TP N°2. Approximation polynomiale

Nous cherchons à illustrer le phénomène de Runge pour l'interpolation polynomiale de Lagrange.

1.a. Définir une fonction *Base* qui prend en entrée un entier $0 \leq j \leq N$, une liste de coefficients $X = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel x, et renvoie la valeur au point x du polynôme :

$$\ell_j(X) = \prod_{1 \leq k \neq j \leq N} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

b. Définir une fonction *Lagrange* qui prend en entrée une fonction de la variable réelle f, une liste de coefficients $X = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel x, et renvoie la valeur au point x du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ aux points x_0, ..., et x_N :

$$P_f(X) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, \ell_j(X).$$

2.a. Définir une fonction *Repartie* qui prend en entrée un entier $N \geq 0$, et renvoie la liste des $N+1$ points équirépartis dans le segment $[-1, 1]$.

b. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1 + 5x^2}.$$

À l'aide de la fonction *Lagrange*, tracer sur le segment $[-1, 1]$ les courbes représentatives de la fonction f et de son polynôme d'interpolation de Lagrange aux 11 points équirépartis du segment $[-1, 1]$.

c. Définir une fonction *Tchebychev* qui prend en entrée un entier $N \geq 0$, et renvoie la liste des $N+1$ points de Tchebychev du segment $[-1, 1]$:

$$\forall 0 \leq j \leq N,\ t_j^N = \cos\Big(\frac{(2j+1)\pi}{2N+2}\Big).$$

d. Compléter le tracé de la question 2.b avec le tracé, à l'aide de la fonction *Lagrange*, de la courbe représentative du polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux 11 points de Tchebychev du segment $[-1, 1]$.

3.a. Considérons la valeur absolue

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = |x|.$$

À l'aide de la fonction *Lagrange*, tracer sur le segment $[-1, 1]$ les courbes représentatives de la fonction g, et de ses polynômes d'interpolation de Lagrange aux 11 points équirépartis, puis aux 11 points de Tchebychev, du segment $[-1, 1]$.

b. Considérons la fonction de Heaviside

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

À l'aide de la fonction *Lagrange*, tracer sur le segment $[-1, 1]$ les courbes représentatives de la fonction h, et de ses polynômes d'interpolation de Lagrange aux 11 points équirépartis, puis aux 11 points de Tchebychev, du segment $[-1, 1]$.