TP N°4. Résolution approchée des équations différentielles ordinaires

Exercice 1.

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\, y'(t) = 10\big(y(t) - t^2\big) + 2t, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

et rappelons que l'unique solution de ce problème est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_0(t) = t^2.$$

1. Définir la fonction `Carree` qui prend en entrée un nombre `t` et renvoie la valeur $y_0(\mathtt{t}) = \mathtt{t}^2$, puis tracer son graphe sur le segment $[0, 1]$.

2. Étant donné un entier $\mathtt{N} \geq 1$, nous notons dans toute la suite $\mathtt{h} = 1/\mathtt{N}$.

a. Définir une fonction `EulerExp` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(\mathtt{y}_n)_{0 \leq n \leq \mathtt{N}}$ de la solution aux temps $(\mathtt{t}_n = n\,\mathtt{h})_{0 \leq n \leq \mathtt{N}}$, qui sont données par la méthode d'Euler explicite

$$\mathtt{y}_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall 0 \leq n \leq \mathtt{N} - 1,\, \mathtt{y}_{n+1} = (1 + 10h)\mathtt{y}_n + 2n\mathtt{h}^2(1 - 5n\mathtt{h}).$$

b. Tracer sur la même figure que celle de la question 1., la solution approchée $(\mathtt{y}_n)_{0 \leq n \leq 100}$ obtenue par la fonction `EulerExp`$(1\,000)$.

c. Définir une fonction `ErrMaxExp` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$\mathtt{E_e}(\mathtt{N}) = \max_{0 \leq n \leq \mathtt{N}} |\mathtt{y}_0(\mathtt{t}_n) - \mathtt{y}_n|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode d'Euler explicite, puis tracer la courbe représentative de la fonction inverse $\mathtt{N} \mapsto 1/\mathtt{E_e}(\mathtt{N})$ pour $20 \leq \mathtt{N} \leq 1\,000$.

3.a. Définir une fonction `EulerImp` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{N} \geq 11$, et renvoie la liste des valeurs approchées de la solution $(\mathtt{z}_n)_{0 \leq n \leq \mathtt{N}}$ aux temps $(\mathtt{t}_n)_{0 \leq n \leq \mathtt{N}}$, qui sont données par la méthode d'Euler implicite

$$\mathtt{z}_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall 0 \leq n \leq \mathtt{N} - 1,\, \mathtt{z}_{n+1} = \mathtt{z}_n + 10\mathtt{h}\mathtt{z}_{n+1} + 2(n+1)\mathtt{h}^2(1 - 5(n+1)\mathtt{h}).$$

b. Tracer sur la même figure que celle de la question 1. la solution approchée obtenue par la fonction `EulerImp`$(1\,000)$.

c. Définir une fonction `ErrMaxImp` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$\mathtt{E_i}(\mathtt{N}) = \max_{0 \leq n \leq \mathtt{N}} |\mathtt{y}_0(\mathtt{t}_n) - \mathtt{z}_n|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode d'Euler implicite, puis tracer la courbe représentative de la fonction inverse $\mathtt{N} \mapsto 1/\mathtt{E_i}(\mathtt{N})$ pour $20 \leq \mathtt{N} \leq 1\,000$ sur la même figure que celle de la question 2.c.

Exercice 2. *Chute d'un corps.*

Considérons la chute verticale d'un corps de masse $m > 0$, d'altitude initiale $h_0 > 0$ et de vitesse initiale $v_0 < 0$ sous l'effet d'un champ gravitationnel $g > 0$. Notons $h(t)$ son altitude au temps t, et $v(t) = h'(t)$ sa vitesse au temps t. En présence d'une force de frottement de la forme $F(t) = -av(t)$, dans laquelle le coefficient de frottement $a > 0$ est constant, le second principe de la dynamique conduit au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T_a],\, mv'(t) = -mg - av(t), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{C}$$

