GRAVEJAT Philippe   26/1/26

Master 1

TD N° 1 : Traitement du signal

Conversion analogique discret

I 1.a. Soit $R>0$; $\forall |n| \geq R$, $\forall t \in [-R,R]$, $|f(t+2n\pi)| \leq \frac{c}{1+(t+2n\pi)^2} \leq \frac{c}{1+(2|n|\pi-R)^2}$; comme $\sum_{|n|\geq R} \frac{1}{1+(2|n|\pi-R)^2}$ est convergente, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2n\pi)$ converge normalement sur $[-R,R]$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$; de même, $\forall |n| \geq R$, $\forall t \in [-R,R]$, $|f'(t+2n\pi)| \leq \frac{c}{1+(2|n|\pi-R)^2}$ $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(t+2n\pi)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b. Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2n\pi)$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(t+2n\pi)$ convergent normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, F est bien défini et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+2(n+1)\pi) \overset{m=n+1}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(t+2m\pi) = F(t) \Rightarrow F$ est 2π-périodique.

2.a. Par convergence normale de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2k\pi)$ sur $[-\pi,\pi]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+2k\pi) e^{-int} \, dt \overset{x=t+2k\pi}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi+2k\pi}^{\pi+2k\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(n)$.

b. Comme F est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Dirichlet, $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(F) e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$, d'où la formule sommatoire de Poisson : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$.

c. Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}$; g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et il existe $c>0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|g(t)| + |g'(t)| \leq \frac{c}{1+t^2}$; comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \sqrt{2} \, e^{-\xi^2}$, la formule sommatoire de Poisson assure que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t+2n\pi)^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2} \times e^{int}$, d'où pour $t=0$: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2} = \sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi^2}$.

II Soit p.p.t. $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) e^{-i\omega_0 t}$; la fonction g appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et : p.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\omega_0+\xi)$; comme p.p.t. $|\xi| > \frac{\pi}{\tau}$, $|\omega_0+\xi-\omega_0| > \frac{\pi}{\tau}$, p.p.t. $|\xi| > \frac{\pi}{\tau}$, $\mathcal{F}(g)(\xi) = 0$, d'où par le théorème de Nyquist-Shannon, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\tau}(t-n\tau)\right) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\tau}(t-n\tau)\right) e^{i\omega_0(t-n\tau)}$.

III 1. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$, le produit de convolution $f * g$ est bien défini, continu et borné sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f * \rho(nT) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(nT - t) f(t)\, dt = \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)\, dt = f[n]$.

2.a. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\rho \in L^2(\mathbb{R})$, $f * \rho \in L^2(\mathbb{R})$, avec ppt $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f*\rho)(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{\rho}(\xi)\, \mathcal{F}(f)(\xi)$; sachant que p.p.t $|\xi| > \frac{\pi}{T}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = 0$, ppt $|\xi| > \frac{\pi}{T}$, $\mathcal{F}(f*\rho)(\xi) = 0$, d'où par le théorème de Nyquist - Shannon, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f * \rho(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f*\rho(nT)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$.

b.(i) Observons d'abord que $\mathcal{F}(\sigma) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, de sorte que $\sigma \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; comme $f * \rho \in L^2(\mathbb{R})$, $(f*\rho) * \sigma \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}$, $(f*\rho) * \sigma(t) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{[\mathcal{F}(f*\rho)\, \mathcal{F}(\sigma)]}(-t)$; sachant que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\rho \in L^2(\mathbb{R})$, p.p.t $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f*\rho)(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{\rho}(\xi)\, \mathcal{F}(f)(\xi)$; comme $\hat{\rho}(0) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}$ et $\forall \xi \neq 0$, $\hat{\rho}(\xi) = \frac{1 - e^{-iT\xi}}{\sqrt{2\pi}\, i\xi}$, ppt $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f*\rho)(\xi)\mathcal{F}(\sigma)(\xi) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f)(\xi)\, 1_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}(\xi)$; comme ppt $|\xi| > \frac{\pi}{T}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = 0$, ppt $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f*\rho)(\xi) \times \mathcal{F}(\sigma)(\xi) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f)(\xi)$; sachant que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $(f*\rho) * \sigma(t) = T \times \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)(t) = T f(t)$.

(ii) Par le théorème de Nyquist - Shannon, $S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} f[n]\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} f*\rho(t)$ dans $L^2(\mathbb{R})$; comme $\sigma \in L^2(\mathbb{R})$, les produits de convolution $S_N * \sigma$ et $(f*\rho) * \sigma$ définissent des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ qui satisfont : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|S_N * \sigma(t) - (f*\rho) * \sigma(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [S_N(t-s) - f*\rho(t-s)]\, \sigma(s)\, ds \right| \leq \| S_N - f*\rho \|_2 \times \| \sigma \|_2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$; en particulier, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(\cdot - nT)\right) * \sigma(t)$ converge (uniformément) sur $\mathbb{R}$, et sa somme vaut : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(\cdot - nT)\right) * \sigma(t) = (f*\rho) * \sigma(t) = T f(t)$.

