Analyse Harmonique Appliquée 2025/2026

Master 1 mathématiques

Corrigé du partiel

Exercice 1.

1.a. Comme la fonction caractéristique f du segment $[0, 1]$ définit une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et de $L^2(\mathbb{R})$, le produit de convolution $f * f$ est bien défini, continu et borné sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, et intégrable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de convolution de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.

b. Par définition du produit de convolution,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) f(s)\, ds = \int_{t-1}^{t} f(s)\, ds.$$

Ainsi nous obtenons:

- $\forall t \leq 0, \quad f * f(t) = 0,$
- $\forall 0 \leq t \leq 1, \quad f * f(t) = t,$
- $\forall 1 \leq t \leq 2, \quad f * f(t) = 2 - t,$
- $\forall t \geq 2, \quad f * f(t) = 0.$

2.a. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ par la formule:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} e^{-i\xi t}\, dt,$$

d'où l'expression:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } \xi = 0, \\ \dfrac{-e^{-i\xi} + 1}{\sqrt{2\pi}\, i\xi} & \text{si } \xi \neq 0. \end{cases}$$

b. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier du produit de convolution $f * f$ vaut:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f * f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(\xi)^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } \xi = 0, \\ \dfrac{(1 - e^{-i\xi})^2}{\sqrt{2\pi}\, (i\xi)^2} & \text{si } \xi \neq 0. \end{cases}$$

3.a. Sachant que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $f * f$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, le produit de convolution $f*(f*f)$ est bien défini, continu et borné sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction $f*f$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$, ce produit de convolution est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Par définition du produit de convolution,

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f*(f*f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\, f*f(s)\, ds = \int_0^1 f(t-s)\, s\, ds + \int_1^2 f(t-s)\,(2-s)\, ds.$$

Rappelons alors que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R},\quad f(t-s) = \begin{cases} 1 & \text{si } t-1 \leq s \leq t, \\ \text{et } 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons donc :

- $\forall t \leq 0$, $\int_0^1 f(t-s)\, s\, ds = \int_1^2 f(t-s)\,(2-s)\, ds = 0$.
- $\forall 0 \leq t \leq 1$, $\int_1^2 f(t-s)(2-s)\, ds = 0$, et $\int_0^1 f(t-s)\, s\, ds = \int_0^t s\, ds = \frac{t^2}{2}$.
- $\forall 1 \leq t \leq 2$, $\begin{cases} \int_0^1 f(t-s)\, s\, ds = \int_{t-1}^1 s\, ds = \frac{2t-t^2}{2}, \\ \text{et } \int_1^2 f(t-s)(2-s)\, ds = \int_1^t (2-s)\, ds = \frac{(t-1)(3-t)}{2}. \end{cases}$
- $\forall 2 \leq t \leq 3$, $\int_0^1 f(t-s)\, s\, ds = 0$, et $\int_1^2 f(t-s)(2-s)\, ds = \int_{t-1}^2 (2-s)\, ds = \frac{(3-t)^2}{2}$.
- $\forall t \geq 3$, $\int_0^1 f(t-s)\, s\, ds = \int_1^2 f(t-s)(2-s)\, ds = 0$

En conclusion, nous avons :

- $\forall t \leq 0$, $f*(f*f)(t) = 0$,
- $\forall 0 \leq t \leq 1$, $f*(f*f)(t) = \frac{t^2}{2}$,
- $\forall 1 \leq t \leq 2$, $f*(f*f)(t) = \frac{1}{2}(6t - 2t^2 - 3)$,
- $\forall 2 \leq t \leq 3$, $f*(f*f)(t) = \frac{(3-t)^2}{2}$,
- $\forall t \geq 3$, $f*(f*f)(t) = 0$.

c. Comme les fonctions f et $f*f$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier du produit de convolution $f*(f*f)$ vaut :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\quad \widehat{f*(f*f)}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\xi)\, \widehat{f*f}(\xi) = 2\pi\, \hat{f}(\xi)^3 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } \xi = 0, \\ \text{et } \frac{(1-e^{-i\xi})^3}{\sqrt{2\pi}\,(i\xi)^3} & \text{si } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Exercice 2.

