TD N°1. Calcul approché des zéros d'une fonction

Exercice 1.

Considérons l'équation
$$x(1+e^x) = e^x,$$
dans laquelle x est un nombre réel.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle ℓ.

2. Soit
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{4}.$$

b. Étant donné un nombre réel x_0, considérons la suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence
$$\forall n \geq 0,\ x_{n+1} = f(x_n).$$
Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite ℓ et que sa vitesse de convergence est au moins géométrique.

Exercice 2.

Considérons l'équation
$$x = e^{-x},$$
dans laquelle x est un nombre réel.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle ℓ.

2. Soit
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}.$$
Étant donné un nombre réel x_0, considérons la suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence
$$\forall n \geq 0,\ x_{n+1} = f(x_n).$$

a. Vérifier que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et qu'elle vérifie
$$\forall n \geq 3,\ e^{-1} \leq x_n \leq 1.$$

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie
$$\forall e^{-1} \leq x \leq 1,\ |f'(x)| \leq e^{-e^{-1}}.$$

c. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite ℓ et que sa vitesse de convergence est au moins géométrique.

3. Soit
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - x.$$

a. Donner la définition de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ qui correspond à la méthode de Newton pour la fonction h.

b. Vérifier qu'elle est bien définie quelle que soit sa valeur initiale $y_0 \in \mathbb{R}$.

c. Montrer qu'elle est convergente de limite ℓ et que sa vitesse de convergence est au moins quadratique.

Exercice 3. *Méthode de Héron.*

Nous cherchons à déterminer une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à l'aide de la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2.$$

1.a. Donner la définition de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ qui correspond à la méthode de Newton pour la fonction f.

b. Vérifier qu'elle est bien définie lorsque sa valeur initiale vaut $x_0 = 1$ et que, dans ce cas,
$$\forall n \geq 0,\ x_n \geq 1.$$

2.a. Vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|x_{n+1} - \sqrt{2}\big| \leq \frac{1}{2}\big|x_n - \sqrt{2}\big|^2.$$

b. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|x_n - \sqrt{2}\big| \leq \frac{1}{2^{2^n}}.$$

c. Combien de décimales exactes du nombre $\sqrt{2}$ obtenons-nous avec l'approximation donnée par le nombre x_n ?

Exercice 4. *Méthode de Newton pour l'inverse.*

Soit $a > 0$. Nous cherchons à déterminer une valeur approchée de l'inverse $\frac{1}{a}$ à l'aide de la fonction g définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{1}{x} - a.$$

1. Donner la définition de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ qui correspond à la méthode de Newton pour la fonction g.

2. Vérifier que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie quel que soit le choix de la valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite $\frac{1}{a}$ si et seulement si $0 < x_0 < \frac{2}{a}$.

Exercice 5. *Variante de la méthode de Newton.*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $f(\ell) = 0$. Supposons qu'il existe des nombres $a \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ et $\lambda > 0$ tels que :
$$\begin{aligned}
&(i) \quad && a - \rho \leq \ell \leq a + \rho,\\
&(ii) \quad && |f(a)| \leq \frac{\rho}{2\lambda},\\
&(iii) \quad && \forall x \in [a-\rho, a+\rho], |f'(x)| \geq \frac{1}{\lambda},\\
&(iv) \quad && \forall (x,y) \in [a-\rho, a+\rho]^2, |f'(x) - f'(y)| \leq \frac{1}{2\lambda}.
\end{aligned}$$

Étant donné un nombre $b \in [a-\rho, a+\rho]$, considérons la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(b)}.$$

1.a. Vérifier que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et qu'elle vérifie

$$\forall n \geq 0,\ x_{n+1} - a = x_n - a - \frac{f(x_n) - f(a)}{f'(b)} + \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

b. En déduire que

$$\forall n \geq 0, a - \rho \leq x_n \leq a + \rho.$$

2.a. Vérifier que

$$\forall n \geq 0, |x_n - \ell| \leq \frac{\rho}{2^n}.$$

b. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa vitesse minimale de convergence ?

Exercice 6. *Méthode de Richardson.*

Considérons une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ convergente de limite ℓ et supposons qu'il existe des nombres $\nu_1 \in \mathbb{R}$ et $0 < q_2 < q_1 < 1$ tels que

$$\forall n \geq 0,\ \left|x_n - \ell - \nu_1\, q_1^n\right| \leq q_2^n.$$

1. Soit

$$\forall n \geq 0,\ y_n = \frac{x_{n+1} - q_1 x_n}{1 - q_1}.$$

Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et convergente de limite ℓ.

2. Vérifier qu'il existe un nombre $\nu_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 0,\ \left|y_n - \ell\right| \leq \nu_2\, q_2^n.$$

Exercice 7. *Méthode d'Archimède.*

Nous cherchons à calculer une valeur approchée du nombre π à l'aide des suites $(c_n)_{n\geq 0}$ et $(s_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$\forall n \geq 0,\ c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad s_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1.a. Vérifier que

$$\forall n \geq 0,\ c_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}} \quad \text{et} \quad s_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - c_n}{2}}.$$

b. Par quelle méthode pouvons-nous calculer les valeurs des nombres c_n et s_n ?

2.a. Montrer qu'il existe un nombre $\nu_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 0,\ \left|2^n s_n - \pi + \frac{\pi^3}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right| \leq \frac{\nu_1}{16^n}.$$

b. Par quelle méthode pouvons-nous définir une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0,\ \left|x_n - \pi\right| \leq \frac{\nu_2}{16^n},$$

pour un nombre $\nu_2 \in \mathbb{R}$?