CY Cergy Paris Université **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

TD N°4. Résolution approchée des équations différentielles ordinaires

Exercice 1. *Chute d'un corps.*

Considérons la chute verticale d'un corps de masse $m > 0$, d'altitude initiale $h_0 > 0$ et de vitesse initiale $v_0 \leq 0$ sous l'effet d'un champ gravitationnel $g > 0$. Notons $h(t)$ son altitude au temps t, et $v(t) = h'(t)$ sa vitesse au temps t. En présence d'une force de frottement de la forme $F(t) = -\alpha v(t)$, dans laquelle le coefficient de frottement $\alpha > 0$ est constant, le second principe de la dynamique conduit au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T],\, mv'(t) = -mg - \alpha v(t), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{C}$$

où $T > 0$ désigne le temps au bout duquel la chute du corps se termine à l'altitude $h = 0$.

1.a. Montrer que le problème de Cauchy (C_{t_0}) admet une unique solution globale v.

b. Calculer la valeur de la solution v.

2.a. Déterminer l'équation satisfaite par le temps final T en fonction des conditions initiales h_0 et v_0.

b. Vérifier que cette équation a bien une unique solution.

Exercice 2.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Considérons les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\, ty'(t) - 2y(t) = 1, \\ y(t_0) = 1. \end{cases} \tag{C_{t_0}}$$

1. Montrer que le problème de Cauchy (C_0) n'admet pas de solution.

2. Supposons que $t_0 \neq 0$ et notons

$$I_0 = \begin{cases}]0, +\infty[\text{ si } t_0 > 0, \\ ]-\infty, 0[\text{ si } t_0 < 0. \end{cases}$$

a. Montrer que le problème de Cauchy (C_{t_0}) admet une unique solution maximale y_{t_0} dont l'intervalle de définition est inclus dans I_0.

b. Calculer la valeur de la solution y_{t_0}.

c. Quel est l'intervalle maximal de prolongement de la solution y_{t_0} ?

Exercice 3.

1. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\, x'(t) = e^{-t\,x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{C_1}$$

a. Montrer que le problème de Cauchy (C_1) possède une unique solution maximale x.

b. Le problème de Cauchy (C_1) satisfait-il aux hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz global ?

2. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = e^{-|t\,y(t)|}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{C_2}$$

a. Montrer que le problème de Cauchy (C_2) possède une unique solution globale y.

b. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t\,y(t) \geq 0.$$

c. En déduire que la solution maximale x du problème (C_1) est globale.

Exercice 4.

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = \sqrt{4x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{C}$$

1. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_*(t) = \begin{cases} 0, \ \text{si } t \leq 0, \\ t^2, \ \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

a. Vérifier que la fonction x_* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée

b. En déduire que la fonction x_* est solution du problème de Cauchy (C).

2. Vérifier que le schéma d'Euler explicite ne permet pas d'approcher la solution x_*.

Exercice 5.

Soit $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

1. Considérons une fonction $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \forall t \geq 0,\ y'(t) \leq c\,y(t) + b, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ y(t) \leq y_0 e^{c\,t} + \frac{b}{c}\big(e^{c\,t} - 1\big).$$

2. Soit $h > 0$. Considérons une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \leq c\,y_n + b.$$

a. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = y_n + b/c$. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} \leq (1 + c\,h) z_n.$$

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \leq y_0(1 + c\,h)^n + \frac{b}{c}\big((1 + c\,h)^n - 1\big).$$

Exercice 6.

