

Introduction au traitement du signalIntroduction

Les signaux qu'ils soient acoustiques, électromagnétiques ou encore numériques, sont au cœur des activités humaines. La théorie du traitement du signal cherche à les analyser, les transformer, ou les transmettre. La finalité de ce cours est de présenter certains outils mathématiques en relation avec l'analyse de Fourier qui aident à la compréhension et à la mise en œuvre de ces différentes opérations. Mais avant de détailler ces outils, il est utile de présenter et d'illustrer les classes de signaux auxquels ils vont s'appliquer, et les transformations les plus courantes appliquées à ces signaux.

I Notion de signal et exemples

La terminologie de signal s'applique à des phénomènes très généraux. Elle désigne une quantité qui dépend d'une ou plusieurs variables physiques, typiquement le temps ou la position. Sur le plan mathématique, elle correspond donc à la notion de fonction (ou de suite dans le cas où la variable physique considérée est discrète). Elle peut comporter une dimension aléatoire, mais dans la suite de cette introduction, nous nous limiterons au cas des signaux déterministes.

Des exemples typiques de signaux sont donnés par :

- la position d'un objet qui dépend du temps ;
- l'intensité ou la tension dans un circuit électrique qui dépendent du

temps et de la position;

- les composantes d'un champ électromagnétique qui dépendent du temps et de la position;
- les niveaux de couleur dans une image (ou une vidéo) qui dépendent de la position (et du temps);
- l'intensité d'une onde acoustique qui dépend du temps et de la position;
- la valeur d'une action financière qui dépend du temps...

Déf: (i) Un signal est dit analogique lorsqu'il dépend d'une variable continue (soit d'une variable réelle).

(ii) Un signal est dit discret lorsqu'il dépend d'une variable discrète (soit d'une variable entière).

Rem: Dans la suite de cette introduction, nous nous limitons à des signaux qui ne dépendent que d'une seule variable, mais un signal analogique peut dépendre de plusieurs variables réelles, tandis qu'un signal discret peut dépendre de plusieurs variables discrètes.

Ex: (i) Une suite finie $(x_n)_{0 \leq n \leq N}$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ à indices entiers relatifs sont des signaux discrets.

(ii) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \leq b$. Le signal rectangle associé aux nombres a et b est défini par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 1 \text{ si } a \leq t \leq b, 0, \text{ sinon.}$$

Il est dit centré lorsque $a = -b$, et il s'agit d'un signal analogique:



(iii) Soit $\forall t \in \mathbb{R}, H(t) = 1$ si $t \geq 0$, et 0, sinon. L'échelon unité de Heaviside est un signal analogique:

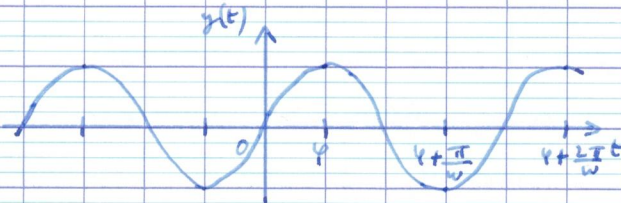


(iv) Soit $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$, où $(a, \omega, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Le signal y est dit sinusoïdal pur ou sinusoïdal monochromatique.

Le nombre a est l'amplitude de ce signal, tandis que w désigne sa pulsation. Le signal analogique s'écrit aussi sous la forme:

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = a \cos(wt) + b \sin(wt), \text{ avec } a = \alpha \cos(\varphi) \text{ et } b = -\alpha \sin(\varphi).$$