(iii) Par définition, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(\cdot - nT)\right) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(s - nT)\right) \sigma(t - s)\, ds \overset{u = s - nT}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T} u\right) \sigma(t - nT - u)\, du$; sachant que $\mathrm{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\sigma \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}\cdot\right) * \sigma(\tau) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}\cdot\right)\right) \mathcal{F}(\sigma)\right]}(-\tau)$; comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{1}_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-it\xi}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi \xi}{T}\right)$, $\mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}\cdot\right)\right) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} 1_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]} \Rightarrow \mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}\cdot\right)\right) \times \mathcal{F}(\sigma) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\sigma)$; comme $\sigma \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}\cdot\right) * \sigma(\tau) = T\, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\sigma)(\tau) = \sigma(\tau)$, d'où nous concluons que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(\cdot - nT)\right) * \sigma(t) = T\, \sigma(t - nT)$, puis $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]\, \sigma(t - nT)$

IV 1. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, avec ppt $|\xi| > \pi$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = 0$, par le théorème de Nyquist - Shannon, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(t - n)) \Rightarrow f(t) - \sum_{n=-N}^{N} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(t-n)) = \sum_{|n| \geq N+1} f(n) \times \mathrm{sinc}(\pi(t - n))$; de plus, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2$ est convergente, d'où le fait que

$\Pi_N = \sum_{|n| \geq N+1} |f(n)|^2 \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\Big| f(t) - \sum_{n=-N}^{N} f(n) \times \mathrm{sinc}(\pi(t-n)) \Big| \leq \Pi_N^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{|n| \geq N+1} \mathrm{sinc}(\pi(t-n))^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$; lorsque $|t| \leq \frac{N+1}{2}$, $\forall |n| \geq N+1$, $\mathrm{sinc}(\pi(t-n))^2 \leq \frac{1}{\pi^2 (t-n)^2} \leq \frac{4}{\pi^2 n^2} \Rightarrow \sum_{|n| \geq N+1} \mathrm{sinc}(\pi(t-n))^2 \leq \frac{4}{\pi^2} \sum_{|n| \geq N+1} \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{\pi^2} \int_N^{+\infty} \frac{2\,ds}{s^2} = \frac{8}{\pi^2 N} \Rightarrow \sqrt{N} \Big| f(t) - \sum_{n=-N}^{N} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(t-n)) \Big| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \Pi_N^{\frac{1}{2}} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.a. Comme $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, avec $\forall |\xi| \geq \pi$, $\rho(\xi) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\rho^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{\rho^{(k)}}(t) \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; sachant que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\rho^{(k)}}(t) = (it)^k \hat{\rho}(t)$, $|t|^k \hat{\rho}(t) \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

b.(i) Comme $\hat{\rho} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ avec $|t|^2 \hat{\rho}(t) \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\hat{\rho} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; sachant que $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f * \hat{\rho} \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$, avec : p.p.t $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f * \hat{\rho})(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(f)(\xi)\, \hat{\hat{\rho}}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(f)(\xi)\, \rho(\xi)$, par parité de la fonction ρ ; comme $\forall |\xi| \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho(\xi) = 1$ et pp t $|\xi| \geq \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = 0$, $\mathcal{F}(f * \hat{\rho})(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(f)(\xi) \Rightarrow f * \hat{\rho} = \sqrt{2\pi}\, f$.

(ii) Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$ avec pp t $|\xi| \geq \pi$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = 0$, par le théorème de Nyquist-Shannon, $S_N = \sum_{n=-N}^{N} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(\cdot - n)) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R})$; comme $\hat{\rho} \in L^2(\mathbb{R})$, par l'inégalité de Young, $\| S_N * \hat{\rho} - f * \hat{\rho} \|_\infty \leq \| S_N - f \|_2\, \| \hat{\rho} \|_2 \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; en particulier, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(\cdot - n)) * \hat{\rho}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(\cdot - n)) * \hat{\rho}(t) = f * \hat{\rho}(t) = \sqrt{2\pi}\, f(t)$.

(iii) Par définition : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sinc}(\pi(\cdot - n)) * \hat{\rho}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(\pi(s-n))\, \hat{\rho}(t-s)\, ds \overset{u = s-n}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(\pi u)\, \hat{\rho}(t-u-n)\, du = \mathrm{sinc}(\pi \cdot) * \hat{\rho}(t-n)$; comme $\mathrm{sinc}(\pi \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{\rho} \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{sinc}(\pi \cdot) * \hat{\rho}(t-n) = \sqrt{2\pi}\, \big[\mathcal{F}(\mathrm{sinc}(\pi \cdot))\, \mathcal{F}(\hat{\rho}) \big](-t+n)$; comme $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}(\pi \cdot)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1_{[-\pi,\pi]}$, $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}(\pi \cdot))\, \mathcal{F}(\hat{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1_{[-\pi,\pi]}\, \mathcal{F}(\hat{\rho})$; sachant que $\mathcal{F}(\hat{\rho}) = \rho$ par parité de ρ, et que $\forall |\xi| \geq \pi$, $\rho(\xi) = 0$, $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}(\pi \cdot))\, \mathcal{F}(\hat{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rho \Rightarrow \mathrm{sinc}(\pi \cdot) * \hat{\rho}(t-n) = \hat{\rho}(-t+n) = \hat{\rho}(t-n)$
$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \hat{\rho}(t-n)$.

c. Par le théorème de Nyquist-Shannon, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2$ est convergente, d'où le fait que : $\Pi_N = \sum_{|n| \geq N+1} |f(n)|^2 \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\Big| f(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} f(n)\, \hat{\rho}(t-n) \Big| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pi_N^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{|n| \geq N+1} \hat{\rho}(t-n)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$; comme $\hat{\rho}$ est continue sur $\mathbb{R}$, par la question 2.a, $\forall p \geq 1$, $\exists A_p \geq 0$ t.q. $\forall s \in \mathbb{R}^*$, $|\hat{\rho}(s)| \leq \frac{A_p}{s^p}$; lorsque $|t| \leq \frac{N+1}{2}$, $\sum_{|n| \geq N+1} \hat{\rho}(t-n)^2 \leq A_p^2 \sum_{|n| \geq N+1} \frac{1}{|t-n|^{2p}} \leq A_p^2 \sum_{|n| \geq N+1} \frac{4^p}{n^{2p}} \leq A_p^2\, 4^p \int_N^{+\infty} \frac{2\, ds}{s^{2p}} \leq \frac{A_p^2\, 2^{2p+1}}{(2p-1)\, N^{2p-1}} \Rightarrow \Big| f(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} f(n)\, \hat{\rho}(t-n) \Big| \leq \frac{A_p\, 2^p\, \Pi_N^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2p-1)\pi}\, N^{p-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \forall k \geq 0$, $N^k \Big| f(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} f(n)\, \hat{\rho}(t-n) \Big| \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; en particulier, la convergence de cette série vers la fonction f est beaucoup plus rapide qu'à la question 1 ; autrement dit, suréchantillonner permet via cette méthode d'augmenter la vitesse de convergence de la série qui donne la reconstruction de la fonction échantillonnée.