1.a. La fonction de Hann H est bien définie sur $\mathbb{R}$, et continue sur $]-\infty,-T[$, $]-T,T[$ et $]T,+\infty[$. Comme $\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \underset{t\to\pm T}{\longrightarrow} -1$, nous vérifions que :

$$H(t) \underset{t\to T^- \text{ ou } (-T)^+}{\longrightarrow} 0,$$

de sorte que la fonction de Hann H est continue, donc mesurable, sur $\mathbb{R}$. Sachant que cette fonction est à support compact dans $[-T,T]$, elle est par conséquent intégrable et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Nous calculons :

$$I = \frac{1}{4}\int_{-T}^{T}\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)^2\right) dt.$$

Sachant que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos(u)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos(2u)+1\right)$, cette expression devient :

$$I = \frac{1}{4}\int_{-T}^{T}\left[\frac{3}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right] dt$$

$$= \frac{3}{4}T + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi}{T}}\right]_{-T}^{T} + \frac{1}{8}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\frac{2\pi}{T}}\right]_{-T}^{T}.$$

Comme $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(k\pi) = 0$, nous concluons que :

$$I = \frac{3}{4}T.$$

c. Comme la fonction de Hann H est intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier est bien définie par la formule :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{H}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\, e^{-i\xi t}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}\left(1+\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right) e^{-i\xi t}\, dt.$$

Sachant que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos(u) = \frac{1}{2}\left(e^{iu} + e^{-iu}\right)$, nous obtenons :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{H}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}\left[e^{-i\xi t} + \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{T}-\xi\right)t} + \frac{1}{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{T}+\xi\right)t}\right] dt,$$

soit la formule :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{H}(\xi) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\left[\operatorname{sinc}(\xi T) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(\pi - \xi t) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(\pi + \xi t)\right].$$

2.a. La fonction F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{T}, 0, \frac{\pi}{T}\right\}$. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{X(\pi - TX)(\pi + TX)}$ s'écrit :

$$\frac{1}{X(\pi - TX)(\pi+TX)} = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{X} + \frac{T}{2(\pi - TX)} - \frac{T}{2(\pi+TX)}\right],$$

d'où l'expression :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{T}, 0, \frac{\pi}{T}\right\},\ F(\xi) = \frac{T\sin(\xi T)}{\pi^2}\left[\frac{1}{\xi T} + \frac{1}{2(\pi - T\xi)} - \frac{1}{2(\pi+T\xi)}\right].$$

Comme $\sin(\pi - \xi T) = \sin(\xi T) = -\sin(\pi + \xi T)$, nous en déduisons que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{T}, 0, \frac{\pi}{T} \right\}, \ E(\xi) = \frac{T}{\pi^2} \left\{ \operatorname{sinc}(\xi T) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(\pi - \xi T) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(\pi + \xi T) \right\}$$
$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \hat{H}(\xi).$$

Comme la fonction de Hann est dans $L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, nous savons que sa transformée de Fourier $\hat{H}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Par la formule précédente, la fonction E est donc bien de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. La question 2.a assure que l'intégrale J est bien définie et vaut :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi)^2 \, d\xi = \frac{2}{\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(\xi)^2 \, d\xi.$$

Par le théorème de Plancherel, nous obtenons donc :

$$J = \frac{2}{\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)^2 \, dt = \frac{3T}{2\pi^3}.$$

Exercice 3

1.a. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f^2 est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ (f^2)'(t) = 2 f(t) f'(t).$$

En particulier, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t)^2 = f(0)^2 + \int_0^t (f^2)'(x)\, dx = f(0)^2 + 2 \int_0^t f(x) f'(x) \, dx.$$

b. Sachant que les fonctions f et f' sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que la fonction $f f'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En particulier, nous obtenons :

$$\int_0^t f(x) f'(x) \, dx \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \int_0^{\pm\infty} f(x) f'(x) \, dx.$$

La formule de la question 1.a assure alors que la fonction f^2 a une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Soit $\ell_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} f(t)^2$. Si $\ell_+ \neq 0$, alors, $\ell_+ > 0$, et par définition de cette limite, il existe un nombre $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \ f(t)^2 \geq \frac{\ell_+}{2}.$$

En particulier, nous avons :

$$\int_A^{+\infty} f(t)^2\,dt \geq \int_A^{+\infty} \frac{\ell_+^2}{4}\,dt = +\infty,$$

ce qui est absurde ! La limite ℓ_+ est donc nécessairement nulle, et il en va de même pour la limite ℓ_-. Comme $f(t)^2 \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, nous concluons que la fonction f a une limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$.

