TP N°4. Résolution approchée des équations différentielles ordinaires

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = 10\big(y(t) - t^2\big) + 2t, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

et rappelons que l'unique solution de ce problème est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_0(t) = t^2.$$

1. Définir la fonction *Carree* qui prend en entrée un nombre t et renvoie la valeur $y_0(t) = t^2$, puis tracer son graphe sur le segment $[0, 1]$.

2. Étant donné un entier $N \geq 1$, nous notons dans toute la suite $h = 1/N$.

a. Définir une fonction *EulerExp* qui prend en entrée un nombre $N \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ de la solution aux temps $(t_n = n\,h)_{0 \leq n \leq N}$, qui sont données par la méthode d'Euler explicite :

$$y_0 = 0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,\ y_{n+1} = (1 + 10h)y_n + 2nh^2(1 - 5nh).$$

b. Tracer sur la même figure que celle de la question 1., la solution approchée $(y_n)_{0 \leq n \leq 100}$ obtenue par la fonction *EulerExp*$(1\,000)$.

c. Définir une fonction *ErrMaxExp* qui prend en entrée un nombre $N \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$E_e(N) = \max_{0 \leq n \leq N} |y_0(t_n) - y_n|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode d'Euler explicite, puis tracer la courbe représentative de la fonction inverse $N \mapsto 1/E_e(N)$ pour $20 \leq N \leq 1\,000$.

3.a. Définir une fonction *EulerImp* qui prend en entrée un nombre $N \geq 11$, et renvoie la liste des valeurs approchées de la solution $(z_n)_{0 \leq n \leq N}$ aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, qui sont données par la méthode d'Euler implicite :

$$z_0 = 0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,\ z_{n+1} = z_n + 10hz_{n+1} + 2(n+1)h^2(1 - 5(n+1)h).$$

b. Tracer sur la même figure que celle de la question 1. la solution approchée obtenue par la fonction *EulerImp*$(1\,000)$.

c. Définir une fonction *ErrMaxImp* qui prend en entrée un nombre $N \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$E_i(N) = \max_{0 \leq n \leq N} |y_0(t_n) - z_n|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode d'Euler implicite, puis tracer la courbe représentative de la fonction inverse $N \mapsto 1/E_i(N)$ pour $20 \leq N \leq 1\,000$ sur la même figure que celle de la question 2.c.