Filtrage analogique

V.1. Lorsque $x \in L^1(\mathbb{R})$, Ix est bien définie sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|Ix(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)|\,ds = \|x\|_1 \Rightarrow Ix$ est bornée sur $\mathbb{R}$; comme $|Ix(t) - Ix(t_0)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |x(s)|\,ds\right| \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$ par le théorème de convergence dominée, Ix est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R} \Rightarrow I$ est bien défini de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, et de plus linéaire ; comme $\|Ix\|_\infty \leq \|x\|_1$, I est continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$; comme $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $I\tau_a x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s-a)\,ds \overset{u=s-a}{=} \int_{-\infty}^{t-a} x(u)\,du = \tau_a Ix(t)$, I est invariant par translation, donc définit un filtre de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$.

2. Soit $R>0$; la fonction x_R définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_R(t) = 0$ si $|t| \geq R$, $1 - \frac{|t|}{R}$ si $|t| \leq R$, appartient à $L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, avec $\|x_R\|_\infty = 1$, et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Ix_R(t) \leq Ix_R(R) = \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|t|}{R}\right) dt = R \Rightarrow \|Ix_R\|_\infty = R$; par l'absurde, le filtre I ne peut donc être stable.

3.a. Par définition, $\forall t \in \mathbb{R}$, $Ix(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-s)\,x(s)\,ds$, puisque $\forall s \in \mathbb{R}$, $H(t-s) = 1$ si $s \leq t$, 0 sinon.

b. Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$ t.q. pp $t \leq 0$, $x(t) = 0$; $\forall t \leq 0$, $Ix(t) = \int_{-\infty}^{t} 0\,ds = 0 \Rightarrow$ le filtre I est causal.

VI.1. Lorsque $x \in L^1(\mathbb{R})$, Ax est bien définie sur $\mathbb{R}$, avec : $|Ax(t) - Ax(t_0)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |1_{[t+T_1, t+T_2]}(s) - 1_{[t_0+T_1, t_0+T_2]}(s)| + |1_{[t-T_2, t-T_1]}(s) - 1_{[t_0-T_2, t_0-T_1]}(s)| \right\} \times |x(s)|\,ds$, d'où par le théorème de convergence dominée, $Ax(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} Ax(t_0) \Rightarrow Ax$ est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}$; par définition, $\int_{-\infty}^{+\infty} |Ax(t)|\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left|\int_{t+T_1}^{t+T_2} |x(s)|\,ds\right| + \left|\int_{t-T_2}^{t-T_1} |x(s)|\,ds\right| \right\} dt$, d'où par le théorème de Fubini-Tonelli, $\int_{-\infty}^{+\infty} |Ax(t)|\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| \left\{ \left|\int_{s-T_2}^{s-T_1} dt\right| + \left|\int_{s+T_1}^{s+T_2} dt\right| \right\} ds = 2|T_2 - T_1| \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)|\,ds \Rightarrow Ax$ appartient à $L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow A$ est bien défini, et de plus, linéaire, de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$; comme $\|Ax\|_1 \leq 2|T_2 - T_1|\,\|x\|_1$, A est continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$; comme $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $A\tau_a x(t) = \int_{t+T_1}^{t+T_2} x(s-a)\,ds - \int_{t-T_2}^{t-T_1} x(s-a)\,ds \overset{u=s-a}{=} Ax(t-a) = \tau_a Ax(t)$, A est invariant par translation, donc définit un filtre analogique de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

1.a. Soit $h = 1_{[-T_2, -T_1]} + 1_{[T_1, T_2]}$; la fonction h est dans $L^1(\mathbb{R})$, et : $\forall x \in L^2(\mathbb{R})$, ppt $t \in \mathbb{R}$, $h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1_{[-T_2,-T_1]}(t-s) + 1_{[T_1,T_2]}(t-s)]\, x(s)\, ds = \int_{t+T_1}^{t+T_2} x(s)\, ds + \int_{t-T_2}^{t-T_1} x(s)\, ds = Ax(t) \Rightarrow A$ est un filtre convolutif de réponse impulsionnelle h.

b. Comme ppt $t \in [-T_2, -T_1] \subset]-\infty, 0]$, $h(t) = 1 \neq 0$, le filtre A n'est pas causal ; comme $h \in L^1(\mathbb{R})$, il est par contre stable.

c. Comme A est un filtre convolutif de réponse impulsionnelle h, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $H(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{h}(\xi) = \int_{-T_2}^{-T_1} e^{-i\xi t}\, dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-i\xi t}\, dt = 2(T_2 - T_1)$ si $\xi = 0$, $\frac{1}{i\xi}[e^{i\xi T_2} - e^{i\xi T_1} - e^{-i\xi T_2} + e^{-i\xi T_1}]$ si $\xi \neq 0$, d'où : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $H(\xi) = 2T_2 \operatorname{sinc}(\xi T_2) - 2T_1 \operatorname{sinc}(\xi T_1)$.

