TP N°3. Calcul approché d'intégrales

Nous cherchons à comparer les méthodes de quadrature du point milieu, du trapèze et de Simpson.

1. Étant donné un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point), la subdivision $(x_m)_{0\leq m\leq M}$ de ce segment est définie par

$$\forall 0 \leq m \leq M,\, x_m = a + \frac{m}{M}(b-a).$$

a. Définir une fonction *PntMilElem* qui prend en entrée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature élémentaire des points milieux pour la fonction f :

$$PntMilElem(f) = 2f(0).$$

b. Quel est l'ordre de cette méthode ?

c. Définir une fonction *PntMilComp* qui prend en entrée deux nombres $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, une fonction $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et le nombre M d'intervalles de la subdivision $(x_m)_{0\leq m\leq M}$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature composée des points milieux pour la fonction g :

$$PntMilComp(a,b,g,M) = \frac{b-a}{M}\sum_{m=0}^{M-1} g\Big(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}\Big).$$

d. Soit

$$\forall x \in [0,1],\, g(x) = \frac{4}{1+x^2}.$$

Déterminer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_0^1 g(x)\,dx,$$

par la méthode du point milieu.

2.a. Définir une fonction *TrapElem* qui prend en entrée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature élémentaire des trapèzes pour la fonction f :

$$TrapElem(f) = f(-1) + f(1).$$

b. Quel est l'ordre de cette méthode ?

c. Définir une fonction *TrapComp* qui prend en entrée deux nombres $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, une fonction $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et le nombre M d'intervalles de la subdivision $(x_m)_{0\leq m\leq M}$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature composée des trapèzes pour la fonction g :

$$TrapComp(a,b,g,M) = \frac{b-a}{2M}\sum_{m=0}^{M-1}\Big(g(x_m) + g(x_{m+1})\Big).$$

d. Déterminer une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.

3.a. Définir une fonction *SimpElem* qui prend en entrée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature élémentaire de Simpson pour la fonction f :

$$SimpElem(f) = \frac{1}{3}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big).$$

b. Quel est l'ordre de cette méthode ?

c. Définir une fonction *SimpComp* qui prend en entrée deux nombres $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, une fonction $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et le nombre M d'intervalles de la subdivision $(x_m)_{0\leq m\leq M}$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature composée de Simpson pour la fonction g :

$$SimpComp(a,b,g,M) = \frac{b-a}{6M}\sum_{m=0}^{M-1}\Big(g(x_m) + 4*g\Big(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}\Big) + g(x_{m+1})\Big).$$

d. Déterminer une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode de Simpson.

4. Comparer à l'aide du calcul de l'intégrale I la précision des méthodes du point milieu, des trapèzes et de Simpson, le nombre d'appels de la fonction g étant fixé.