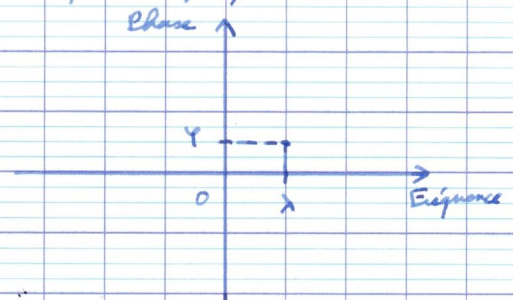
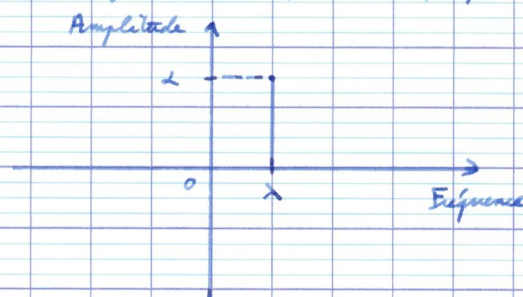
(v) Un signal sinusoïdal pur ou monochromatique peut aussi s'exprimer sous la forme complexe:

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \alpha e^{i(wt + \varphi)}, \text{ où } (\alpha, w, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Le nombre α est alors l'amplitude du signal, et w reste sa pulsation. La plus petite période de ce signal est égale à $T = \frac{2\pi}{w}$; et sa fréquence est définie comme le nombre:

$$\lambda = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$$

Il est possible de représenter en fréquence ce signal sinusoïdal à l'aide des diagrammes amplitude - fréquence et phase - fréquence:



Déf: (i) Un signal est dit scalaire lorsqu'il est à valeurs réelles ou complexes.

(ii) Un signal est dit vectoriel lorsqu'il est à valeurs dans un espace vectoriel réel ou complexe de dimension supérieure ou égale à deux.

(iii) Un signal est dit quantifié lorsqu'il est à valeurs dans $q\mathbb{N}$ pour un nombre q strictement positif.

Rem: Un signal discret et quantifié est appelé signal numérique.

Ex: (i) Les signaux rectangles, l'échelon unité de Heaviside, ou les signaux sinusoïdaux monochromatiques sont des signaux scalaires.

- (ii) Considérons les pixels d'un écran rectangulaire numérotés suivant leur ligne $1 \leq i \leq N$ et leur colonne $1 \leq j \leq M$. L'application qui à chaque pixel (i, j) associe l'intensité lumineuse des couleurs rouge $R(i, j)$, bleu $B(i, j)$ et vert $V(i, j)$ est un signal (discret) vectoriel.
- (iii) Considérons les allocations mémoire élémentaires d'un disque dur numérotées suivant leur position $1 \leq k \leq K$. L'application qui à chacune de ces positions associe la valeur du bit contenu dans cette allocation mémoire est un signal (discret) quantifié, soit un signal numérique.

Rem. Dans la suite de cette introduction, nous nous limitons aux signaux à valeurs scalaires et non quantifiés, mais les notions introduites demeurent pertinentes dans le cas vectoriel.

Les exemples précédents montrent qu'il est très utile de transformer un signal (du même type ou de type différent) en un autre signal. C'est en effet le cas pour une image d'un écran d'ordinateur qui nécessite d'être stockée sur le disque dur de cet ordinateur. La notion de système de transmission que nous allons maintenant introduire répond à cette nécessité.

II. Systèmes de transmission et exemples

De façon générale, un système de transmission désigne un appareil qui transforme un signal d'entrée x en un signal de sortie y . Sur le plan mathématique, il s'agit donc d'une application de l'ensemble des signaux d'entrée dans l'ensemble des signaux de sortie. Cette application peut associer des signaux de même type ou non.

Def. (i) Un système de transmission est dit analogique lorsqu'il associe à des signaux d'entrée analogiques, des signaux de sortie analogiques.

(ii) Un système de transmission est dit discret lorsqu'il associe à des

signaux d'entrée discrets, des signaux de sortie discrets.

- (iii) Un système de transmission est un convertisseur analogique-discret lorsqu'il associe à un signal d'entrée analogique, un signal de sortie discret; il s'agit d'un convertisseur discret-analogique lorsqu'il associe à un signal d'entrée discret, un signal de sortie analogique.

Dans la suite, notre objectif n'est pas de décrire, ni de comprendre, de quelle façon un système de transmission transforme un signal d'entrée en un signal de sortie, mais plutôt de déterminer quelles sont les propriétés du signal de sortie par rapport au signal d'entrée, ou plus généralement, quelles propriétés peuvent être espérées pour des signaux de sortie issus d'une certaine catégorie de signaux d'entrée transformés par une classe spécifique de systèmes de transmission.