VII 1. Comme $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $z = y - x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ssi $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}$, $z'(t) - a z(t) = y'(t) - a y(t) - x'(t) + a x(t)$; d'où $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) - a y(t) = x'(t) - b x(t)$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $z'(t) - a z(t) = (a-b)\, x(t)$.

2.a. Par définition du filtre différentiel D, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $H(\xi) = \frac{a-b}{i\xi - a} \Rightarrow \hat{h}(\xi) = \frac{-b+a}{(i\xi - a)\sqrt{2\pi}}$; pour $a > 0$, soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = (b-a)\, e^{at}$ si $t \leq 0$, 0 sinon ; $u \in L^1(\mathbb{R})$, avec : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} (b-a)\, e^{(a-i\xi)t}\, dt = \frac{-b+a}{\sqrt{2\pi}\,(i\xi - a)}$, d'où par injectivité de la transformée de Fourier, $h = u$; pour $a < 0$, soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $v(t) = (a-b)\, e^{at}$ si $t \geq 0$, 0 sinon ; $v \in L^1(\mathbb{R})$, avec : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} (-b+a)\, e^{(a-i\xi)t}\, dt = \frac{a-b}{\sqrt{2\pi}\,(i\xi - a)}$, d'où par injectivité de la transformée de Fourier, $h = v$.

b. Comme $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $v \in L^1(\mathbb{R})$, le filtre différentiel D est stable pour $a > 0$ et pour $a < 0$; comme ppt $t \in]-\infty, 0]$, $u(t) \neq 0$ et $v(t) = 0$, le filtre différentiel D est causal pour $a < 0$, mais n'est pas causal pour $a > 0$.

3.a. Comme $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $v \in L^1(\mathbb{R})$, le filtre convolutif D définit bien un filtre analogique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$; par définition, T est bien défini, linéaire et continu de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, avec : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in L^2(\mathbb{R})$, $T \tau_a x = \tau_a x + D \tau_a x = \tau_a x + \tau_a D x = \tau_a T x \Rightarrow T$ est invariant par translation, donc un filtre analogique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

b. Comme D est stable, il existe $C \geq 0$ tel que : $\forall x \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$, $Tx \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$ et satisfait : $\|Tx\|_\infty \leq C \|x\|_\infty \Rightarrow \|Dx\|_\infty \leq (1 + C) \|x\|_\infty \Rightarrow D$ est stable ; pour $a < 0$, D est causal, donc si $x \in L^2(\mathbb{R})$ satisfait ppt $t \in \mathbb{R}_-$, $x(t) = 0$, alors : ppt $t \in \mathbb{R}_-$, $Dx(t) = 0 \Rightarrow Tx(t) = 0 \Rightarrow T$ est causal ; pour $a > 0$, si T est causal, alors, quel que soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. pp $t \in \mathbb{R}_-$, $x(t) = 0$, pp $t \in \mathbb{R}_-$, $Tx(t) = 0 \Rightarrow Dx(t) = 0$

$\Rightarrow D$ est causal, ce qui est absurde ! $\Rightarrow T$ n'est pas causal pour $a > 0$.

VIII 1. Par définition du filtre différentiel Φ_1, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $H(\xi) = \dfrac{1}{(i\xi)^2 + \sqrt{2}\, i\xi + 1} = \dfrac{1}{1 - \xi^2 + \sqrt{2}\, i\xi}$.

2. Soit $R(X) = \dfrac{1}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$; comme $X^2 + \sqrt{2}X + 1 = \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$, $R(X) = \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{X + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} - \dfrac{1}{X + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}\right) \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} H(\xi) = \dfrac{i}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{1}{i\xi + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} - \dfrac{1}{i\xi + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}\right)$; comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}t} e^{-i\xi t}\,dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\left(i\xi + \frac{\sqrt{2}}{2} \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$, pp $t \le 0$, $h(t) = 0$, et pp $t \ge 0$, $h(t) = \dfrac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}t} - e^{+i\frac{\sqrt{2}}{2}t}\right) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$.

3.a. Comme $h \in L^1(\mathbb{R})$, le filtre différentiel Φ_1 est stable.

b. Comme pp $t \le 0$, $h(t) = 0$, le filtre différentiel Φ_1 est causal.

IX 1. Par définition du filtre différentiel Φ_2, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $H(\xi) = \dfrac{(i\xi)^2 + 1}{(i\xi)^3 + 1} = \dfrac{1 - \xi^2}{1 - i\xi^3}$.

2. Soit $R(X) = \dfrac{X^2 + 1}{X^3 + 1}$; comme $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1) = (X+1)\left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)$, $R(X) = \dfrac{2}{3(X+1)} - \dfrac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{3\left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)} - \dfrac{e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{3\left(X - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)} \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} H(\xi) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}\left[\dfrac{2}{i\xi + 1} - \dfrac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{i\xi - e^{\frac{i\pi}{3}}} - \dfrac{e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{i\xi - e^{-\frac{i\pi}{3}}}\right]$; comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{e^{\pm\frac{i\pi}{3}}t} e^{-i\xi t}\,dt = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{1}{i\xi - e^{\pm\frac{i\pi}{3}}}$, et $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\xi t}\,dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(i\xi + 1)}$, pp $t \ge 0$, $h(t) = \dfrac{2}{3} e^{-t}$, et pp $t \le 0$, $h(t) = \dfrac{1}{3}\left[e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{e^{\frac{i\pi}{3}}t} + e^{-\frac{2i\pi}{3}} e^{e^{-\frac{i\pi}{3}}t}\right] = \dfrac{2}{3} e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right)$.

3.a. Comme $h \in L^1(\mathbb{R})$, le filtre différentiel Φ_2 est stable.

b. Comme pp $t \le 0$, $h(t) = \frac{2}{3} e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$, le filtre différentiel Φ_2 n'est pas causal.