Pour $N \geq 11$, notons $h = 1/N$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\, t_n = n\, h.$$

1. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\, x'(t) = -10\big(x(t) - t^2\big) + 2t, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

a. Déterminer la solution explicite de ce problème de Cauchy.

b. Écrire la définition de la suite $(x_n)_{0 \leq n \leq N}$ donnée par la méthode d'Euler explicite pour la résolution approchée de ce problème sur le segment $[0, 1]$ avec un pas de discrétisation uniforme h.

c. Soit

$$\forall 0 \leq n \leq N,\, e_n = x(t_n) - x_n.$$

Vérifier que

$$\forall 0 \leq n \leq N - 1,\, e_{n+1} = (1 - 10h)e_n + h^2.$$

d. En déduire la valeur des erreurs $(e_n)_{0 \leq n \leq N}$.

2. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\, y'(t) = 10\big(y(t) - t^2\big) + 2t, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

a. Déterminer la solution explicite de ce problème de Cauchy.

b. Écrire la définition de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par la méthode d'Euler explicite pour la résolution approchée de ce problème sur le segment $[0, 1]$ avec un pas de discrétisation uniforme h.

c. Soit

$$\forall 0 \leq n \leq N,\, \varepsilon_n = y(t_n) - y_n.$$

Vérifier que

$$\forall 0 \leq n \leq N - 1,\, \varepsilon_{n+1} = (1 + 10h)\varepsilon_n + h^2.$$

d. En déduire la valeur des erreurs $(\varepsilon_n)_{0 \leq n \leq N}$.

3. Soit $T \in \mathbb{N}^*$. Considérons la résolution approchée des deux problèmes de Cauchy précédents sur le segment $[0, T]$ par la méthode d'Euler explicite avec le pas uniforme h. Les erreurs associées à chacun de ces problèmes ont-elles le même comportement asymptotique lorsque T augmente ?

Exercice 7. *Méthode de Crank-Nicholson.*

Soit $T > 0$. Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, \big|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big| \leq K\big|y_1 - y_2\big|,$$

pour un nombre $K \geq 0$. Étant donnée une condition initiale $y^0 \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T],\, y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

par la méthode de Crank-Nicholson. Étant donné un entier $N \geq 1$, cette méthode est définie par le schéma numérique

$$y_0 = y^0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,\, y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big),$$

où

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N,\, t_n = n\, h.$$

1.a. Vérifier que la méthode de Crank-Nicholson est une méthode à un pas de type implicite.

b. Vérifier qu'elle est bien définie sous la condition $0 \leq h < 2/K$.

2. Pour $0 < h_{\max} < 2/K$ fixé, nous supposons que $0 \leq h \leq h_{\max}$.

a. Vérifier que la méthode de Crank-Nicholson est consistante.

b. Montrer qu'elle est stable.

c. En déduire que la méthode de Crank-Nicholson est convergente.

d. Quel est l'ordre de cette méthode ?

Exercice 8.

Soit $T > 0$. Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, \big|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big| \leq K\big|y_1 - y_2\big|,$$

pour un nombre $K \geq 0$. Étant donnée une condition initiale $y^0 \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T],\, y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Étant donnés des nombres $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ et un entier $N \geq 1$, nous considérons la méthode numérique définie via le schéma

$$y_0 = y^0,$$

et

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq n \leq N-1,\, y_{n+1} = y_n + h\Big(\alpha f\big(t_n, y_n\big) + \beta f\Big(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\Big) \\ + \gamma f\big(t_{n+1}, y_n + h f(t_n, y_n)\big)\Big), \end{aligned}$$

où

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N,\, t_n = n\, h.$$

1.a. Vérifier qu'il s'agit d'une méthode à un pas de type explicite.

b. En déduire que cette méthode est bien définie.

2.a. Sous quelles conditions sur les nombres α, β et γ, cette méthode est-elle consistante ?

b. Sous quelles conditions sur les nombres α, β, γ et h, cette méthode est-elle stable ?

c. En déduire des conditions sur les nombres α, β, γ et h pour que cette méthode soit convergente.

3.a. Sous quelles conditions sur les nombres α, β et γ, cette méthode est-elle d'ordre supérieur ou égal à 2 ?

b. Cette méthode peut-elle être d'ordre supérieur ou égal à 3 ?