GRAVEJAT Philippe

Master 1

5/1/26

TD N°1 : Séries et transformées de Fourier

Séries de Fourier

I 1. La fonction f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} e^{(1-in)x}\,dx + \int_0^{\pi} e^{-x(1+in)}\,dx\Big] = \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)}$.

2. Comme la fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Dirichlet, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)} = 1$, et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)} e^{in\pi} = e^{-\pi} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi\, \mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{\mathrm{sh}(\pi)}$; par la formule de Parseval, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1-(-1)^n e^{-\pi})^2}{\pi^2(n^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi}(1-e^{-2\pi}) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(\pi)-(-1)^n}{(n^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}(\pi)$.

II 1. Pour $0 < \alpha \leq \pi$, la fonction f_α est 2π-périodique, paire et continue sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall n \geq 1$, $b_n(f_\alpha) = 0$, $a_0(f_\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{\alpha}{2\pi}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(f_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n^2\alpha\pi}(1-\cos(n\alpha))$.

2. Comme la fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Dirichlet, $\frac{\alpha}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\alpha\pi}(1-\cos(n\alpha)) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(2\pi-\alpha)}{4}$.

III 1. Comme $\alpha > 0$, $\mathrm{ch}(\alpha) > 1 \Rightarrow g_\alpha$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = \frac{e^{2ix}-1}{-i(e^{2ix}-e^{ix}(e^\alpha+e^{-\alpha})+1)}$; soit $R_\alpha(X) = \frac{1-X^2}{X^2-X(e^\alpha+e^{-\alpha})+1}$; comme $X^2-(e^\alpha+e^{-\alpha})X+1 = (X-e^\alpha)(X-e^{-\alpha})$, $R_\alpha(X) = -1 - \frac{e^\alpha}{X-e^\alpha} - \frac{e^{-\alpha}}{X-e^{-\alpha}} \Rightarrow g_\alpha(x) = \frac{1}{i}\Big[-1 - \frac{1}{(e^{ix}e^{-\alpha})-1} - \frac{e^{-\alpha}e^{-ix}}{1-(e^{-\alpha}e^{-ix})}\Big] = \frac{1}{i}\Big(-1+\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n}e^{ixn} - \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\alpha n}e^{-ixn}\Big] = 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\alpha n}\sin(nx)$.

2. Comme $\sum_{n\geq 1} e^{-n\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 0$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} 2e^{-n\alpha}\sin(nx)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ Cette série est la série de Fourier de sa somme $g_\alpha \Rightarrow \forall n \geq 0$, $a_n(g_\alpha) = 0$, et $\forall n \geq 1$, $b_n(g_\alpha) = 2e^{-n\alpha}$.

3. Comme g_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, par la formule de Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)^2}{(\mathrm{ch}(\alpha)-\cos(x))^2}\,dx = \frac{2\pi}{2} \times \sum_{n=1}^{+\infty} 4e^{-2n\alpha} = \frac{4\pi e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}} = \frac{4\pi}{e^{2\alpha}-1}$.

IV 1. Comme la fonction f est 2π-périodique, paire et continue sur $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $b_n(f)=0$, $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x)|\,dx = \frac{2}{\pi}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x)| \cos(nx)\,dx =$ 0 si $n = 2p+1$, $\frac{4(-1)^p}{\pi(1-4p^2)}$ si $n=2p$; comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2}\cos(2px)$.

2. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{1-16p^4}\cos(2px)$; comme les séries $\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{1-16p^4}\cos(2px)$, $\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p(2p)}{1-16p^4}\sin(2px)$ et $\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p(4p^2)}{1-16p^4}\cos(2px)$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$, la fonction y est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-y''(x) + y(x) =$ $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(4p^2+1)}{1-16p^4}\cos(2px) = |\cos(x)|$, d'après la question 1 ; comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x+\pi) = y(x)$, y est une solution π-périodique de l'équation différentielle considérée.

3. Soit $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, une solution de l'équation différentielle ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $-(z-y)''(x) + (z-y)(x) = 0 \Rightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $z(x) = y(x) + \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$; réciproquement, toutes les fonctions de cette forme sont bien solutions de l'équation différentielle.

Transformation de Fourier

V 1. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\hat{f}$ est bien définie, avec : $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, et $\forall \xi \neq 0$, $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\xi x}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\xi}$.