X 1. Par définition du filtre Φ_ω, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $H(\xi) = \dfrac{1}{-(i\xi)^2 + \omega^2} = \dfrac{1}{\xi^2 + \omega^2}$.

2. Soit $R(X) = \dfrac{1}{-X^2 + \omega^2}$; comme $X^2 - \omega^2 = (X - \omega)(X + \omega)$, $R(X) = \dfrac{1}{2\omega}\left(\dfrac{1}{X + \omega} - \dfrac{1}{X - \omega}\right) \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(\xi) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\omega}\left(\dfrac{1}{i\xi + \omega} - \dfrac{1}{i\xi - \omega}\right)$; comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\omega t} e^{-i\xi t}\,dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(i\xi + \omega)}$, et $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\omega t} e^{-i\xi t}\,dt = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(i\xi - \omega)}$, pp $t \ge 0$, $h(t) = \dfrac{1}{2\omega} e^{-\omega t}$, et pp $t \le 0$, $h(t) = \dfrac{1}{2\omega} e^{\omega t}$.

3.a. Comme $h \in L^1(\mathbb{R})$, le filtre différentiel Φ_ω est stable.

b. Comme pp $t \le 0$, $h(t) = \dfrac{e^{\omega t}}{2\omega} > 0$, le filtre différentiel Φ_ω n'est pas causal.

XI 1. a. Pour $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, le problème de Cauchy considéré est équivalent au système différentiel du premier ordre : $Y'(t) = M_w Y(t) + X(t)$, où $M_w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x(t) \end{pmatrix}$, muni de la condition initiale : $Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

b. Le polynôme caractéristique $\chi_w(\lambda)$ de la matrice M_w s'écrit : $\chi_w(\lambda) = \lambda^2 + w^2 = (\lambda + iw)(\lambda - iw)$ $\Rightarrow M_w = P \begin{pmatrix} iw & 0 \\ 0 & -iw \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ iw & -iw \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2iw} \begin{pmatrix} iw & 1 \\ iw & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM_w} = P \begin{pmatrix} e^{iwt} & 0 \\ 0 & e^{-iwt} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(wt) & \frac{\sin(wt)}{w} \\ -w\sin(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix} \Rightarrow \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, R(s,t) = e^{(t-s)M_w} = \begin{pmatrix} \cos(w(t-s)) & \frac{\sin(w(t-s))}{w} \\ -w\sin(w(t-s)) & \cos(w(t-s)) \end{pmatrix}$

c. Par la méthode de variation de la constante, $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = e^{tM_w} Y(0) + \int_0^t e^{(t-s)M_w} X(s)\,ds = \begin{pmatrix} \cos(wt)\, y_0 + \frac{\sin(wt)}{w} y_1 + \int_0^t \frac{\sin(w(t-s))}{w} x(s)\,ds \\ -w\sin(wt)\, y_0 + \cos(wt)\, y_1 + \int_0^t \cos(w(t-s))\, x(s)\,ds \end{pmatrix} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \cos(wt)\, y_0 + \frac{\sin(wt)}{w} y_1 + \frac{1}{w} \int_0^t \sin(w(t-s))\, x(s)\,ds$

2. a. Lorsque $x \in L^1(\mathbb{R})$, Fx est bien définie sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}, |Fx(t)| \leq \frac{1}{w} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)|\,ds = \frac{1}{w} \|x\|_1 \Rightarrow Fx$ est bornée sur $\mathbb{R}$; de plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $Fx(t) = \frac{1}{w} \sin(wt) \int_{-\infty}^t \cos(ws)\, x(s)\,ds - \frac{1}{w} \cos(wt) \int_{-\infty}^t \sin(ws)\, x(s)\,ds$; comme $x \in L^1(\mathbb{R})$, par le théorème de convergence dominée, les fonctions $t \mapsto \int_{-\infty}^t \sin(ws)\, x(s)\,ds$ et $t \mapsto \int_{-\infty}^t \cos(ws)\, x(s)\,ds$ sont continues sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow Fx$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ est bien défini, et de plus linéaire, de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$; comme $\|Fx\|_\infty \leq \frac{1}{w} \|x\|_1$, F est continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$; sachant que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$, $F\tau_a x(t) = \frac{1}{w} \int_{-\infty}^t \sin(w(t-s))\, x(s-a)\,ds \overset{u=s-a}{=} \frac{1}{w} \int_{-\infty}^{t-a} \sin(w(t-a-u))\, x(u)\,du = \tau_a Fx(t) \Rightarrow F$ est invariant par translation, donc définit un filtre analogique de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$.

b. (i) Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \frac{1}{w} \sin(wt)$ si $t \geq 0$, 0 sinon ; comme $\sin(0) = 0$, h est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$; quelle que soit $x \in L^1(\mathbb{R})$, $h * x$ est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et satisfait : $\forall t \in \mathbb{R}$, $h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)\, x(s)\,ds = \frac{1}{w} \int_{-\infty}^t \sin(w(t-s))\, x(s)\,ds = Fx(t) \Rightarrow F$ est un filtre convolutif de réponse impulsionnelle h.

(ii) Comme $\forall t \leq 0$, $h(t) = 0$, le filtre convolutif F est causal.

XII 1. Par définition du filtre RLC, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $H(\xi) = \frac{1}{LC(i\xi)^2 + RCi\xi + 1} = \frac{1}{-LC\xi^2 + iRC\xi + 1}$.