Donnons pour illustrer cette notion de systèmes de transmission quelques exemples classiques de systèmes de transmission analogiques, discrets, et de convertisseurs.

2. Exemples de systèmes de transmission analogiques

Commençons par énumérer quelques systèmes de transmission analogiques élémentaires:

- (i) Pour une constante $a > 0$ finie, l'amplificateur idéal associe à un signal d'entrée $x(t)$ le signal de sortie:

$$y(t) = a x(t).$$

- (ii) Pour une constante $\tau > 0$, la ligne à retard associe à un signal d'entrée $x(t)$ le signal de sortie:

$$y(t) = x(t - \tau).$$

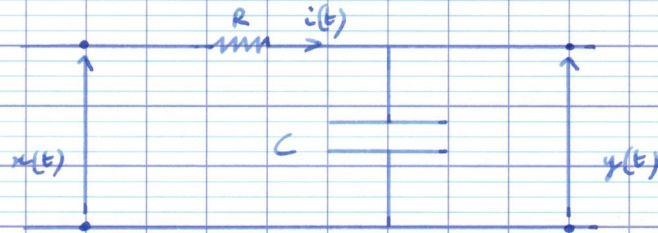
- (iii) Le dérivateur associe à un signal d'entrée $x(t)$ le signal de sortie:

$$y(t) = x'(t).$$

- (iv) Pour un nombre $T > 0$, le filtre à moyenne glissante associe à un signal d'entrée $x(t)$ le signal de sortie:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds.$$

L'implémentation des systèmes de transmission analogiques repose en général sur l'utilisation de circuits électroniques composés de résistances, de capacités et de transistors. Un exemple élémentaire de circuit électronique de ce type est donné par le circuit RC, qui contient une résistance R et un condensateur C suivant le schéma:



Le signal de sortie, soit la tension $y(t)$, est relié au signal d'entrée, soit la tension $x(t)$, par la loi d'Ohm:

$$x(t) = R i(t) + y(t).$$

La tension $y(t)$ s'exprime en fonction de la charge $Q(t)$ du condensateur à travers la formule:

$$Q(t) = C y(t),$$

tandis que cette charge est reliée à l'intensité $i(t)$ suivant l'expression:

$$i(t) = Q'(t).$$

En conclusion, le signal de sortie $y(t)$ satisfait l'équation différentielle:

$$RC y'(t) + y(t) = x(t),$$

dont le second membre est donné par le signal d'entrée $x(t)$. Sachant que

$$\left(e^{\frac{t}{RC}} y(t) \right)' = e^{\frac{t}{RC}} \left(y'(t) + \frac{1}{RC} y(t) \right) = \frac{e^{\frac{t}{RC}}}{RC} x(t),$$

cette équation différentielle a pour solution:

$$y(t) = e^{-\frac{t}{RC}} y(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{\frac{s-t}{RC}} x(s) ds,$$

autrement dit le signal de sortie $y(t)$ se calcule à partir d'une expression intégrale, plus précisément, un produit de convolution, du signal d'entrée $x(t)$. Dans des circuits électroniques plus compliqués, les signaux d'entrée et de sortie sont souvent reliés par des équations différentielles à coefficients constants, comme dans le cas du circuit RC, dont les solutions peuvent se calculer à partir de représentations intégrales adéquates, similaires à celle donnée dans le cas du circuit RC.

