

Examen

La durée de cet examen est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Exercice 1. (8 points)

Soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{-|t|}.$$

1.a. Vérifier que la fonction f appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

b. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de la fonction f .

2. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

a. Vérifier que la fonction g appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

b. En déduire la transformée de Fourier $\widehat{g}$ de la fonction g .

3.a. Montrer, sans le calculer, que le produit de convolution $f \star f$ est bien défini, continu et borné sur $\mathbb{R}$, et qu'il appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

b. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f \star f(t) = (1 + |t|)e^{-|t|}.$$

c. Déterminer la transformée de Fourier $\widehat{f \star f}$ de ce produit de convolution.

d. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)^2}.$$

En déduire la transformée de Fourier $\widehat{h}$ de la fonction h .

Exercice 2. (7 points)

Soit $T > 0$. Considérons l'opérateur A donné par l'expression

$$\forall x \in L^1(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, Ax(t) = \int_t^{t+T} x(s) ds - \int_{t-T}^t x(s) ds.$$

1. Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$.

a. Vérifier que la fonction Ax est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction Ax appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ et qu'elle satisfait

$$\|Ax\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2T\|x\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

c. En déduire que l'opérateur A définit un filtre analogique de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

- 2.a. Le filtre analogique A est-il convolutif ? Si oui, déterminer la réponse impulsionnelle h_A de ce filtre.
- b. Le filtre analogique A est-il causal ?
- c. Le filtre analogique A est-il stable ?
3. Calculer la fonction de transfert H_A du filtre analogique A .

Exercice 3. (5 points)

Considérons le filtre différentiel Φ défini à partir de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = x(t).$$

1. Déterminer la fonction de transfert H_Φ associée au filtre différentiel Φ .
- 2.a. Pour $a \in \mathbb{R}$, posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-(1+ai)t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Vérifier que la fonction f_a définit une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et calculer sa transformation de Fourier $\widehat{f}_a$.

- b. En déduire la réponse impulsionnelle h_Φ du filtre différentiel Φ .
- 3.a. Le filtre différentiel Φ est-il stable ?
- b. Le filtre différentiel Φ est-il causal ?