2. a. Soit $R(X) = \frac{1}{P(X)}$, où $P(X) = LCX^2 + RCX + 1$; comme le discriminant Δ de P est égal à $\Delta = R^2C^2 - 4LC$, trois cas se présentent :

(i) Si $\Delta<0$, alors : $P(X)=LC(X+\alpha-i\beta)(X+\alpha+i\beta)$ où $\alpha=\frac{R}{2L}$ et $\beta=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2LC}$

$\Rightarrow R(X)=\frac{1}{i\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{1}{X+\alpha-i\beta}-\frac{1}{X+\alpha+i\beta}\right)\Rightarrow \forall\xi\in\mathbb{R},\ \hat{h}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}H(\xi)=\frac{1}{i\sqrt{-2\pi\Delta}}\left(\frac{1}{i\xi+\alpha-i\beta}-\frac{1}{i\xi+\alpha+i\beta}\right)$; comme $\forall\xi\in\mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha\pm i\beta)t}e^{-i\xi t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(i\xi+\alpha\pm i\beta)}$,

pp t $t\leq 0$, $h(t)=0$, et pp t $t\geq 0$, $h(t)=\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\,t}{2LC}\right)$.

(ii) Si $\Delta>0$, alors : $P(X)=LC(X+\alpha-\beta)(X+\alpha+\beta)$ où $\alpha=\frac{R}{2L}$ et $\beta=\frac{\sqrt{\Delta}}{2LC}\Rightarrow$

$R(X)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(-\frac{1}{X+\alpha+\beta}+\frac{1}{X+\alpha-\beta}\right)\Rightarrow\forall\xi\in\mathbb{R},\ \hat{h}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}}\left(\frac{1}{i\xi+\alpha-\beta}-\frac{1}{i\xi+\alpha+\beta}\right)$;

comme $\alpha-\beta=\frac{R}{2L}-\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}>0$, et $\forall\xi\in\mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha\pm\beta)t}e^{-i\xi t}\,dt=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(i\xi+\alpha\pm\beta)}$, pp t $t\leq 0$, $h(t)=0$, et pp t $t\geq 0$, $h(t)=\frac{2}{\sqrt{\Delta}}e^{-\frac{Rt}{2L}}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2LC}t\right)$.

(iii) Si $\Delta=0$, alors : $P(X)=LC\left(X+\frac{R}{2L}\right)^2\Rightarrow R(X)=\frac{1}{LC\left(X+\frac{R}{2L}\right)^2}\Rightarrow\forall\xi\in\mathbb{R}$,

$\hat{h}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}LC\left(i\xi+\frac{R}{2L}\right)^2}$; comme $\forall\xi\in\mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}t\,e^{-\frac{Rt}{2L}}e^{-i\xi t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(i\xi+\frac{R}{2L}\right)^2}$

pp t $t\leq 0$, $h(t)=0$, et pp t $t\geq 0$, $h(t)=\frac{1}{LC}t\,e^{-\frac{Rt}{2L}}$.

2. Dans les trois cas, $h\in L^1(\mathbb{R})\Rightarrow$ Le filtre différentiel RLC est stable ; dans les trois cas, pp t $t\leq 0$, $h(t)=0\Rightarrow$ Le filtre différentiel RLC est causal.

3. Comme $\Delta=-2LC<0$, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2LC}}$ et $\beta=\frac{1}{\sqrt{2LC}}$, $\forall\xi\in\mathbb{R},\ H(\xi)=\frac{1}{LC\left(i\xi+\frac{1-i}{\sqrt{2LC}}\right)\left(i\xi+\frac{1+i}{\sqrt{2LC}}\right)}$

$\Rightarrow |H(\xi)|^2=\frac{1}{L^2C^2\left(\xi^2-\sqrt{\frac{2}{LC}}\xi+\frac{1}{LC}\right)\left(\xi^2+\sqrt{\frac{2}{LC}}\xi+\frac{1}{LC}\right)}=\frac{1}{L^2C^2\xi^4+1}=\frac{1}{1+\left(\frac{\xi}{\xi_c}\right)^4}$,

$\xi_c=\frac{1}{\sqrt{LC}}\Rightarrow$ Le filtre différentiel RLC est un filtre de Butterworth d'ordre 2.

Transformation de Fourier discrète

XIII 1. Par définition, $\forall 0\leq n\leq N-1,\ \hat{s}_n=\sum_{k=0}^{N-1}s_k w_N^{-kn}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[e^{ik\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi n}{N}\right)}+e^{-ik\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{N}\right)}\right]$; si $n=\frac{N}{4}$ ou $n=\frac{3N}{4}$, alors : $\hat{s}_n=\frac{N}{2}$; sinon, $\hat{s}_n=$

$\frac{1}{2}\left\{\frac{1-e^{\frac{iN\pi}{2}}}{1-e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi n}{N}\right)}}+\frac{1-e^{-\frac{iN\pi}{2}}}{1-e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{N}\right)}}\right\}$.

2. Par définition, $\forall 0\leq n\leq N-1,\ \hat{t}_n=\sum_{k=0}^{N-1}k\,w_N^{-kn}$; sachant que $\forall t\neq 1,\ \sum_{k=0}^{N-1}t^k$ $=\frac{1-t^N}{1-t}$, $\sum_{k=0}^{N-1}k\,t^{k-1}=\frac{-Nt^{N-1}}{1-t}+\frac{1-t^N}{(1-t)^2}=\frac{1-Nt^{N-1}+(N-1)t^N}{(1-t)^2}\Rightarrow\sum_{k=0}^{N-1}$ $k\,t^k=\frac{t-Nt^N+(N-1)t^{N+1}}{(1-t)^2}$, et pour $t=1$, $\sum_{k=0}^{N-1}t=\frac{N(N-1)}{2}$, d'où, pour $n=0$,

$\hat{t}_0=\frac{N(N-1)}{2}$, et $\forall 1\leq n\leq N-1,\ \hat{t}_n=\frac{w_N^{-n}-N+(N-1)w_N^{-n}}{(1-w_N^{-n})^2}=\frac{N}{w_N^{-n}-1}=-\frac{N e^{\frac{in\pi}{N}}}{e^{\frac{in\pi}{N}}-e^{-\frac{in\pi}{N}}}$

$=\frac{N i\,e^{\frac{in\pi}{N}}}{2\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}=\frac{N}{2}\left(-1+i\operatorname{cotan}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right)$.

