CY Cergy Paris Université **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques **2024-2025**

Devoir surveillé N°2

La durée de ce devoir est de quarante-cinq minutes. Les deux exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (4 points)

1. Considérons une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$ d'un segment $[a,b]$.

a. Écrire la formule de la méthode de quadrature composée des rectangles à gauche pour cette subdivision et une fonction $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

b. Donner l'ordre de la méthode de quadrature composée des rectangles à gauche.

2. Étant donnée une fonction $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ globalement Lipschitzienne en sa seconde variable, et une condition initiale $y_0\in\mathbb{R}$, considérons la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases}\forall t\in[0,T],\ y'(t)=f(t,y(t)),\\ y(0)=y_0,\end{cases}$$

par la méthode numérique à un pas définie par

$$\forall 0\leq n\leq N-1,\ y_{n+1}=y_n+h_n\phi\big(t_n,y_n,h_n\big),$$

où $\phi\in\mathcal{C}^0([0,T]\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

a. Donner la définition de la consistance de cette méthode numérique à un pas.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions f et ϕ pour que cette méthode numérique soit consistante.

Exercice 1. (5 points)

Considérons les points d'interpolation $x_0=-2$, $x_1=-1$, $x_2=1$ et $x_3=2$.

1. Déterminer les polynômes de Lagrange ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 associés aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

2. Soit

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2+1}.$$

Calculer l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange P de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

Exercice 2. (11 points)

1. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, et $\xi\in[-1,1]$ tel que $\xi\neq-1/3$. Étant donnée une fonction $g\in\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire définie par

$$\sigma(g)=\alpha g\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\beta g(\xi).$$

a. Déterminer la valeur des nombres α, β et ξ afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.

b. Quel est alors l'ordre p de cette méthode ?

c. Vérifier que les nombres α, β et ξ ainsi déterminés satisfont

$$\alpha = 3\int_{-1}^{1} \frac{\xi - y}{3\xi + 1}\, dy \quad \text{et} \quad \beta = \int_{-1}^{1} \frac{3y+1}{3\xi+1}\, dy.$$

Dans toute la suite de cet exercice, les nombres α, β et ξ sont fixés de sorte que l'ordre p de la méthode de quadrature élémentaire σ soit maximal.

2. Considérons une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$ d'un segment $[a,b]$.

a. Écrire la formule de la méthode de quadrature composée Σ associée à la méthode de quadrature élémentaire σ et à la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$.

b. Quel est l'ordre de cette méthode de quadrature composée ?

3. Considérons l'erreur associée à la méthode de quadrature élémentaire σ qui est définie par

$$E(g) = \int_{-1}^{1} g(x)\, dx - \sigma(g).$$

a. Montrer que le noyau de Peano K_p de la méthode de quadrature élémentaire σ est égal à

$$\forall y \in [-1,1],\ K_p(y) = -\frac{1}{6}\Big((1-y)^2(2y+1) + (-3y-1)_+^2\Big).$$

b. Vérifier que

$$\forall y \in [-1,1],\ \big|K_p(y)\big| \leq \frac{14}{3}.$$

c. Soit $g \in \mathcal{C}^{p+1}([-1,1],\mathbb{R})$. En déduire que

$$\big|E(g)\big| \leq \frac{7}{3}\int_{-1}^{1} \big|g^{(p+1)}(y)\big|\, dy.$$