

TP N°1. Calcul approché des zéros d'une fonction

Nous cherchons à comparer les méthodes de Picard et de Newton pour le calcul d'une valeur approchée de l'unique solution réelle ℓ de l'équation

$$\ell = e^{-\ell}.$$

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

2.a. Définir une fonction *Picard* qui prend en entrée deux nombres $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, et renvoie une valeur approchée du nombre ℓ par la méthode du point fixe :

$$x_0 = a \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = e^{-x_n},$$

à une erreur de l'ordre de ε près.

b. Vérifier numériquement que la valeur approchée de ℓ donnée par la fonction *Picard* ne dépend pas du choix de la valeur initiale $a \in \mathbb{R}$.

3.a. Définir une fonction *Newton* qui prend en entrée deux nombres $b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, et renvoie une valeur approchée du nombre ℓ par la méthode de Newton pour la fonction $x \mapsto e^{-x} - x$:

$$y_0 = b \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{y_n + 1}{e^{y_n} + 1},$$

à une erreur de l'ordre de ε près.

b. Vérifier numériquement que la valeur approchée de ℓ donnée par la fonction *Newton* ne dépend pas du choix de la valeur initiale $b \in \mathbb{R}$.

c. Comparer numériquement les vitesses de convergence des fonctions *Picard* et *Newton*.