XIV 1. Quel que soit $(u_0,\dots,u_{N-1})\in\mathbb{C}^N$, il existe une unique suite $(v_n)_{n\geq 0}\in\mathcal{P}_N$ telle que : $\forall 0\leq k\leq N-1,\ u_k=v_k\Rightarrow$ L'application $\Phi:\mathcal{P}_N\to\mathbb{C}^N$ donnée par : $\forall v=(v_n)_{n\geq 0}\in\mathcal{P}_N$

$\Phi(v) = (v_0, \dots, v_{N-1})$ est bien définie et bijective ; comme Φ est linéaire, Φ est un isomorphisme linéaire du sous-espace $\mathcal{P}_N$ sur $\mathbb{C}^N \Rightarrow \dim(\mathcal{P}_N) = \dim(\mathbb{C}^N) = N$.

b. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tel que $\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k w^{(k)} = 0$; $\forall 0 \leq j \leq N-1$, $\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k w_N^{jk} = 0$ $\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\lambda_k}\, w_N^{-jk} = 0$, d'où, par bijectivité de la transformée de Fourier discrète, $\forall 0 \leq k \leq N-1$, $\overline{\lambda_k} = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \Rightarrow (w^{(0)}, \dots, w^{(N-1)})$ est une famille libre ; sachant que $\forall 0 \leq k \leq N-1$, $\forall n \geq 0$, $w^{(k)}_{n+N} = w_N^{k(n+N)} = w_N^{kn} = w^{(k)}_n$, il s'agit d'une famille de $\mathcal{P}_N$; comme $\dim(\mathcal{P}_N) = N$, $(w^{(0)}, \dots, w^{(N-1)})$ est une base de $\mathcal{P}_N$.

2.a. Par définition, $(d_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{P}_N$, et $\forall n \in N\mathbb{N}$, $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} w^{(k)}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1$, tandis que $\forall n \notin N\mathbb{N}$, $w_N^n \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} w^{(k)}_n = \frac{1 - w_N^{nN}}{N(1 - w_N^n)} = 0 \Rightarrow \forall n \geq 0$, $d_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} w^{(k)}_n$.

b. Par définition, $\forall M \geq 0$, $\sum_{0 \leq nN \leq M} \binom{M}{nN} = \sum_{j=0}^{M} \binom{M}{j} d_j = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{M} \binom{M}{j} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{jk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{M} \binom{M}{j} (w_N^k)^j\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} (1 + w_N^k)^M$; si $1 \leq k \leq N-1$, alors, $|1 + w_N^k| < 2 \Rightarrow (1 + w_N^k)^M = \underset{M \to +\infty}{o}(2^M) \Rightarrow \sum_{0 \leq nN \leq M} \binom{M}{nN} = \frac{2^M}{N} + \underset{M \to +\infty}{o}(2^M) \Rightarrow \sum_{0 \leq nN \leq M} \binom{M}{nN} \underset{M \to +\infty}{\sim} \frac{2^M}{N}$.

XV.1.a. Soit $\mathbb{C}_{N-1}[X]$ le sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $N-1$, et : $\forall P \in \mathbb{C}_{N-1}[X]$, $\Phi(P) = (P(w_N^0), \dots, P(w_N^{N-1}))$; Φ est bien définie et linéaire de $\mathbb{C}_{N-1}[X]$ dans $\mathbb{C}^N$; si $\Phi(P) = 0$, alors, P a au moins N racines distinctes $(w_N^n)_{0 \leq n \leq N-1}$; comme $d^\circ(P) \leq N-1$, $P = 0 \Rightarrow \Phi$ est injective ; comme $\dim(\mathbb{C}_{N-1}[X]) = \dim(\mathbb{C}^N) = N$, Φ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{C}_{N-1}[X]$ sur $\mathbb{C}^N \Rightarrow \forall (y_0, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, $\exists!\, P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{N-1}[X]$ tel que : $\forall 0 \leq j \leq N-1$, $P(w_N^j) = y_j$.

b. Par définition du polynôme P, $\forall 0 \leq j \leq N-1$, $y_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_k w_N^{jk} \Rightarrow \overline{y_j} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{a_k}\, w_N^{-jk}$, d'où par la formule de Fourier inverse, $\forall 0 \leq k \leq N-1$, $\overline{a_k} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \overline{y_j}\, w_N^{jk} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j\, w_N^{-jk}$.

c. Comme les coefficients $(a_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ sont donnés par la formule de Fourier inverse à partir des valeurs $(y_j)_{0 \leq j \leq N-1}$, l'algorithme de la transformation de Fourier rapide assure que le nombre de multiplications nécessaires pour le calcul de ces coefficients est au plus de l'ordre de $N \ln(N)$ lorsque l'entier N est grand.

2.a. (i) Par récurrence sur $0 \leq p \leq N-1$, $\alpha_p = \sum_{\ell=0}^{p} \alpha_{N-1-\ell}\, z^{p-\ell} \Rightarrow \alpha_{N-1} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \alpha_{N-1-\ell}\, z^{N-1-\ell} \overset{k = N-1-\ell}{=} \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k = P(z)$.