2. Exemples de systèmes de transmission discrets

Commençons de nouveau par énumérer quelques systèmes de transmission discrets, dont plusieurs apparaissent comme des analogues discrets des systèmes de transmission analogiques que nous avons précédemment listés :

- (i) Pour une constante $a > 0$, l'amplificateur idéal associé à un signal d'entrée x_n un signal de sortie :

$$y_n = a x_n.$$

- (ii) Pour un entier $m \geq 1$ fixé, le décalage associé à un signal d'entrée x_n le signal de sortie :

$$y_n = x_{n-m}.$$

- (iii) Pour un entier $N \geq 1$ fixé, le filtre à moyenne glissante associé à un signal d'entrée x_n le signal de sortie :

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n x_k.$$

L'implémentation des systèmes de transmission discrets repose en général sur l'utilisation de processeurs informatiques qui mettent en œuvre des filtres récurrents de la forme :

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k},$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne le signal d'entrée, $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le signal de sortie, et $(a_k)_{0 \leq k \leq N}$ et $(b_k)_{0 \leq k \leq M}$ sont des coefficients réels. Un exemple typique de filtre récurrent est fourni par la formule :

$$y_n = 2 y_{n-1} + x_n,$$

qui correspond à faire subir au signal de sortie un décalage d'un indice 1, une amplification d'un facteur 2, et à lui ajouter le signal d'entrée. Tautant que

$$\frac{y_n}{2^n} = \frac{y_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{x_n}{2^n},$$

cette équation récurrente a pour solution :

$$y_n = \begin{cases} \sum_{k=2}^n 2^{n-k} x_k + 2^n y_0 & \text{si } n \geq 0, \\ - \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{n-k} x_k + 2^n y_0 & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

autrement dit le signal de sortie $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ se calcule à partir du signal d'entrée $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par une combinaison linéaire finie, à nouveau de type produit de con-

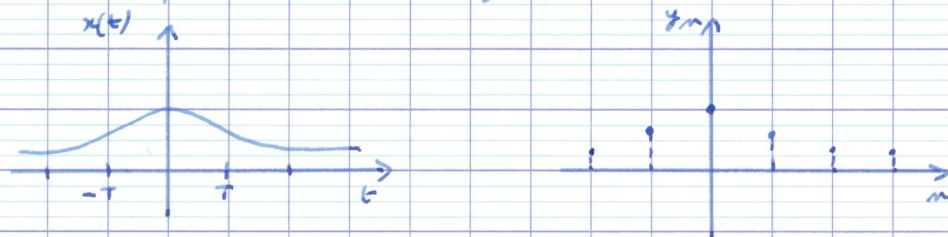
volution, d'éléments de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Cette représentation sommative du signal de sortie est analogue aux représentations intégrales du signal de sortie que nous avons mis en évidence dans le cas analogique.

3. Exemples de convertisseurs analogiques-discrets ou discrets-analogiques

L'exemple principal de convertisseur analogique-discret est donné par l'échantillonneur : étant donnée une période d'échantillonnage $T > 0$, l'échantillonneur associe à un signal d'entrée analogique $x(t)$ le signal de sortie discret $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini par les formules :

$$y_n = x(nT),$$

autrement dit il donne les valeurs du signal d'entrée analogique à tous les multiples entiers de la période d'échantillonnage T :



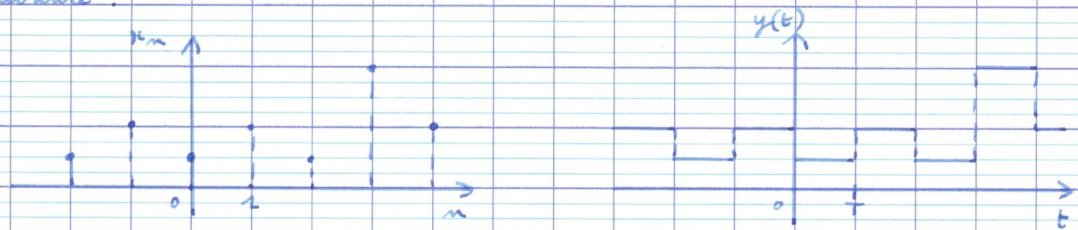
L'échantillonneur est l'un des éléments fondamentaux des chaînes de transmission numériques qui consistent à transformer ou à transmettre un signal analogique via un traitement numérique de ce signal.

