur du nombre α_{N-1} ? Combien de multiplications nécessite le calcul de cette valeur?

b. Considérons deux polynômes complexes

$$Q(X) = \sum_{j=0}^q b_j X^j, \quad \text{et} \quad R(X) = \sum_{j=0}^r c_j X^j,$$

tels que $q + r \leq N-1$ que nous représentons par les suites $(q_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ et $(r_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ définies par

$$\forall 0 \leq k \leq N-1, q_k = Q(\omega_N^k), \quad \text{et} \quad r_k = R(\omega_N^k).$$

Étant donné un nombre $z \in \mathbb{C}$, donner un algorithme pour le calcul du produit $Q(z)R(z)$, et estimer le nombre de multiplications que nécessite cet algorithme.

3. Nous représentons désormais les polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ par leurs coefficients $(b_j)_{0 \leq j \leq q}$ et $(c_j)_{0 \leq j \leq r}$.

a. Donner l'expression des coefficients $(d_j)_{0 \leq j \leq N-1}$ tels que

$$Q(X)R(X) = \sum_{j=0}^{N-1} d_j X^j.$$

b. Combien de multiplications nécessite le calcul direct de ces coefficients ?

c. Étant donné un nombre $z \in \mathbb{C}$, combien de multiplications nécessite le calcul du produit $Q(z)R(z)$ à l'aide de ces coefficients ? Quelle conclusion en tirez-vous ?

Exercice 16.

1.a. Soit $n \geq 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Ce polynôme est appelé polynôme de Tchebychev d'ordre n .

b. Vérifier que

$$\forall n \geq 1, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

c. Quel est le degré du polynôme T_n ? Quel est son coefficient dominant ?

d. Calculer les polynômes de Tchebychev T_0, T_1, T_2 et T_3 .

2.a. Soit $N \geq 1$ et $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $d^\circ(P) \leq N$. Vérifier qu'il existe des coefficients complexes $(a_j)_{0 \leq j \leq N}$ uniques tels que

$$P(X) = \sum_{j=0}^N a_j T_j(X).$$

b. Soit

$$\forall 0 \leq k \leq N, y_k = P\left(\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right).$$

Montrer que

$$\forall 0 \leq k \leq N, y_k = \sum_{j=-N}^N c_j \omega_{2N}^{jk},$$

où

$$c_j = \begin{cases} \frac{a_{-j}}{2} & \text{si } -N \leq j \leq -1, \\ a_0 & \text{si } j = 0, \\ \frac{a_j}{2} & \text{si } 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

c. Soit

$$\forall 0 \leq k \leq N-1, y_{2N-k} = y_k.$$

Vérifier que

$$\forall 0 \leq k \leq 2N, y_k = \sum_{j=-N}^N c_j \omega_{2N}^{jk},$$

d. En déduire que

$$\forall 0 \leq j \leq N, a_j = \frac{1}{N \delta_j} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_{2N}^{-jk},$$

où

$$\delta_j = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 0 \text{ ou } N, \\ 1 & \text{si } 1 \leq j \leq N - 1. \end{cases}$$