2.(i) $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{1-x}{2}\right) e^{-i\xi x}\,dx \overset{y=\frac{1-x}{2}}{=} 2e^{-i\xi}\hat{f}(-2\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ si $\xi = 0$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-i\xi}\sin(\xi)}{\xi}$ si $\xi \neq 0$; (ii) $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-i\xi x}\,dx = i\hat{f}(\xi)' =$ $i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}{2\xi} - \frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\xi^2}\right]$ si $\xi \neq 0$, 0 si $\xi = 0$; $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_3(\xi) = -\hat{f}''(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{4\xi} + \frac{\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\xi^2} - \frac{2\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\xi^3}\right]$ si $\xi \neq 0$, $\frac{1}{24}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ si $\xi = 0$.

VI 1. Comme g est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\hat{g}$ est bien définie, avec : $\hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ sachant que $\forall \xi \neq 0$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}$, $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-i\xi x}\,dx = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}\right]''$ $= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{\sin(\xi)}{\xi} + 2\frac{\sin(\xi)}{\xi^3} - 2\frac{\cos(\xi)}{\xi^2}\right]$, d'où par linéarité, $\hat{g}(\xi) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(\xi)}{\xi^3} - \frac{\cos(\xi)}{\xi^2}\right)$.

2. Comme $\hat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $\forall |\xi| \geq 1$, $|\hat{g}(\xi)| \leq 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\xi^2}$, $\hat{g}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par la formule de Fourier inverse, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi = g(x) \Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(\xi)}{\xi^3} - \frac{\cos(\xi)}{\xi^2}\right) e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{\pi}{2}(1-x^2)$ si $|x| \leq 1$, 0 sinon $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $I(x) =$ $\frac{\pi}{2}(x^2-1)$ si $|x| \leq 0$, 0 sinon.

VII 1. Comme f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\xi)x}\,dx\right]$ $= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\xi^2}$.

2. D'après la question 1, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\hat{f}_1(x)$; comme f_1 et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\hat{\hat{f}}_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,f_1(-\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\xi|}$.

3. (i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}+e^{-ixt}}{1+t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\hat{g}(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$; (ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_2(x)$ $= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin(xt)\left[\frac{1}{1+t^2}\right]' dt = \frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}\,x\,e^{-|x|}$; (iii) soit $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\Phi(t,x) = \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$; Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, avec : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $\partial_x\Phi(t,x) = -\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2} \Rightarrow \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $|\Phi(t,x)| + |\partial_x\Phi(t,x)| \leq \frac{1+t}{(1+t^2)^2}$; comme $\int_0^{+\infty}\frac{1+t}{(1+t^2)^2}\,dt$ $< +\infty$, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, I_3 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_3'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt = -I_2(x) = -\frac{\pi}{4}\,x\,e^{-|x|} \Rightarrow \forall x \geq 0$, $I_3(x) = I_3(0) - \frac{\pi}{4}\int_0^x y\,e^{-y}\,dy = I_3(0) - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(x+1)e^{-x}$; comme $I_3(0) = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}$ $= \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\right]dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t\left(\frac{1}{1+t^2}\right)' dt = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \geq 0$, $I_3(x) = \frac{\pi}{4}(x+1)$ e^{-x} ; sachant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_3(-x) = I_3(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_3(x) = \frac{\pi}{4}(|x|+1)\,e^{-|x|}$.

VIII 1. Comme les fonctions g_a et $x \mapsto |x|\,g_a$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\hat{g}_a$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_a'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)(-ix)$ $e^{-i\xi x}\,dx$; sachant que g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et satisfait : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a'(x) =$ $-2ax\,e^{-ax^2}$, $\hat{g}_a'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{2a}\,g_a'(x)\,e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{i}{2a}\right)(i\xi)\,g_a(x)$ $e^{-i\xi x}\,dx = -\frac{\xi}{2a}\,\hat{g}_a(\xi)$.