où $T_a > 0$ désigne le temps au bout duquel la chute du corps se termine à l'altitude $h = 0$. Rappelons que la solution de ce problème est donnée par l'expression

$$\forall t \in [0, T_a],\, v_a(t) = v_0\, e^{-\frac{at}{m}} - \frac{mg}{a}\Big(1 - e^{-\frac{at}{m}}\Big),$$

et que le temps maximal T_a est caractérisé par l'équation

$$T_a = \frac{ah_0}{mg} + \Big(\frac{v_0}{g} + \frac{m}{a}\Big)\Big(1 - e^{-\frac{aT_a}{m}}\Big).$$

Nous fixons dans la suite les valeurs numériques

$$m = 75, \quad h_0 = 1\,000, \quad v_0 = -0,1 \quad \text{et} \quad g = 9,81,$$

et nous notons

$$\forall v \in \mathbb{R},\, F(v) = -g - \frac{a}{m}v.$$

1.a. Définir une fonction `TMax` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{a} > 0$, et renvoie une valeur approchée de l'ordre de 10^{-15} près du temps maximal $T_{\mathtt{a}}$.

b. Tracer le graphe de la fonction `TMax` sur le segment $[0,01\,, 20]$

c. Étant donné un entier $\mathtt{N} \geq 1$ et un nombre $\mathtt{a} > 0$, nous notons dans toute la suite $\mathtt{h_a} = T_{\mathtt{a}}/\mathtt{N}$. Définir une fonction `Vitesse` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{a} > 0$ et un entier $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs de la fonction $v_{\mathtt{a}}$ aux temps $(\mathtt{t}_n = n\,\mathtt{h_a})_{0 \leq n \leq \mathtt{N}}$.

d. Pour $\mathtt{N} = \mathtt{100}$, tracer dans des figures différentes le graphe de la fonction $v_{\mathtt{a}}$ sur le segment $[0, T_{\mathtt{a}}]$ pour $\mathtt{a} = 1$ et $\mathtt{a} = 20$.

2.a. Définir une fonction `PntMil` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{a} > 0$ et un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(\mathtt{v}_n^1)_{0 \leq n \leq \mathtt{N}}$ de la solution $v_{\mathtt{a}}$ aux temps $(\mathtt{t}_n)_{0 \leq n \leq \mathtt{N}}$, qui sont données par la méthode du point milieu

$$\mathtt{v}_0^1 = v_0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq \mathtt{N} - 1,\, \mathtt{v}_{n+1}^1 = \mathtt{v}_n^1 + \mathtt{h_a} F\Big(\mathtt{v}_n^1 + \frac{\mathtt{h_a}}{2} F(\mathtt{v}_n^1)\Big).$$

b. Tracer sur les mêmes figures que celles de la question 1.b, les solutions approchées $(\mathtt{v}_n^1)_{0 \leq n \leq 100}$ obtenues par la fonction $\mathtt{PntMil}(\mathtt{a}, 100)$ pour $\mathtt{a} = 1$ et $\mathtt{a} = 20$.

c. Définir une fonction `ErrMaxPM` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{a} > 0$ et un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$\mathtt{E_{pm}}(\mathtt{a}, \mathtt{N}) = \max_{0 \leq n \leq \mathtt{N}} |v_{\mathtt{a}}(\mathtt{t}_n) - \mathtt{v}_n^1|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode du point milieu, puis tracer la courbe représentative de la fonction $\ln(\mathtt{N}) \mapsto \ln(\mathtt{E_{pm}}(1, \mathtt{N}))$ pour $1 \leq \mathtt{N} \leq 100$.

