

TD N°1. Séries et transformées de Fourier

Séries de Fourier

Exercice 1.

Considérons la fonction 2π -périodique f définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = e^{-|x|}.$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f .
2. En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \pi \frac{\text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{\text{sh}(\pi)}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ch}(\pi) - (-1)^n}{(n^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2} \text{sh}(\pi).$$

Exercice 2.

Soit $0 < \alpha \leq \pi$. Considérons la fonction 2π -périodique f_α définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\alpha} & \text{si } |x| \leq \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f_α .
2. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4}.$$

Exercice 3.

Soit $\alpha > 0$. Considérons la fonction g_α définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_\alpha(x) = \frac{\sin(x)}{\text{ch}(\alpha) - \cos(x)}.$$

1. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_\alpha(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\alpha} \sin(nx).$$

2. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction g_α .
3. En déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)^2}{(\text{ch}(\alpha) - \cos(x))^2} dx = \frac{4\pi}{e^{2\alpha} - 1}.$$

Exercice 4.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |\cos(x)|.$$

Considérons l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, -y''(x) + y(x) = f(x).$$

1. Développer la fonction f sous la forme d'une série trigonométrique.
2. Déterminer une solution π -périodique de l'équation différentielle considérée.
3. Résoudre cette équation différentielle.

Transformation de Fourier**Exercice 5.**

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f .
2. En déduire la transformée de Fourier des fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = f\left(\frac{1-x}{2}\right), \quad f_2 = xf(x), \quad \text{et} \quad f_3(x) = x^2 f(x).$$

Exercice 6.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction g .
2. En déduire la valeur des intégrales

$$\forall x \in \mathbb{R}, I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^3} \cos(tx) dt.$$

Exercice 7.

Pour $a > 0$, posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = e^{-a|x|}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f_a .
2. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En déduire la transformée de Fourier de la fonction g .

3. En déduire la valeur des intégrales

$$I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt, \quad I_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt, \quad \text{et} \quad I_3(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt.$$

Exercice 8.

Pour $a > 0$, posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{-ax^2}.$$

1. Vérifier que la transformée de Fourier $\hat{g}_a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'elle satisfait

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}'_a(\xi) = -\frac{\xi}{2a} \hat{g}_a(\xi).$$

2. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt.$$

a. Montrer que h est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

b. Vérifier que

$$h(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{et} \quad h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

c. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Conclure que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}_a(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}.$$

Exercice 9.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = e^{-\sqrt{2}|x|}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction ϕ .

2. Considérons une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f * \phi(x) = e^{-x^2}.$$

a. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f .

b. En déduire la valeur de la fonction f .

Exercice 10.

Soit $0 < a < b$. Déterminer une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}.$$

Exercice 11.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-t^2} e^{tx} dt = 0.$$

1. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}.$$

Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = 0.$$

2. En déduire que

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = 0.$$

3. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$$

Exercice 12.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}} e^{-i\xi t} dt.$$

2. En déduire que la fonction f est impaire si et seulement si

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x^2} dx = 0.$$

Exercice 13.

Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Considérons l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f''(x) + f(x) = g(x).$$

1.a. Supposons qu'il existe une solution $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de cette équation telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Vérifier que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction f satisfait

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi^2 + 1}.$$

b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-|x-y|} dy.$$

2. Vérifier qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de cette équation différentielle telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 14.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction g .

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)^4}{x^4} dx.$$

Exercice 15. *Principe d'incertitude d'Heisenberg.*

Soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)(\psi(x)^2 + \psi'(x)^2) dx < +\infty.$$

1. Vérifier que ψ et ψ' appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, avec

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\psi'}(\xi) = i\xi \widehat{\psi}(\xi).$$

2.a. Vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 dx = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\psi'(x) dx.$$

b. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

c. Conclure que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 16. *Système de Hermite.*

1.a. Soit $n \geq 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}.$$

b. Déterminer le degré du polynôme H_n et calculer son coefficient dominant.

2. Pour $n \geq 0$, posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi} n!}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

a. Vérifier que les fonctions ϕ_n appartiennent à l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes complexes $(P_n^\xi)_{n \geq 0}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n^\xi(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-i\xi x},$$

et

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n^\xi(x)| \leq e^{|\xi x|}.$$

4. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \geq 0, \langle \phi_n, f \rangle_{L^2} = 0.$$

a. Soit

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} f(x).$$

Vérifier que la fonction g appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

b. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}(\xi) = 0.$$

c. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

d. Conclure que $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.