2. a. Soit $\forall (t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}$, $H(t,x) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$; H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]\times\mathbb{R}$, avec $\forall (t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}$, $\partial_x H(t,x) = -2x\,e^{-(1+t^2)x^2} \Rightarrow h$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -2\int_0^1 x\,e^{-(1+t^2)x^2}\,dt \overset{u=tx}{=} -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$.

b. (i) $h(0) = \int_0^1\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$; (ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq e^{-x^2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}e^{-x^2} \Rightarrow h(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

c. D'après la question 2.a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -\left(\left[\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right]^2\right)' \Rightarrow h(x) = h(0) - \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ $= \frac{\pi}{4} - \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \underset{x\to+\infty}{\Rightarrow} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. D'après la question 2.c, $\hat{g}_a(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx \underset{y=\sqrt{a}\,x}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2a}}$; d'après la question 1, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\left[\hat{g}_a(\xi)\,e^{\frac{\xi^2}{4a}}\right]' = \left(\hat{g}_a'(\xi) + \frac{\xi}{2a}\,\hat{g}_a(\xi)\right)e^{\frac{\xi^2}{4a}} = 0 \Rightarrow \hat{g}_a(\xi)$ $= \hat{g}_a(0)\,e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}$.

IX 1. Comme Φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\Phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\sqrt{2}-i\xi)x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{2}+i\xi)}\,dx\right]$

$= \dfrac{2}{\sqrt{\pi}(\xi^2+2)}$.

2. a. Comme f et Φ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, ppt $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f*\Phi}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\xi)\, \hat{\Phi}(\xi) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\xi^2+2}\, \hat{f}(\xi)$; sachant que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{[e^{-\cdot^2}]}(\xi) = \dfrac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{2}}$, $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{4}(\xi^2+2)\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

b. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$; comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{g''}(\xi) = -\xi^2 \hat{g}(\xi)$, ppt $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[2\hat{g}(\xi) - \widehat{g''}(\xi)\right]$; par injectivité de la transformation de Fourier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(g(x) - \dfrac{1}{2} g''(x)\right) = \sqrt{2}\,(1-x^2)\, e^{-x^2}$.

X (i) Étant donné $\alpha > 0$, soit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$; comme g_α est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{[e^{-\alpha|\cdot|}]}(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{\alpha}{\xi^2+\alpha^2} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \alpha\, g_\alpha(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_\alpha(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, \dfrac{1}{\alpha} \times \widehat{\widehat{[e^{-\alpha|\cdot|}]}}(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, \dfrac{e^{-\alpha|\xi|}}{\alpha}$.

(ii) Comme f, g_a et g_b sont intégrables sur $\mathbb{R}$, ppt $\xi \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2\pi}\, \hat{g}_a(\xi)\, \hat{f}(\xi) = \widehat{g_a * f}(\xi) = \hat{g}_b(\xi) \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{b}{a}\, e^{-(b-a)|\xi|}$; comme $b > a$, $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{b}{a}\, \widehat{e^{-(b-a)|\xi|}}(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{b}{a} \times \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{b-a}{x^2+(b-a)^2} = \dfrac{b(b-a)}{\pi a (x^2+(b-a)^2)}$

réciproquement, f est intégrable sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \dfrac{b}{\sqrt{2\pi}\, a}\, e^{-(b-a)|\xi|} \Rightarrow \widehat{g_a * f}(\xi) = \hat{g}_b(\xi)$; par injectivité de la transformation de Fourier, $g_a * f = g_b \Rightarrow f$ est bien solution de l'équation considérée.

XI 1. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-(x-t)^2} dt = e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-t^2+2xt}\, dt = 0$.

2. Sachant que f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$, ppt $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f*g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi) \Rightarrow \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi) = 0$; sachant que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \dfrac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{2}} \neq 0$, ppt $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = 0$

3. D'après la question 2, par injectivité de la transformation de Fourier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

XII 1. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x^2} dx$, et $\int_0^{+\infty} \dfrac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\, e^{-i\xi t}\, dt$ sont bien définies pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, et : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x^2} dx = \int_0^{+\infty} [f(x) + f(-x)]\, e^{-i\xi x^2} dx \underset{x=\sqrt{t}}{=} \dfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} \dfrac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\, e^{-i\xi t}\, dt$.

2. $\Rightarrow$ Si f est impaire, alors : pp $t \geq 0$, $f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t}) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} \dfrac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\, e^{-i\xi t} dt = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x^2} dx = 0$.