Un autre élément d'une telle chaîne est typiquement constitué par le bloqueur qui est un convertisseur discret-analogique, et dont le rôle est inverse à celui de l'échantillonneur, soit de reconstituer un signal analogique à partir d'un signal discret. Étant donnée une période $T > 0$, le bloqueur associe à un signal d'entrée discret $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le signal de sortie $y(t)$ donné par la fonction constante par morceaux :

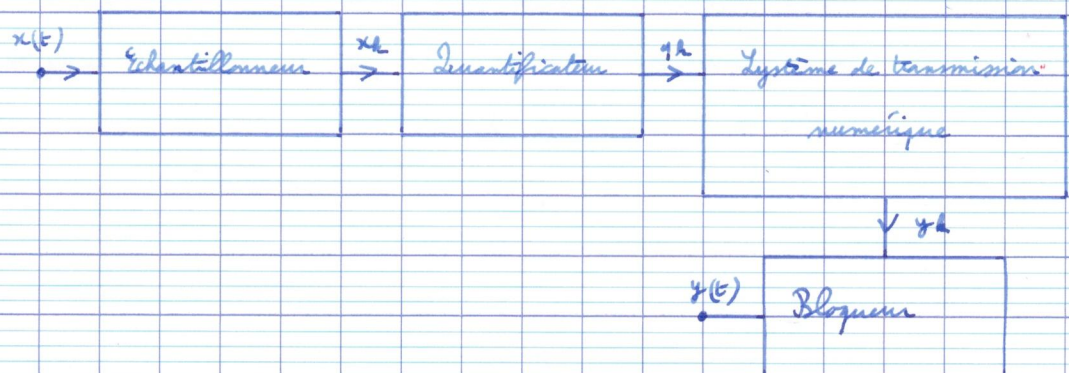
$$y(t) = x_n \text{ si } nT \leq t < (n+1)T,$$

autrement dit il conserve la valeur du signal discret pendant toute une période T jusqu'à passer à la valeur suivante de ce signal lors de la période

suivante :



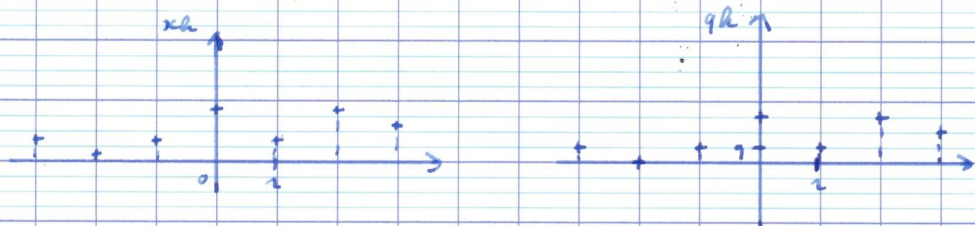
Un schéma (très simplifié) d'une chaîne de transmission numérique à l'allure suivante :



Dans ce schéma, le quantificateur transforme un signal d'entrée discret x_k en signal de sortie numérique q_k . L'exemple le plus simple de quantificateur est le quantificateur uniforme : étant donné un signal discret $(x_k)_{k \geq 0}$, limité par une constante $M > 0$, où q désigne l'unité de quantification, le quantificateur uniforme renvoie le signal de sortie quantifié :

$$q_k = hq \text{ si } hq \leq x_k < (h+1)q,$$

autrement dit le signal d'entrée discret est décomposé dans des intervalles de même longueur q :



Le rôle du quantificateur est donc de transformer le signal de sortie discret obtenu après échantillonnage en un signal numérique que des systèmes de transmission numériques, soit en pratique informatiques, peuvent traiter avant qu'un convertisseur discret-analogique, de type bloqueur, ne transforme le signal numérique ainsi traité en signal analogique.

Le schéma précédent est bien sûr très simpliste, et les systèmes de transmission utilisés en pratique, typiquement pour la transmission d'une conversation téléphonique, ou d'une émission radiophonique ou télévisuelle, sont bien plus sophistiqués.

Dans la suite de ce cours, le principal objectif sera d'expliquer les notions mathématiques qui apparaissent dans cette version élémentaire du traitement du signal, et en particulier le rôle joué par les différents concepts et les nombreux outils de l'analyse de Fourier.