CY Cergy Paris Université **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

TP N°1. Calcul approché des zéros d'une fonction

Exercice 1. *Comparaison des méthodes de Picard et de Newton.*

Nous cherchons à calculer une valeur approchée de l'unique solution réelle ℓ de l'équation

$$\ell = e^{-\ell}.$$

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

2.a. Définir une fonction `Picard` qui prend en entrée deux nombres $\texttt{a} \in \mathbb{R}$ et $\texttt{eps} > 0$, et renvoie une valeur approchée du nombre ℓ par la méthode du point fixe

$$x_0 = \texttt{a} \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, x_{n+1} = e^{-x_n},$$

à une erreur de l'ordre de `eps` près.

b. Vérifier numériquement que la valeur approchée de ℓ donnée par la fonction `Picard` ne dépend pas du choix de la valeur initiale $\texttt{a} \in \mathbb{R}$.

3.a. Définir une fonction `Newton` qui prend en entrée deux nombres $\texttt{b} \in \mathbb{R}$ et $\texttt{eps} > 0$, et renvoie une valeur approchée du nombre ℓ par la méthode de Newton pour la fonction $x \mapsto e^{-x} - x$

$$y_0 = \texttt{b} \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, y_{n+1} = \frac{y_n + 1}{e^{y_n} + 1},$$

à une erreur de l'ordre de `eps` près.

b. Vérifier numériquement que la valeur approchée de ℓ donnée par la fonction `Newton` ne dépend pas du choix de la valeur initiale $\texttt{b} \in \mathbb{R}$.

c. Comparer numériquement les vitesses de convergence des fonctions `Picard` et `Newton`.

Exercice 2. *Méthode d'Archimède.*

Nous cherchons à calculer une valeur approchée du nombre π par la méthode d'Archimède, et à l'aide de la méthode de Héron.

1. Définir une fonction `Heron` qui prend en entrée deux nombres $\texttt{a} \in \mathbb{R}$ et $\texttt{eps} > 0$, et renvoie une valeur approchée du nombre $\sqrt{\texttt{a}}$ par la méthode de Héron

$$x_0 = \frac{1 + \texttt{a}}{2} \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + \texttt{a}}{2x_n},$$

à une erreur de l'ordre de `eps` près.

2. Soit

$$\forall n \geq 1,\, c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad s_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Nous rappelons que ces suites vérifient $c_1 = 0$, $s_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 1,\, c_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}} \quad \text{et} \quad s_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - c_n}{2}}.$$

a. Définir une fonction `Trigo` qui prend en entrée un entier `n` ≥ 1 et un nombre `eps` > 0, et renvoie une valeur approchée des nombres c_n et s_n calculés par la fonction `Heron`, à une erreur de l'ordre de `eps` près.

b. Définir une fonction `Archimede` qui prend en entrée un entier `n` ≥ 1 et un nombre `eps` > 0, et renvoie une valeur approchée du nombre π, après n itérations de la fonction `Trigo` avec une erreur de l'ordre de `eps`.

3.a. Pour $\varepsilon = 10^{-15}$ fixé, tracer la courbe qui à un entier $1 \leq \mathtt{n} \leq 50$, associe la valeur donnée par la fonction `Archimede(n, eps)`.

b. Tracer dans la même fenêtre graphique la courbe qui à un entier $1 \leq \mathtt{n} \leq 50$ associe la valeur $2^{\mathtt{n}} \sin(\pi/2^{\mathtt{n}})$.

c. Qu'observez-vous ? Comment interprétez-vous cette observation ?