CY Cergy Paris Université — **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques — **2023-2024**

TP N°2. Approximation polynomiale

Exercice 1. *Phénomène de Runge.*

1.a. Définir une fonction `Base` qui prend en entrée un entier $0 \leq \mathtt{j} \leq N$, une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel `x`, et renvoie la valeur au point `x` du polynôme

$$\ell_j(X) = \prod_{1 \leq k \neq j \leq N} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

b. Définir une fonction `Lagrange1` qui prend en entrée une fonction de la variable réelle `f`, une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel `x`, et renvoie la valeur au point `x` du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_{\mathtt{f}}(X)$ aux points x_0, …, et x_N,

$$P_{\mathtt{f}}(X) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, \ell_j(X).$$

2.a. Définir une fonction `Repartie` qui prend en entrée un entier $\mathtt{N} \geq 0$, et renvoie la liste des $\mathtt{N} + 1$ points équirépartis dans le segment $[-1, 1]$.

b. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1 + 5x^2}.$$

À l'aide de la fonction Lagrange1, tracer sur le segment $[-1, 1]$ les courbes représentatives de la fonction f et de son polynôme d'interpolation de Lagrange aux 11 points équirépartis du segment $[-1, 1]$.

c. Définir une fonction `Tchebychev` qui prend en entrée un entier $\mathtt{N} \geq 0$, et renvoie la liste des $\mathtt{N} + 1$ points de Tchebychev du segment $[-1, 1]$

$$\forall 0 \leq j \leq \mathtt{N},\ t_j^{\mathtt{N}} = \cos\Big(\frac{(2j+1)\pi}{2\mathtt{N} + 2}\Big).$$

d. Compléter le tracé de la question 2.b avec le tracé, à l'aide de la fonction Lagrange1, de la courbe représentative du polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux 11 points de Tchebychev du segment $[-1, 1]$.

3.a. Considérons la valeur absolue

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = |x|.$$

À l'aide de la fonction Lagrange1, tracer sur le segment $[-1, 1]$ les courbes représentatives de la fonction g, et de ses polynômes d'interpolation de Lagrange aux 11 points équirépartis, puis aux 11 points de Tchebychev, du segment $[-1, 1]$.

b. Considérons la fonction de Heaviside

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 1, \ \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{2}, \ \text{si } x = 0, \\ 0, \ \text{si } x < 0. \end{cases}$$

À l'aide de la fonction Lagrange1, tracer sur le segment $[-1, 1]$ les courbes représentatives de la fonction h, et de ses polynômes d'interpolation de Lagrange aux 11 points équirépartis, puis aux 11 points de Tchebychev, du segment $[-1, 1]$.

Exercice 2. *Algorithme des différences divisées*

1.a. Définir une fonction `DifferenceDivisee` qui prend en entrée une fonction de la variable réelle `f` et une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \dots, x_N]$, et renvoie la table des différences divisées successives de la fonction `f` aux points x_0, …, et x_N, définies par les formules de récurrence

$$\forall 0 \leq k \leq N,\ \mathtt{f}[x_k] = \mathtt{f}(x_k),$$

et

$$\forall 0 \leq j < k \leq N,\ \mathtt{f}[x_j, \dots x_k] = \frac{\mathtt{f}[x_{j+1}, \dots, x_k] - \mathtt{f}[x_j, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_j}.$$

b. Définir une fonction `Horner` qui prend en entrée une fonction de la variable réelle `f` et une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \dots, x_N]$, et renvoie la liste croissante des coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_{\mathtt{f}}(X)$ aux points x_0, …, et x_N, à l'aide de l'algorithme de Hörner

$$Q_N(X) = \mathtt{f}[x_0, \dots, x_N] \text{ et } \forall 0 \leq j \leq N-1,\ Q_j(X) = \mathtt{f}[x_0, \dots, x_N] + (X - x_j)\, Q_{j+1}(X),$$

au terme duquel $Q_0(X) = P_{\mathtt{f}}(X)$.

c. Définir une fonction `Lagrange2` qui prend en entrée une fonction de la variable réelle `f`, une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \dots, x_N]$ et un nombre réel `x`, et renvoie le calcul par la méthode de Hörner de la valeur au point `x` du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_{\mathtt{f}}(X)$ aux points x_0, …, et x_N.

2. *Application.* Soit $y_0 = \frac{1}{4}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2$ et $y_3 = 4$, et

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ u(y) = \frac{1}{y}.$$

a. Donner la liste des coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange P_u aux points y_0, … et y_3.

b. Tracer sur le segment $[0.2, 5]$ les graphes de la fonction u et des polynômes d'interpolation de Lagrange P_u obtenus par les fonctions `Lagrange1` et `Lagrange2`.

3. Comparer numériquement la rapidité des algorithmes `Lagrange1` et `Lagrange2`.