$\Leftarrow$ Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x^2} dx = 0$, alors : $\int_0^{+\infty} \dfrac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\, e^{-i\xi t}\, dt = 0$; par injectivité de la transformation de Fourier, p.p.t. $t \geq 0$, $f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t}) = 0 \Rightarrow$ ppt $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow f$ est impaire.

XIII 1. a. Comme f et g sont intégrables, $f'' = f - g$ est intégrable ; sachant que f et f' sont aussi intégrables, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f''}(\xi) = -\xi^2 \hat{f}(\xi)$; comme $f'' = f - g$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $(1+\xi^2)\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) \Rightarrow$ $\hat{f}(\xi) = \dfrac{\hat{g}(\xi)}{1+\xi^2}$.

b. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|x|}$; h est intégrable, avec : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$; d'après la question 1.a, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \hat{h}(\xi)\hat{g}(\xi)$; comme $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, et $h \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, g * h(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-|x-y|}\, dy$.

2. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-|x-y|}\, dy = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x} g(y) e^{y} dy\right) e^{-x} + \frac{1}{2}\left(\int_{x}^{+\infty} g(y) e^{-y} dy\right) \times e^{x}$; comme $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^{x}}{2}\int_{x}^{+\infty} g(y) e^{-y} dy - \frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x} g(y) e^{y} dy \Rightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -g(x) + \frac{e^{x}}{2}\int_{x}^{+\infty} g(y) e^{-y} dy + \frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x} g(y) e^{y} dy = f(x) - g(x)$; de plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} dy\right) < +\infty \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} dy\right) < +\infty \Rightarrow f' \in L^1(\mathbb{R})$, d'où d'après la question 1.b, l'existence d'une unique solution $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ t.q. $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

XIV 1. Comme g est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^{0}(1+x)\, e^{-ix\xi}\, dx + \int_{0}^{1}(1-x)\, e^{-ix\xi}\, dx\right)$ $= \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\,\xi^2}(1-\cos(\xi)) = \dfrac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}$.

2. Comme $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, par le théorème de Plancherel, $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$, avec : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-1}^{0}(1+x)^2 dx + \int_{0}^{1}(1-x)^2 dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)^4}{\left(\frac{\xi}{2}\right)^4}\, \frac{d\xi}{2} = \frac{2}{3} \overset{x = \frac{\xi}{2}}{\Rightarrow}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin(x)^4}{x^4}\, dx = \dfrac{2\pi}{3}$.

XV. 1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|\, dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)|\psi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$ $\Rightarrow \psi \in L^1(\mathbb{R})$; de même, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi'(x)|\, dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)|\psi'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \Rightarrow \psi' \in L^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\psi'}(\xi) = i\xi\hat{\psi}(\xi)$.

2. a. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x\psi(x)\psi'(x)| \leq \frac{1}{2}\left[x^2|\psi(x)|^2 + |\psi'(x)|^2\right]$, $x \mapsto x\psi(x)\psi'(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; comme $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\psi'(x)\, dx$ sont bien définies, avec : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\psi(x)^2 + 2x\psi(x)\psi'(x)\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x|\psi(x)|^2\right)' dx$; comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |x||\psi(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)|\psi(x)|^2 dx < +\infty$, il existe $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ t.q. $S_n\psi(S_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $R_n\psi(R_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x\psi(x)^2\right)' dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{S_n}^{R_n} \left(x\psi(x)^2\right)' dx = \lim_{n\to+\infty} \left(R_n\psi(R_n)^2\right.$

$- \xi_n \psi(\xi_n)^2] = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 dx = -2\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\psi(x)\,\psi'(x)\,dx$.

b. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et la question 2.a, $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)^2dx \le 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\psi(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\psi'(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

c. D'après la question 1, $\forall \xi\in\mathbb{R}$, $\widehat{\psi'}(\xi) = i\xi\hat{\psi}(\xi)$; comme $\psi'\in L^2(\mathbb{R})$, par le théorème de Plancherel, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi'}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^2|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$, d'où d'après la question 2.b, $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)^2dx \le 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\psi(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\xi)|^2|\xi|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$.