2.a. Par définition des fonctions $(X_n)_{n\geq 0}$, nous savons que :

$$\text{p.p. t. } t\in\mathbb{R},\quad f'(t)^2\,(1-X_n(t))^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, nous vérifions que :

$$\forall n\geq 0,\ \text{p.p. t. } t\in\mathbb{R},\quad f'(t)^2\,(1-X_n(t))^2 \leq f'(t)^2.$$

Sachant que la fonction f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, le théorème de convergence dominée assure que :

$$\| f' - f'X_n \|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)^2\,(1-X_n(t))^2\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où la convergence :

$$f'X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

b. Rappelons que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous déduisons donc de la convergence de la question 2.a que :

$$\mathcal{F}(f'X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}(f') \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Comme la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$ implique la convergence presque partout à extraction près, il existe donc une extraction $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ telle que :

$$\text{p.p. t. } \xi\in\mathbb{R},\quad \mathcal{F}\left(f'X_{\varphi(n)}\right)(\xi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}(f')(\xi).$$

3.a. Par définition de la fonction X_n, nous avons :

$$\forall n\geq 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,X_n(t)\,e^{-i\xi t}\,dt = \int_{-n}^{n} f'(t)\,e^{-i\xi t}\,dt,$$

d'où par intégration par parties,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,X_n(t)\,e^{-i\xi t}\,dt = f(n)\,e^{-i\xi n} - f(-n)\,e^{i\xi n} + i\xi\int_{-n}^{n} f(t)\,e^{-i\xi t}\,dt,$$

soit en définitive,

$$\forall n\geq 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)X_n(t)e^{-i\xi t}\,dt = f(n)\,e^{-i\xi n} - f(-n)\,e^{i\xi n} + i\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)X_n(t)e^{-i\xi t}\,dt.$$

b. Observons pour commencer que, par continuité des fonctions f et f', les fonctions $f\chi_n$ et $f'\chi_n$ sont intégrables et de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$. Quel que soit le nombre $\xi \in \mathbb{R}$, nous pouvons donc interpréter l'égalité de la question 3.a de la façon suivante :

$$\forall n \geq 0, \quad \mathcal{F}(f'\chi_n)(\xi) = \widehat{f'\chi_n}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\chi_n(t)\, e^{-i\xi t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(n)\, e^{-i\xi n} - f(-n)\, e^{i\xi n} \right] + \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \times \chi_n(t)\, e^{-i\xi t}\, dt,$$

soit, puisque $\mathcal{F}(f\chi_n) = \widehat{f\chi_n}$,

$$\forall n \geq 0, \quad \mathcal{F}(f'\chi_n)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(n)\, e^{-i\xi n} - f(-n)\, e^{i\xi n} \right) + i\xi\, \mathcal{F}(f\chi_n)(\xi).$$

La question 1.c assure alors que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(n)\, e^{-i\xi n} - f(-n)\, e^{i\xi n} \right] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tandis que, par la question 2.b,

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\left(f'\chi_{\varphi(n)}\right)(\xi) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}(f')(\xi).$$

Nous pouvons alors répéter les arguments des questions 2.a et 2.b afin de déterminer une nouvelle extraction $(\varphi \circ \theta(n))_{n \geq 0}$ telle que :

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\left(f\chi_{\varphi(\theta(n))}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Il suffit en effet de remplacer la fonction f' dans ces arguments par la fonction f qui demeure de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour l'extraction $(\varphi \circ \theta(n))_{n \geq 0}$, nous obtenons donc à la limite $n \to +\infty$:

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f')(\xi) = 0 + i\xi\, \mathcal{F}(f)(\xi) = i\xi\, \mathcal{F}(f)(\xi),$$

ce qui est exactement la formule recherchée.