# Corrigé de l'examen

## Exercice 1.

1.a. La fonction $f$ est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, et satisfait par parité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 2\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 2 < +\infty.$$

Cette fonction appartient donc à l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

b. Par définition, nous calculons :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-it\xi}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)t}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\xi)t}\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[ \frac{e^{(1-i\xi)t}}{1-i\xi} \right]_{-\infty}^{0} + \left[ \frac{e^{-(1+i\xi)t}}{-(1+i\xi)} \right]_0^{+\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \right],$$

d'où l'expression :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}.$$

2.a. La fonction $g$ est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, et satisfait par parité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \pi < +\infty.$$

Cette fonction appartient donc à l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

b. D'après la question 1.a, nous avons :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\hat{f}(t).$$

Comme les fonctions $f$ et $\hat{f}$ sont toutes deux intégrables sur $\mathbb{R}$, la formule de Fourier inverse assure que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\hat{\hat{f}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,f(-\xi),$$

d'où l'expression :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\xi|}.$$

3.a. D'après la question 1.a, la fonction $f$ est dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$, et elle est de plus continue sur $\mathbb{R}$. Comme elle possède des limites nulles en $\pm\infty$, elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}$.

Sachant que le produit de convolution d'une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, le produit de convolution $f*f$ est bien défini, continu et borné sur $\mathbb{R}$.

De plus, le produit de convolution de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, le produit de convolution $f*f$ est aussi dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

b. Par définition, nous calculons :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f*f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|}\, e^{-|s|}\, ds.$$

Pour $t \geq 0$, cette expression s'écrit :

$$f*f(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(t-s)} e^{s}\, ds + \int_0^t e^{-(t-s)} e^{-s}\, ds + \int_t^{+\infty} e^{-(s-t)} e^{-s}\, ds$$
$$= \left[\frac{e^{2s-t}}{2}\right]_{-\infty}^{0} + t e^{-t} + \left[\frac{e^{t-2s}}{-2}\right]_t^{+\infty}$$
$$= (1+t)\, e^{-t}.$$

Nous remarquons alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f*f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|-t-s|}\, e^{-|s|}\, ds \overset{u=-s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|-t+u|}\, e^{-|u|}\, du = f*f(t),$$

de sorte que, par parité,

$$\forall t \leq 0,\ f*f(t) = f*f(-t) = (1-t)\, e^{t} = (1+|t|)\, e^{-|t|}.$$

En conclusion, nous avons établi que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f*f(t) = (1+|t|)\, e^{-|t|}.$$

c. Comme les fonctions $f$ et $f*f$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, nous savons que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f*f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\xi)^2,$$

d'où l'expression :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f*f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2}{(1+\xi^2)^2}.$$

d. La fonction $h$ est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, et satisfait par parité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \leq 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi < +\infty.$$

Cette fonction appartient donc à l'espace $L^1(\mathbb{R})$. D'après la question 3.c, nous avons alors:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \widehat{f * f}(t).$$

Comme les fonctions $f * f$ et $\widehat{f * f}$ sont toutes deux intégrables sur $\mathbb{R}$, la formule de Fourier inverse garantit que:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \widehat{\widehat{f * f}}(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f * f(-\xi),$$

d'où l'expression:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, (1 + |\xi|)\, e^{-|\xi|}.$$

## Exercice 2.

1.a. Considérons la fonction $X$ donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$$

Comme la fonction $x$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $X$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Etant donné un nombre $t \in \mathbb{R}$ et une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ convergente de limite $t$, nous savons de plus que:

$$\mathbb{1}_{(t_n, t]}(s)\, x(s) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ p.p.}$$

Sachant que

$$\forall n \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}, \quad \left| \mathbb{1}_{(t_n, t]}(s)\, x(s) \right| \leq |x(s)|,$$

et que la fonction $x$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, nous déduisons de la relation de Chasles et du théorème de convergence dominée que:

$$X(t) - X(t_n) = \int_{t_n}^t x(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{(t_n, t]}(s)\, x(s)\, ds \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui assure la continuité de la fonction $X$ sur $\mathbb{R}$.

Par la relation de Chasles, nous observons alors que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Ax(t) = X(t+T) - X(t) - \left[ X(t) - X(t-T) \right],$$

et les opérations élémentaires sur les fonctions continues assurent alors que la fonction $Ax$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Comme la fonction $Ax$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est mesurable sur $\mathbb{R}$, et nous pouvons calculer:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A x(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_t^{t+T} x(s)\, ds - \int_{t-T}^{t} x(s)\, ds \right| dt$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_t^{t+T} |x(s)|\, ds + \int_{t-T}^{t} |x(s)|\, ds \right) dt$$

Par la relation de Chasles, et le théorème de Tonelli, nous concluons que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A x(t)|\, dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| \left( \int_{s-T}^{s+T} dt \right) ds = 2T \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)|\, ds.$$