XVI 1.a. Au rang $n=0$, $H_0=1$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ t.q. $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x^2} = (-1)^0 H_0(x) e^{-x^2}$; supposons que $\forall\, 0\le k\le n$, $\exists!\, H_k\in\mathbb{R}[X]$ t.q. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}) = (-1)^k H_k(x)\,e^{-x^2}$; au rang $n+1$, $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[e^{-x^2}] = (-1)^{n+1}[2xH_n(x) - H_n'(x)]\,e^{-x^2} \Rightarrow H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$ convient, et si $P\in\mathbb{R}[X]$ satisfait aussi cette identité, alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)\,e^{-x^2} = H_{n+1}(x)\,e^{-x^2} \Rightarrow P = H_{n+1}$, d'où l'existence et l'unicité de P par récurrence sur $n\geq 0$.

b. Par récurrence sur $n\ge 0$, $\forall n\ge 0$, $H_n = 2^nX^n+\dots \Rightarrow d^\circ(H_n)=n$.

2.a. Comme il existe $c_n\ge 0$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\Phi_n(x)|\le \frac{c_n}{1+x^2}$, $\Phi_n\in L^2(\mathbb{R})$.

b. Soit $\forall n\ge 0$, $\lambda_n = \frac{1}{(2^n\sqrt{\pi}\,n!)^{\frac{1}{2}}}$; $\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2$, $\langle\Phi_m,\Phi_n\rangle_{L^2} = \lambda_n\lambda_m\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)\,e^{-x^2}dx = \lambda_n\lambda_m\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m(e^{-x^2})^{(m)}H_n(x)\,dx$; en intégrant par parties m fois, $\langle\Phi_m,\Phi_n\rangle_{L^2} = \lambda_n\lambda_m\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(m)}(x)\,e^{-x^2}dx$; comme $d^\circ(H_n)=n$ par la question 1.b, si $m>n$, alors : $H_n^{(m)}=0 \Rightarrow \langle\Phi_n,\Phi_m\rangle_{L^2}=0$; si $m=n$, alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $H_n^{(n)}(x) = 2^n n! \Rightarrow \langle\Phi_n,\Phi_n\rangle_{L^2} = 2^n n!\,\lambda_n^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1 \Rightarrow (\Phi_n)_{n\ge 0}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

3. Soit $\forall n\ge 0$, $P_n^\xi(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(-i\xi)^k}{k!}X^k \in\mathbb{C}[X]$; $\forall x\in\mathbb{R}$, $P_n^\xi(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-i\xi x}$, et $|P_n^\xi(x)| \le \sum_{k=0}^n\frac{|\xi x|^k}{k!} \le \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|\xi x|^k}{k!} = e^{|\xi x|}$.

4.a. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\,dx \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \Rightarrow g\in L^1(\mathbb{R})$.

b. D'après la question 1.b, $\forall n\ge 0$, $d^\circ(H_n)=n \Rightarrow (H_n)_{n\ge 0}$ est une base algébrique de $\mathbb{R}[X]$; si $Q_n^\xi(X) = \sum_{k=0}^n \mathrm{Re}((-i\xi)^k)\frac{X^k}{k!}$ et $R_n^\xi(X) = \sum_{k=0}^n \mathrm{Im}((-i\xi)^k)\frac{X^k}{k!}$, alors Q_n^ξ et R_n^ξ appartiennent à $\mathrm{Vect}(H_n)_{n\ge 0}$; comme $\forall m\ge 0$, $\langle\Phi_m,f\rangle_{L^2}=0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)f(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)g(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}[Q_n^\xi(x)+iR_n^\xi(x)]\,g(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^\xi(x)\,g(x)\,dx = 0$; comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $P_n^\xi(x)\,g(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-i\xi x}g(x)$, et $|P_n^\xi(x)\,g(x)| \le e^{|\xi x|}|f(x)|\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|\xi x|}|f(x)|\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}$

$e^{2|\xi x| - x^2} dx)^{\frac{1}{2}} < +\infty$, par le théorème de convergence dominée, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n^{\xi}(x)\, g(x)\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} g(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}(\xi) \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = 0$.

c. Par injectivité de la transformation de Fourier, pp t $x \in \mathbb{R}$, $0 = g(x) = f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f(x) = 0$ $\Rightarrow$ f est identiquement nulle.

d. D'après la question 4.c, $\mathrm{Vect}(\Phi_n)^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Vect}(\Phi_n)_{n \geq 0}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$; comme $(\Phi_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ par la question 2.b, $(\Phi_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.