3.a. Définir une fonction `CraNic` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{a} > 0$ et un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(\mathtt{v}_n^2)_{0\leq n\leq \mathtt{N}}$ de la solution $v_{\mathtt{a}}$ aux temps $(\mathtt{t}_n)_{0\leq n\leq \mathtt{N}}$, qui sont données par la méthode de Crank-Nicholson

$$\mathtt{v}_0^2 = v_0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq \mathtt{N}-1,\, \mathtt{v}_{n+1}^2 = \mathtt{v}_n^2 + \frac{\mathtt{h}_{\mathtt{a}}}{2}\Big(F\big(\mathtt{v}_n^2\big) + F(\mathtt{v}_{n+1}^2)\Big).$$

b. Tracer sur les mêmes figures que celles de la question 1.b, les solutions approchées $(\mathtt{v}_n^2)_{0\leq n\leq 100}$ obtenues par la fonction $\mathtt{CraNic}(\mathtt{a}, 100)$ pour $\mathtt{a} = 1$ et $\mathtt{a} = 20$.

c. Définir une fonction `ErrMaxCN` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{a} > 0$ et un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$\mathtt{E}_{\mathtt{cn}}(\mathtt{a}, \mathtt{N}) = \max_{0\leq n\leq \mathtt{N}} |v_{\mathtt{a}}(\mathtt{t}_n) - \mathtt{v}_n^2|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode de Crank-Nicholson, puis tracer la courbe représentative de la fonction $\ln(\mathtt{N}) \mapsto \ln(\mathtt{E}_{\mathtt{cn}}(1, \mathtt{N}))$ pour $1 \leq \mathtt{N} \leq 100$ sur la même figure que celle de la question 2.c.

4.a. Définir une fonction `RK4` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{a} > 0$ et un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(\mathtt{v}_n^3)_{0\leq n\leq \mathtt{N}}$ de la solution $v_{\mathtt{a}}$ aux temps $(\mathtt{t}_n)_{0\leq n\leq \mathtt{N}}$, qui sont données par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$\mathtt{v}_0^3 = v_0,$$

et

$$\forall 0 \leq n \leq \mathtt{N}-1,\, \mathtt{v}_{n+1}^3 = \mathtt{v}_n^3 + \frac{\mathtt{h}_{\mathtt{a}}}{6}\Bigg(F\big(\mathtt{v}_n^3\big) + 2F\Big(\mathtt{v}_n^3 + \frac{\mathtt{h}_{\mathtt{a}}}{2}F(\mathtt{v}_n^3)\Big)$$
$$+ 2F\bigg(\mathtt{v}_n^3 + \frac{\mathtt{h}_{\mathtt{a}}}{2}F\Big(\mathtt{v}_n^3 + \frac{\mathtt{h}_{\mathtt{a}}}{2}F(\mathtt{v}_n^3)\Big)\bigg) + F\bigg(\mathtt{v}_n^3 + \mathtt{h}_{\mathtt{a}}F\Big(\mathtt{v}_n^3 + \frac{\mathtt{h}_{\mathtt{a}}}{2}F\Big(\mathtt{v}_n^3 + \frac{\mathtt{h}_{\mathtt{a}}}{2}F(\mathtt{v}_n^3)\Big)\Big)\bigg)\Bigg).$$

b. Tracer sur les mêmes figures que celles de la question 1.b, les solutions approchées $(\mathtt{v}_n^3)_{0\leq n\leq 100}$ obtenues par la fonction $\mathtt{RK4}(\mathtt{a}, 100)$ pour $\mathtt{a} = 1$ et $\mathtt{a} = 20$.

c. Définir une fonction `ErrMaxRK` qui prend en entrée un nombre $\mathtt{a} > 0$ et un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$\mathtt{E}_{\mathtt{rk}}(\mathtt{a}, \mathtt{N}) = \max_{0\leq n\leq \mathtt{N}} |v_{\mathtt{a}}(\mathtt{t}_n) - \mathtt{v}_n^3|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, puis tracer la courbe représentative de la fonction $\ln(\mathtt{N}) \mapsto \ln(\mathtt{E}_{\mathtt{rk}}(1, \mathtt{N}))$ pour $1 \leq \mathtt{N} \leq 100$ sur la même figure que celle de la question 2.c.