TP N°3. Calcul approché d'intégrales

Exercice 1. *Méthodes de quadrature classiques.*

Étant donné un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point), la subdivision $(x_m)_{0\leq m\leq M}$ de ce segment est définie par

$$\forall 0 \leq m \leq M,\, x_m = a + \frac{m}{M}(b-a).$$

1.a. Définir une fonction `PntMilElem` qui prend en entrée une fonction $\mathtt{f} \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature élémentaire des points milieux pour la fonction `f`

$$\mathtt{PntMilElem}(\mathtt{f}) = 2\mathtt{f}(0).$$

b. Quel est l'ordre de cette méthode ?

c. Définir une fonction `PntMilComp` qui prend en entrée deux nombres $\mathtt{a} \in \mathbb{R}$ et $\mathtt{b} > \mathtt{a}$, une fonction $\mathtt{g} \in \mathcal{C}^0([\mathtt{a},\mathtt{b}],\mathbb{R})$ et le nombre `M` d'intervalles de la subdivision $(x_m)_{0\leq m\leq \mathtt{M}}$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature composée des points milieux pour la fonction `g`

$$\mathtt{PntMilComp}(\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{g},\mathtt{M}) = \frac{\mathtt{b}-\mathtt{a}}{\mathtt{M}}\sum_{m=0}^{\mathtt{M}-1}\mathtt{g}\Big(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}\Big).$$

d. Soit

$$\forall x \in [0,1],\, g(x) = \frac{4}{1+x^2}.$$

Déterminer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_0^1 g(x)\,dx,$$

par la méthode du point milieu.

2.a. Définir une fonction `TrapElem` qui prend en entrée une fonction $\mathtt{f} \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature élémentaire des trapèzes pour la fonction `f`

$$\mathtt{TrapElem}(\mathtt{f}) = \mathtt{f}(-1) + \mathtt{f}(1).$$

b. Quel est l'ordre de cette méthode ?

c. Définir une fonction `TrapComp` qui prend en entrée deux nombres $\mathtt{a} \in \mathbb{R}$ et $\mathtt{b} > \mathtt{a}$, une fonction $\mathtt{g} \in \mathcal{C}^0([\mathtt{a},\mathtt{b}],\mathbb{R})$ et le nombre `M` d'intervalles de la subdivision $(x_m)_{0\leq m\leq \mathtt{M}}$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature composée des trapèzes pour la fonction `g`

$$\mathtt{TrapComp}(\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{g},\mathtt{M}) = \frac{\mathtt{b}-\mathtt{a}}{2\mathtt{M}}\sum_{m=0}^{\mathtt{M}-1}\Big(\mathtt{g}(x_m) + \mathtt{g}(x_{m+1})\Big).$$

d. Déterminer une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.

3.a. Définir une fonction `SimpElem` qui prend en entrée une fonction $\mathtt{f} \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature élémentaire de Simpson pour la fonction `f`

$$\mathtt{SimpElem(f)} = \frac{1}{3}\Big(\mathtt{f}(-1) + 4\mathtt{f}(0) + \mathtt{f}(1)\Big).$$

b. Quel est l'ordre de cette méthode ?

c. Définir une fonction `SimpComp` qui prend en entrée deux nombres $\mathtt{a} \in \mathbb{R}$ et $\mathtt{b} > \mathtt{a}$, une fonction $\mathtt{g} \in \mathcal{C}^0([\mathtt{a},\mathtt{b}],\mathbb{R})$ et le nombre `M` d'intervalles de la subdivision $(x_m)_{0\le m\le \mathtt{M}}$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature composée de Simpson pour la fonction `g`

$$\mathtt{SimpComp}(\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{g},\mathtt{M}) = \frac{\mathtt{b}-\mathtt{a}}{6\mathtt{M}} \sum_{m=0}^{\mathtt{M}-1} \Big(\mathtt{g}(x_m) + 4 * \mathtt{g}\Big(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}\Big) + \mathtt{g}(x_{m+1})\Big).$$

d. Déterminer une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode de Simpson.

4. Comparer à l'aide du calcul de l'intégrale I la précision des méthodes du point milieu, des trapèzes et de Simpson, le nombre d'appels de la fonction g étant fixé.

Exercice 2. *Méthode de Gauss-Tchebychev.*

Considérons la famille des polynômes orthogonaux de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \ge 1,\, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

Pour $n \ge 1$, le polynôme T_n possède n racines distinctes $(t_i^n)_{0\le i\le n-1}$ égales à

$$\forall 0 \le i \le n-1,\, t_i^n = \cos\Big(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\Big).$$

Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, les méthodes de quadrature élémentaire de Gauss-Tchebychev approchent l'intégrale

$$\mathfrak{I}(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^{\pi} f(\cos(\theta))\, d\theta,$$

par la formule

$$\sigma_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^n f(t_i^n),$$

où les nombres $(\lambda_i^n)_{0\le i\le n-1}$ sont donnés par

$$\forall 0 \le i \le n-1,\, \lambda_i^n = \int_0^{\pi} \prod_{0\le j\ne i\le n-1} \Big(\frac{\cos(\theta) - t_j^n}{t_i^n - t_j^n}\Big)\, d\theta.$$

1.a. À l'aide de la fonction `Simpson`, définir une fonction `Coefficients` qui prend en entrée un entier $\mathtt{n} \ge 1$, et renvoie la liste des coefficients $(\lambda_i^{\mathtt{n}})_{0\le i\le \mathtt{n}-1}$.

b. Définir une fonction `GaussTcheElem` qui prend en entrée une fonction $\mathtt{f} \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et un entier $\mathtt{n} \ge 1$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature élémentaire de Gauss-Tchebychev $\sigma_{\mathtt{n}}(\mathtt{f})$ pour la fonction `f`.

c. Sachant que

$$\forall p \in \mathbb{N},\, \int_{-1}^{1} \frac{x^{2p}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)^{2p}\, d\theta = \frac{\pi}{4^p}\binom{2p}{p},$$

vérifier pour $\mathtt{n} = 5$ et $\mathtt{n} = 10$ que l'ordre de la méthode de Gauss-Tchebychev $\sigma_{\mathtt{n}}$ est égal à $2\mathtt{n} - 1$.

2.a. Soit $[a, b]$ un segment (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Vérifier que

$$\mathcal{I}(g) = \int_a^b g(x)\,dx = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

où

$$\forall t \in [-1, 1],\ f(t) = \frac{b-a}{2} g\Big(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\Big)\sqrt{1-t^2}.$$

b. À l'aide de la méthode de Gauss-Tchebychev, définir une fonction `GaussTchebychev` qui prend en entrée deux nombres $\mathtt{a} \in \mathbb{R}$ et $\mathtt{b} > \mathtt{a}$, une fonction $\mathtt{g} \in \mathcal{C}^0([\mathtt{a}, \mathtt{b}], \mathbb{R})$ et un entier $\mathtt{n} \geq 1$, et renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{I}(\mathtt{g})$.

c. Comparer à l'aide du calcul de l'intégrale I la précision de la méthode de Gauss-Tchebychev à celle des méthodes du point milieu, des trapèzes et de Simpson, le nombre d'appels de la fonction g étant fixé.