(ii) Le calcul de la valeur $P(z)$ par l'algorithme de Horner nécessite exactement $N-1$ multiplications.

b. Pour $z \in \mathbb{C}$, un algorithme pour le calcul du produit $Q(z)P(z)$ consiste à calculer les produits $(Q(\omega_N^k)P(\omega_N^k))_{0 \leq k \leq N-1}$, ce qui nécessite N multiplications, puis les coefficients du polynôme $P(X)Q(X)$, ce qui nécessite de l'ordre de $N\ln(N)$ multiplications, et enfin à appliquer l'algorithme de Horner pour déterminer la valeur $P(z)Q(z)$, ce qui requiert $N-1$ multiplications ; au final, cet algorithme pour le calcul du produit $P(z)Q(z)$ nécessite de l'ordre de $N\ln(N)$ multiplications lorsque N est grand.

3.a. Par définition du produit de deux polynômes, $\forall\, 0 \leq j \leq N-1$, $d_j = \sum_{k=0}^{j} \tilde{b}_k \tilde{c}_{j-k}$, où $\forall k \geq 0$, $\tilde{b}_k = b_k$ si $0 \leq k \leq q$, 0 sinon, et $\tilde{c}_k = c_k$ si $0 \leq k \leq r$, 0 sinon.

b. Le calcul direct de ces coefficients nécessite donc $\sum_{j=0}^{N-1} (j+1)$ multiplications, soit $\frac{1}{2} N(N+1)$ multiplications

c. Par l'algorithme de Horner, le calcul du produit $P(z)Q(z)$ à partir des coefficients $(d_j)_{0 \leq j \leq N-1}$ requiert $N-1$ multiplications ; le calcul de ce produit à partir des coefficients $(b_j)_{0 \leq j \leq q}$ et $(c_j)_{0 \leq j \leq r}$ nécessite donc de l'ordre de N^2 multiplications lorsque N est grand, ce qui est beaucoup plus important que le nombre de multiplications requises par l'algorithme de la question 2.b.

XVI 1.a. $\forall n \geq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n] = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin(\theta))^k \cos(\theta)^{n-k}\right) = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-\cos^2(\theta))^p \cos(\theta)^{n-2p} \Rightarrow T_n(X) = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-X^2)^p X^{n-2p}$ convient ; si $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\tilde{T}_N(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, alors $\tilde{T}_N - T_N$ s'annule sur $[-1, 1] \Rightarrow \tilde{T}_N = T_N$, d'où l'unicité de T_N.

b. $\forall n \geq 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+1}(\cos(\theta)) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\, T_n(\cos(\theta)) \Rightarrow T_{n+1}(X) + T_{n-1}(X) - 2XT_n(X)$ s'annule sur $[-1, 1]$, donc est identiquement nul $\Rightarrow T_{n+1}(X) = 2X\,T_n(X) - T_{n-1}(X)$.

c. Comme $T_0 = 1$, et $T_1(X) = X$, par récurrence sur $n \geq 1$, $\forall n \geq 1$, $d°(T_n) = n$, et $T_n(X) = 2^{n-1} X^n + \ldots$, tandis que $d°(T_0) = 0$.

d. $T_0 = 1$, $T_1(X) = X$, $T_2(X) = 2X^2 - 1$, et $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

2.a. Comme $\forall\, 0 \leq j \leq N$, $d°(T_j) = j$, $(T_j)_{0 \leq j \leq N}$ est une base du sous-espace $\mathbb{C}_N[X]$ des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à $N \Rightarrow \forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\exists!\,(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que : $P(X) = \sum_{j=0}^{N} a_j T_j(X)$.

b. Par définition : $\forall\, 0 \leq k \leq N$, $y_k = \sum_{j=0}^{N} a_j T_j\left(\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right) = \sum_{j=0}^{N} a_j \cos\left(\frac{jk\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N} a_j \left[w_{2N}^{jk} + w_{2N}^{-jk}\right] = \sum_{j=-N}^{N} c_j w_{2N}^{jk}$, où $\forall\, -N \leq j \leq N$, $c_j = \frac{a_{-j}}{2}$ si $-N \leq j \leq -1$, a_0 si $j=0$, et $\frac{a_j}{2}$ si $1 \leq j \leq N$.

c. D'après la question 2.b, $\forall\, 0 \leq k \leq N$, $y_k = \sum_{j=-N}^{N} c_j w_{2N}^{jk}$; par définition, $\forall\, N+1 \leq k \leq 2N$, $y_k = y_{2N-k} = \sum_{j=-N}^{N} c_j w_{2N}^{j(2N-k)} = \sum_{j=-N}^{N} c_j w_{2N}^{-jk} \overset{l=-j}{=} \sum_{l=-N}^{N} c_{-l} w_{2N}^{lk} = \sum_{l=-N}^{N} c_l \times w_{2N}^{lk}$, car : $\forall\, -N \leq l \leq N$, $c_l = c_{-l}$.

d. Soit $0 \leq j \leq N$; $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} y_k w_{2N}^{-jk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} w_{2N}^{-jk} \sum_{l=-N}^{N} c_l w_{2N}^{lk} = \frac{1}{N}\sum_{l=-N}^{N} c_l \sum_{k=0}^{2N-1} w_{2N}^{(l-j)k}$; comme $\sum_{k=0}^{2N-1} w_{2N}^{(l-j)k} = 2N$ si $l-j \in 2N\mathbb{Z}$, 0 sinon, si $j=0$, alors : $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} y_k w_{2N}^{-jk} = 2c_0$; si $j=N$, alors : $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} y_k w_{2N}^{-jk} = 2(c_N + c_{-N})$, tandis que, si $0 < j < N$, alors : $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} y_k w_{2N}^{-jk} = 2c_j \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} y_k w_{2N}^{-jk} = a_j \delta_j$ où $\delta_j = 2$ si $j=0$ ou $j=N$, 1 si $0<j<N$.