La fonction $Ax$ appartient donc à l'espace $L^1(\mathbb{R})$, et elle satisfait :

$$\| A x \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2T \| x \|_{L^1(\mathbb{R})}$$

c. D'après les questions 1.a et 1.b, nous savons déjà que l'application $A$ est bien définie de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Etant donnés un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, et deux fonctions $x$ et $y$ de $L^1(\mathbb{R})$, elle satisfait de plus par linéarité de l'intégrale :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(\lambda x + y)(t) = \lambda \int_t^{t+T} x(s)\, ds + \int_t^{t+T} y(s)\, ds - \lambda \int_{t-T}^{t} x(s)\, ds - \int_{t-T}^{t} y(s)\, ds$$
$$= \lambda A(x)(t) + A(y)(t),$$

de sorte qu'il s'agit d'une application linéaire. Comme

$$\forall x \in L^1(\mathbb{R}),\ \| A x \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2T \| x \|_{L^1(\mathbb{R})},$$

cette application est de plus continue sur $L^1(\mathbb{R})$. Enfin, quel que soit le nombre $a \in \mathbb{R}$, et la fonction $x \in L^1(\mathbb{R})$, nous calculons :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A \tau_a x(t) = \int_t^{t+T} x(s-a)\, ds - \int_{t-T}^{t} x(s-a)\, ds$$
$$\underset{u = s-a}{=} \int_{t-a}^{t-a+T} x(u)\, du - \int_{t-a-T}^{t-a} x(u)\, du$$
$$= A x(t-a),$$

et l'application $A$ est également invariante par translation. Il s'agit donc d'un filtre analogique de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

2.a. Considérons la fonction $h_A$ donnée par :

$$\text{pp } t \in \mathbb{R},\ h_A(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } -T \leq t \leq 0, \\ -1 \text{ si } 0 \leq t \leq T, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La fonction $h_A$ appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $x$ est également dans $L^1(\mathbb{R})$, le produit de convolution $h_A * x$ est donc bien défini presque partout et appartient aussi à $L^1(\mathbb{R})$. De plus, ce produit vaut :

$$\text{p.p.t } t \in \mathbb{R},\ h_A * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \mathbb{1}_{[-T,0]}(t-s) - \mathbb{1}_{[0,T]}(t-s) \right] x(s)\, ds$$
$$= \int_t^{t+T} x(s)\, ds - \int_{t-T}^{t} x(s)\, ds$$
$$= Ax(t)$$

Le filtre analogique $A$ est donc convolutif et sa réponse impulsionnelle est égale à la fonction $h_A$.

b. Comme

$\text{ppt } t \in [-T, 0],\ h_A(t) = 1 \neq 0,$

le filtre analogique $A$ n'est pas causal.

c. Nous vérifions que:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_A(t)|\, dt = \int_{-T}^{T} dt = 2T < +\infty,$

ce qui assure que la réponse impulsionnelle $h_A$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, et que le filtre analogique $A$ est stable.

3. Nous savons que:

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ H_A(\xi) = \sqrt{2\pi}\ \hat{h}_A(\xi)$$
$$= \int_{-T}^{0} e^{-i\xi t}\, dt - \int_0^T e^{-i\xi t}\, dt.$$

Pour $\xi = 0$, nous obtenons:

$H_A(0) = T - T = 0,$

tandis que, pour $\xi \neq 0$, il vient:

$$H_A(\xi) = \left[ \frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi} \right]_{-T}^{0} - \left[ \frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi} \right]_0^T = \frac{1}{i\xi} \left[ -1 + e^{i\xi T} + e^{-i\xi T} - 1 \right],$$

D'où l'expression:

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ H_A(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{i\xi} \left[ \cos(\xi T) - 1 \right] & \text{si } \xi \neq 0, \\ \text{et } 0 \text{ si } \xi = 0. \end{cases}$$

## Exercice 3.

1. Par définition de la fonction de transfert d'un filtre différentiel, nous savons que la fonction de transfert $H_{\Phi}$ est égale à:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad H_{\Phi}(\xi) = \frac{1}{(i\xi)^2 + 2i\xi + 2},$$
et qu'elle est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

2.a. La fonction $f_a$ est continue par morceaux, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_a(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1 < +\infty.$$

Elle définit donc une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. De plus, sa transformée de Fourier vaut :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(1+ai)t} e^{-i\xi t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-(1+ai+i\xi)t}}{-(1+ai+i\xi)} \right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+ai+i\xi)}.$$

b. Introduisons la fraction rationnelle :

$$Q(X) = \frac{1}{X^2 + 2X + 2},$$

qui satisfait :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad H_{\Phi}(\xi) = Q(i\xi),$$

et observons que le polynôme $P(X) = X^2 + 2X + 2$ a pour racines les nombres $-1+i$ et $-1-i$, de sorte qu'il se factorise sous la forme :

$$P(X) = (X + 1 - i)(X + 1 + i),$$

et que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $Q$ s'écrit :

$$Q(X) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{X+1-i} - \frac{1}{X+1+i} \right].$$

La fonction de transfert $H_{\Phi}$ s'écrit alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad H_{\Phi}(\xi) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{1+i\xi-i} - \frac{1}{1+i\xi+i} \right],$$

soit d'après la question 2.a,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad H_{\Phi}(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \left[ \widehat{f}_{-1}(\xi) - \widehat{f}_1(\xi) \right]$$

En conclusion, la réponse impulsionnelle $h_{\Phi}$ du filtre différentiel $\Phi$ est par injectivité de la transformation de Fourier égale à :

$$\text{pp } t \in \mathbb{R}, \quad h_{\Phi}(t) = \frac{1}{2i} \left[ f_{-1}(t) - f_1(t) \right],$$

c'est-à-dire :

pp. $t \in \mathbb{R}$, $h_{\Phi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-t}\sin(t) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

3.a. La fonction $h_{\Phi}$ est continue par morceaux, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_{\Phi}(t)|\, dt \leq \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1 < +\infty.$$

Elle appartient donc à l'espace $L^1(\mathbb{R})$, ce qui garantit la stabilité du filtre différentiel $\Phi$.

b. La réponse impulsionnelle $h_{\Phi}$ satisfait

pp $t$ $t \leq 0$, $h_{\Phi}(t) = 0$,

ce qui assure la causalité du filtre différentiel $\Phi$.