CY Cergy Paris Université **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

TD N°2. Approximation polynomiale

Exercice 1.

Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction :

$$(i)\, f(x) = e^x, \text{ aux points } x_0 = -1, x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 1,$$
$$(ii)\, g(x) = \sin(\pi x), \text{ aux points } y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2} \text{ et } y_2 = 1,$$
$$(iii)\, h(x) = x^3, \text{ aux points } z_0 = -1, z_1 = 0 \text{ et } z_2 = 1.$$

Exercice 2.

Considérons la fonction
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{x},$$
et les points d'interpolation $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 4$.

1.a. Calculer les différences divisées successives de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

b. En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

2.a. Déterminer les polynômes de Lagrange ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 associés aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

b. À l'aide des polynômes ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3, vérifier l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

Exercice 3.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels, et x_0, x_1, $\ldots$ et x_N des nombres réels deux à deux distincts. Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange P_N de P aux points x_0, x_1, $\ldots$, et x_N est le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $T_N = (X - x_0)(X - x_1)\ldots(X - x_N)$.

2. Soit
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1.$$
Déterminer les polynômes d'interpolation de Lagrange $P_N(f)$ de la fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $\ldots$, et $x_N = N$ pour tout entier $N \geq 0$.

Exercice 4.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 3 tel que
$$P_f(0) = f(0), \quad P_f'(0) = f'(0), \quad P_f(1) = f(1) \quad \text{et} \quad P_f'(1) = f'(1).$$

2. Soit $0 < h < 1$. Considérons les fonctions R, Π et F définies par
$$\forall x \in [0,1],\ R(x) = f(x) - P_f(x), \quad \Pi(x) = x^2(x-1)^2 \quad \text{et} \quad F(x) = R(x)\Pi(h) - R(h)\Pi(x).$$

a. Déterminer les racines communes aux fonctions R et Π, ainsi que leur multiplicité.

b. Montrer qu'il existe un nombre $0 < \xi < 1$ tel que $F^{(4)}(\xi) = 0$.

c. En déduire que

$$R(h) = \frac{1}{4!}\, f^{(4)}(\xi)\, \Pi(h).$$

d. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ |\Pi(x)| \leq \frac{1}{16}.$$

e. Conclure que

$$\|f - P_f\|_\infty \leq \frac{1}{384}\|f^{(4)}\|_\infty.$$

3.a. Vérifier qu'il existe $0 < a < 1$ tel que $R'(a) = 0$.

b. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ \big|x(x-1)(x-a)\big| \leq \frac{1}{4}.$$

c. En déduire que

$$\|f' - P_f'\|_\infty \leq \frac{1}{24}\|f^{(4)}\|_\infty.$$

Exercice 5.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

1. Vérifier que l'application

$$\forall g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \|g\|_1 = \int_0^1 |g(x)|\, dx,$$

définit une norme sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

2. Rappelons que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \mathrm{sign}(a) = \begin{cases} 1, \text{ si } a > 0, \\ 0, \text{ si } a = 0, \\ -1, \text{ si } a < 0. \end{cases}$$

a. Soit $N \geq 0$. Supposons qu'il existe un polynôme $P_N \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que

$$\forall 0 \leq k \leq N,\ \int_0^1 x^k\, \mathrm{sign}(f(x) - P_N(x))\, dx = 0.$$

Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_N[X],\ \|f - P_N\|_1 \leq \|f - P\|_1.$$

b. En déduire la valeur des nombres

$$I = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \big\|x^2 - \alpha\big\|_1 \quad \text{et} \quad J = \inf_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2} \big\|x^2 - \alpha x - \beta\big\|_1.$$

Exercice 6. *Polynômes de Tchebychev.*

1. Soit $n \geq 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Ce polynôme est appelé polynôme de Tchebychev d'ordre n.

2.a. Soit $n \geq 1$. Vérifier que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos\big((n+1)\theta)\big) + \cos\big((n-1)\theta\big) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta).$$

b. En déduire que

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

c. Quel est le degré du polynôme T_n ? Quel est son coefficient dominant ?

d. Calculer les polynômes de Tchebychev T_0, T_1, T_2 et T_3.

3.a. Soit

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})^2,\ \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Montrer que la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Nous noterons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

b. Vérifier que

$$\forall m,n \geq 0,\ \int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0, \text{ si } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ si } m = n \neq 0 \\ \pi, \text{ si } m = n = 0. \end{cases}$$

c. En déduire que la famille $(T_0/\sqrt{\pi}, \sqrt{2}T_1/\sqrt{\pi}, \ldots, \sqrt{2}T_n/\sqrt{\pi}, \ldots)$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4. Soit $n \geq 0$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, considérons le polynôme $P_n(f)$ défini par

$$P_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(\langle f,T_0\rangle + 2\sum_{k=0}^{n}\langle f,T_k\rangle\,T_k\right).$$

a. Vérifier que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \|f-P\|^2 = \|f-P_n(f)\|^2 + \|P_n(f)-P\|^2.$$

b. En déduire que $P_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation de f pour la norme $\|\cdot\|$.

c. *Application.* Soit

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = \cos(\pi x).$$

Calculer le polynôme de meilleure approximation d'ordre 3 de f pour la norme $\|\cdot\|$.