CY Cergy Paris Université | **Analyse harmonique appliquée**
Master 1 Mathématiques | **2025-2026**

Examen partiel

La durée de cet examen est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Exercice 1. (7 points)
Soit
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1.a. Vérifier que le produit de convolution $f \star f$ est bien défini, continu, borné et intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur du produit de convolution $f \star f$.

2.a. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction f.

b. Déterminer la transformée de Fourier du produit de convolution $f \star f$.

3.a. Vérifier que le produit de convolution $f \star (f \star f)$ est bien défini, continu, borné et intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur du produit de convolution $f \star (f \star f)$.

c. Déterminer la transformée de Fourier du produit de convolution $f \star (f \star f)$.

Exercice 2. (5 points)
Soit $T > 0$. Considérons la fonction de Hann H définie par
$$\forall t \in \mathbb{R},\ H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\Big(\frac{\pi t}{T}\Big)\Big) \text{ si } |t| < T, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

1.a. Vérifier que la fonction H est intégrable et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer l'intégrale
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)^2 \, dt.$$

c. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{H}$ de la fonction H.

2. Soit
$$\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{-\pi/T, 0, \pi/T\},\ F(\xi) = \frac{\sin(\xi T)}{\xi(\pi - T\xi)(\pi + T\xi)}.$$

a. Vérifier que la fonction F définit une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer l'intégrale
$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi T)^2}{\xi^2(\pi - T\xi)^2(\pi + T\xi)^2} \, d\xi$$

Exercice 3. (8 points)

Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que f et f' soient de carré intégrable.

1.a. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t)^2 = f(0)^2 + 2\int_0^t f(x)\, f'(x)\, dx.$$

b. En déduire que la fonction f^2 a une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Conclure que la fonction f a une limite nulle en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Soit

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \chi_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| \leq n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

a. Vérifier que

$$f'\,\chi_n \underset{n \to +\infty}{\to} f' \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

b. En déduire qu'il existe une extraction $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ telle que

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f'\,\chi_{\varphi(n)})(\xi) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathcal{F}(f')(\xi).$$

3.a. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Vérifier que

$$\forall n \geq 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, \chi_n(t)\, e^{-i\xi t}\, dt = f(n)e^{-i\xi n} - f(-n)e^{i\xi n} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \chi_n(t)\, e^{-i\xi t}\, dt.$$

b. Conclure que les transformées de Fourier $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(f')$ des fonctions f et f' satisfont

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f')(\xi) = i\,\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi).$$