CY Cergy Paris Université **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

TD N°3. Calcul approché d'intégrales

Exercice 1.

Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(f) = \frac{2}{3}\left(2f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

1. Déterminer l'ordre de cette méthode de quadrature.

2. Considérons une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$ d'un segment $[a,b]$ non réduit à un point.

a. Écrire la formule de la méthode de quadrature composée associée à la méthode de quadrature élémentaire σ et à la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$.

b. Quel est l'ordre de cette méthode de quadrature composée ?

Exercice 2. *Formule de Radau.*

Soit $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\xi \in]-1,1]$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(f) = b_1 f(-1) + b_2 f(\xi).$$

1.a. Déterminer la valeur des nombres b_1, b_2 et ξ afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.

b. Quel est alors l'ordre de cette méthode ?

2. Vérifier que les nombres b_1, b_2 et ξ ainsi déterminés satisfont

$$b_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\xi - y}{\xi + 1}\, dy \quad \text{et} \quad b_2 = \int_{-1}^{1} \frac{y+1}{\xi+1}\, dy.$$

Exercice 3.

Soit $\xi \in]0,1]$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(f) = \frac{2}{3}\big(f(-\xi) + f(0) + f(\xi)\big).$$

1.a. Déterminer la valeur du nombre ξ afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.

b. Quel est alors l'ordre p de cette méthode ?

c. Calculer le noyau de Peano K_p de la méthode de quadrature élémentaire σ.

2. Fixons la valeur du nombre ξ afin que la méthode de quadrature élémentaire σ soit d'ordre maximal et considérons une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$ d'un segment $[a,b]$ non réduit à un point.

a. Écrire la formule de la méthode de quadrature composée associée à la méthode de quadrature élémentaire σ et à la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$.

b. Calculer le noyau de Peano $\mathcal{K}_p$ de cette méthode de quadrature composée.

Exercice 4. *Méthode de Simpson.*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(f) = af(-1) + bf(0) + af(1).$$

1.a. Déterminer la valeur des nombres a et b afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.

b. Quel est alors son ordre p ?

2. Les nombres a et b étant ainsi fixés, considérons l'erreur associée à la méthode de quadrature élémentaire σ

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sigma(f).$$

a. Calculer le noyau de Peano K_p de la méthode de quadrature élémentaire σ.

b. En déduire la formule de l'erreur $E(f)$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^{p+1}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 5.

Soit $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\xi \in]-1, 1]$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(f) = b_0 f(-1) + b_1 f'(-1) + b_2 f'(\xi).$$

1. Déterminer la valeur des nombres b_0, b_1, b_2 et ξ afin que cette formule de quadrature soit exacte si f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Nous supposons dans la suite que les nombres b_0, b_1, b_2 et ξ sont ainsi fixés.

2. Considérons l'erreur associée à la méthode de quadrature élémentaire σ

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sigma(f).$$

a. Calculer l'erreur associée à la fonction $x \mapsto x^4$.

b. Quel est l'ordre p de la méthode de quadrature σ ?

3.a. Soit

$$\forall (x, y) \in [-1, 1]^2, h_y(x) = (x - y)_+^{p+1}, \qquad \text{et} \qquad K(y) = E(h_y).$$

Vérifier que

$$\forall f \in \mathcal{C}^{p+1}([-1, 1], \mathbb{R}),\ E(f) = \frac{1}{p!} \int_{-1}^{1} K(y) f^{(p+1)}(y)\,dy.$$

b. Calculer la valeur de la fonction K.

4. Considérons une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq M}$ d'un segment $[a, b]$ non réduit à un point.

a. Écrire la formule de la méthode de quadrature composée associée à la méthode de quadrature élémentaire σ et à la subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq M}$.

b. Écrire la formule de l'erreur associée à cette méthode de quadrature composée pour une fonction $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a, b], \mathbb{R})$ en fonction de la fonction K.

Exercice 6. *Méthode des rectangles à gauches.*

Étant donné un entier $N \geq 2$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature composée

$$S_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\Big(\frac{k}{N}\Big).$$

1. Calculer l'ordre de la méthode de quadrature composée S_N.

2.a. Soit $p \geq 1$ et $0 \leq k \leq N-1$. Quel que soit $\frac{k}{N} \leq x \leq \frac{k+1}{N}$, montrer qu'il existe un nombre $\frac{k}{N} \leq \xi \leq \frac{k+1}{N}$ tel que

$$f(x) = \sum_{q=0}^{p-1} \frac{f^{(q)}\big(\frac{k}{N}\big)}{q!} \Big(x - \frac{k}{N}\Big)^q + \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!} \Big(x - \frac{k}{N}\Big)^p.$$

b. Soit

$$\|f^{(p)}\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(p)}(x)|.$$

En déduire que

$$\Big| \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}} f(x)\,dx - \sum_{q=0}^{p-1} \frac{f^{(q)}\big(\frac{k}{N}\big)}{(q+1)!\,N^{q+1}} \Big| \leq \frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{(p+1)!\,N^{p+1}}.$$

c. En déduire que

$$\Big| \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{q=0}^{p-1} \frac{S_N\big(f^{(q)}\big)}{(q+1)!\,N^q} \Big| \leq \frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{(p+1)!\,N^p}.$$

d. Conclure qu'il existe des nombres réels a_1, a_2, … et a_{p-1} tels que

$$\int_0^1 f(x)\,dx - S_N(f) = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{a_q}{N^q} + \underset{N \to +\infty}{\mathcal{O}}\Big(\frac{1}{N^p}\Big).$$

3.a. Soit

$$U_N^1(f) = 2S_{2N}(f) - S_N(f).$$

Vérifier que

$$\int_0^1 f(x)\,dx - U_N^1(f) = \underset{N \to +\infty}{\mathcal{O}}\Big(\frac{1}{N^2}\Big).$$

b. Soit

$$\forall p \geq 0,\ U_N^{p+1}(f) = \frac{2^{p+1} U_{2N}^p(f) - U_N^p(f)}{2^{p+1} - 1}.$$

Conclure que

$$\forall p \geq 0,\ \int_0^1 f(x)\,dx - U_N^p(f) = \underset{N \to +\infty}{\mathcal{O}}\Big(\frac{1}{N^{p+1}}\Big).$$